بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم گروه ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

موضوع:

حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته منفرد ضعیف بر پایه تقریب سینک

استاد راهنما:

دکتر سعید سهرابی

نام دانشجو:

حمید شمس

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

پدر عزیز و مادر مهربانم که پشتوانه و تکیه گاهم بوده‌اند.

خدایا، بفهمان که بی توجه می شوم اما نشانم نده.

خدایا، هم بفهمان و هم نشانم بده که با توجه خواهم شد.

چکیده

در این پایان نامه روش‌های عددی جدید بر پایه تقریب سینک [1] برای حل معادلات انتگرالی فردهلم [2] خطی نوع دوم با هسته منفرد ضعیف

$$g(t) = \lambda u(t) - \int_a^b |t-s|^{p-1} k(t,s) u(s) ds \qquad a \leq t \leq b$$

پیشنهاد شده است. معادلاتی از این نوع اغلب در کاربردهای عملی مانند فیزیکی (طبیعی) و مهندسی، مسائل الکترواستاتیک، مسئله دیریکله، مسائل پتانسیل، مسئله انتقال حرارت تابشی، مسائل انتقال ذرات از اختر فیزیک، مسائل راکتور و بر هم کنش بین عناصر از یک پلیمر زنجیری در محلول، ظاهر می شوند. این روش‌ها به وسیله توانایی‌هایی از تقریب سینک با تبدیل هموارسازي، توسعه یافته‌اند، و برای معادلاتی که به شکل منفرد هستند، قابل اجراست. مثال‌های عددی نشان می‌دهد، که این روش‌ها دارای همگرایی نمایی می‌باشند، و از این لحاظ این روش‌ها نتایج معمول استفاده از چند جمله‌ای‌های همگرا را بهبود بخشیده‌اند.

[1] Sinc

[2] Fredholm

فهرست مطالب

پیشگفتار

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تدوین گردیده است:

- Okayama, Tomoaki and Matsuo, Takayasu and Sugihara. Sinc-collocation methods for weakly singular Fredholm integral equations of the second kind. *Journal of computational and applied mathematics*, Vol. 234, No. 4, pp. 1211-1227.

در مطالعات اخیر، روش‌های تقریبی که در آن از تابع سینک استفاده شده است خانواده‌ی جدیدی از فرمول‌ها را ارائه می‌کنند. این فرمول‌ها ما را قادر به تقریب‌های دقیقی برای هر نوع عملیات حسابی مانند تقریب تابع، تقریب مشتق تابع و غیره ...می‌سازند. از طرفی معادلات انتگرال نقش مهمی در ریاضیات ایفا می‌کنند و کاربرد وسیعی در علوم مهندسی، شیمی، فیزیک، و غیره ...دارند و در بسیاری از موارد دارای نقاط تکین می‌باشند که روش‌های سینک به دلیل خواص تابع پایه‌ای سینک، برای این گونه مسایل بسیار کارا می‌باشند. یکی از مزیت‌های روش‌های سینک آن است که حتی در مسائل منفرد نیز مرتبه همگرایی، نمایی دارند. در ادامه به مختصری از تاریچه‌ی روش‌های سینک می‌پردازیم.
تابع سینک نخستین بار در کارهای برل[۱] و ویتاکر[۲] مورد استفاده قرار گرفت. ویتاکر نخستین کسی بود که ارتباط بین تابع سینک و توابع تحلیلی را مورد بررسی قرار داد. در سال ۱۹۸۱ فرانک استنجر[۳] فرمول‌های تقریب سینک را بر اساس تابع ویتکر برای توابع و قضایای مربوط به این تقریب را بررسی کرد [۲۴]. در سال ۱۹۹۱، بیالکی[۴] تقریب سینک را با به کارگیری روش هم محلی برای مسائل مقدار مرزی ارائه داده است[۶].
در این پایان نامه معادلات فردهلم نوع دوم با هسته منفرد ضعیف را توسط توابع پایه‌ای سینک به دو روش نمایی ساده سینک و نمایی مضاعف سینک تقریب می‌زنیم، سپس بیشینه خطا را با تفریق جواب اصلی معادله انتگرال از جواب تقریبی بدست می‌آوریم.
این پایان نامه شامل چهار فصل است که در فصل اول به تاریچه و مفاهیم اولیه می‌پردازیم. در فصل دوم به تعریف تابع سینک و خواص آن پرداخته می‌شود، و در فصل سوم روش‌های

[۱] E.Borel
[۲] E.T.Whittaker
[۳] F.Stenger
[۴] B.Bialecki

هم محلی سینک از نوع نمایی ساده سینک با SE[۱] و نمایی مضاعف سینک DE[۲] برای حل معادلات انتگرال فردهلم با هسته منفرد ضعیف از نوع دوم معرفی شده است. تجزیه و تحلیل خطا و قضایای مربوط به همگرایی روش‌ها آورده شده است، و در انتها مثال‌های عددی به همراه نمودار ماکزیمم خطا برای مقادیر مختلف N مقایسه شده که نمودار خطاها به صورت نزولی می‌باشد.

[۱]Simple Exponential

[۲]Double Exponential

فصل ۱

تاریخچه و مفاهیم اولیه

۱.۱ تاریخچه و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. شکل عمومی یک معادله انتگرال خطی به صورت زیر است :

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \tag{۱.۱}$$

که در آن $k(x,t)$ یک تابع دو متغیره است که هسته نامیده می‌شود و $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند.

تذکر ۲.۱.۱. در معادله فوق تابع مجهول $u(x)$، تنها در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است و در حالت‌های دیگر ممکن است تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال هم حضور داشته باشد. باید توجه داشت که هسته معادله، $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ توابع معلومی هستند.

معادله‌ی انتگرال اولین بار در سال ۱۸۸۸ میلادی توسط دوبویس ریموند[۱]پیشنهاد شد. همچنین اولین پیدایش معادله‌ی انتگرال را به آبل[۲]، زمانی که پایان نامه وی در سال‌های ۱۸۲۳ تا ۱۸۲۶ میلادی منتشر شد، نسبت می‌دهند. نظریه دیگری نیز وجود دارد که اولین پیدایش معادله‌ی انتگرال مربوط به لاپلاس[۳]در سال ۱۷۸۲ میلادی می‌باشد، زمانی که وی ایده‌ی تبدیلات معکوس لاپلاس را پایه ریزی می‌کرد.
به عنوان مثال تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که $0 < t < \infty$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{۲.۱}$$

[۱] Du Bois-Reymond
[۲] N.Abel
[۳] P.Laplace

رابطه (۲.۱) بیانگر همگرایی انتگرال فوق برای $s > \circ$ است. در صورتی که

$$F(s) = \frac{۱}{s^{۲}} \qquad s > \circ \tag{۳.۱}$$

و بخواهیم تابع $f(t)$، یا همان تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ را تعیین کنیم، باید توجه داشته باشیم :

$$\frac{۱}{s^{۲}} = \int_{a}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{۴.۱}$$

در این صورت معادله فوق به یک معادله انتگرال تبدیل می‌شود که در آن $f(t)$ تابع مجهول است. و این بدین معناست که معرفی معادله انتگرال توسط لاپلاس شروع شده است.
فوریه [۱] در سال ۱۸۲۰ میلادی برای تبدیل تابع $f(x)$ که $-\infty < x < +\infty$ و تبدیل معکوس آن تعریف زیر را ارائه داد :

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx \tag{۵.۱}$$

$$f^{-۱}\{F\} = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} F(\lambda) d\lambda \tag{۶.۱}$$

لذا او در پیدا کردن $f(x)$ در معادله (۵.۱) یک معادله انتگرال بر حسب $f(x)$ را حل کرد که جواب، همان معادله‌ی (۶.۱) می‌باشد. با چنین جواب صریح جای تعجب نیست اگر بعضی تاریخ دانان نتایج فوریه را اولین جواب واضح و دست یافتنی برای یک معادله انتگرال در نظر بگیرند.
نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه‌های آنالیز ریاضی است و اصولاً اهمیت آن از لحاظ مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی است.
برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی و معادلات انتگرالی که دارای جواب صریحی نیستند باید از روش‌های عددی استفاده کنیم، معادلات انتگرال نسبت به معادلات با مشتقات معمولی یا جزئی بهتر تقریب می‌شوند. معادله‌ی

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t) u(t) dt \tag{۷.۱}$$

را می توان به شکل عملگری به صورت زیر نمایش داد :

$$u(x) = f(x) + (Ku)(x) \qquad \to (Ku)(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t) u(t) dt \tag{۸.۱}$$

و یا به طور معادل :

$$u = f + Ku \tag{۹.۱}$$

[۱] J.Fourier

که K یک عملگر انتگرال برای معادله (۱.۱) است.
توجه کنیم که بعضی مواقع ممکن است مشتق نیز در معادله ظاهر شود که این نوع معادلات را معادلات انتگرال-دیفرانسیل می‌نامند. لازم به توضیح است این نوع معادلات در اوایل ۱۹۰۰ میلادی توسط ولترا[1] معرفی شدند.

۱.۱.۱ طبقه بندی معادلات انتگرال خطی و غیرخطی

معادلات انتگرال به دو گروه خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند . متداول ترین معادلات خطی و غیرخطی را می‌توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته بندی کرد اما در این بخش معادلات انتگرال خطی در چهار دسته زیر مورد بررسی قرار می گیرند :
۱-معادلات انتگرال فردهلم
۲-معادلات انتگرال ولترا
۳-معادلات انتگرال -دیفرانسیل
۴-معادلات انتگرال منفرد
حال به معرفی معادلات انتگرال فردهلم و ولترا از نوع خطی و غیرخطی و همچنین معادلات انتگرال-دیفرانسیل و معادلات انتگرال منفرد می‌پردازیم.

تعریف ۳.۱.۱. معادله انتگرال خطی بر حسب تابع مجهول $u(x)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$h(x)u(x) = f(x) + \int_a^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \tag{۱۰.۱}$$

تعریف ۴.۱.۱. اگر $\beta(x) = b$ معادله (۱۰.۱) را معادله انتگرال فردهلم می‌نامند و به صورت زیر نشان داده می‌شود :

$$h(x)u(x) = f(x) + \int_a^{b} k(x,t)u(t)dt \tag{۱۱.۱}$$

معادله (۱۱.۱) معادله انتگرال فردهلم از نوع اول نامیده می‌شود هرگاه $h(x) = 0$.

[1] V.Volterra

در این صورت

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{۱۲.۱}$$

معادله (۱۱.۱) معادله انتگرال فردهلم از نوع دوم نامیده می‌شود هرگاه $h(x) = 1$. در این صورت

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{۱۳.۱}$$

تعریف ۵.۱.۱. اگر $\beta(x) = x$ معادله (۱۱.۱) را معادله انتگرال ولترا می‌نامند و به صورت زیر نشان داده می‌شود :

$$h(x)u(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt \tag{۱۴.۱}$$

معادله (۱۱.۱) معادله انتگرال ولترا از نوع اول نامیده می‌شود هرگاه $h(x) = 0$. در این صورت

$$f(x) = \int_a^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \tag{۱۵.۱}$$

معادله (۱۱.۱) معادله انتگرال ولترا از نوع دوم است هرگاه $h(x) = 1$. دراین صورت

$$u(x) = f(x) + \int_a^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \tag{۱۶.۱}$$

در کل معادلات انتگرال نوع اول بد رفتار هستند، یعنی با اندک تغییراتی در توابع معلوم، جواب آن‌ها دچار دگرگونی شدید می‌شود و این بدین معنی است که اگر توابع معلوم به صورت تقریبی و از طریق اندازه گیری یک سری کمیت‌های فیزیکی و با اندک خطایی بدست آمده باشند، باعث به وجود آمدن اختلاف زیادی در جواب خواهند شد، در نتیجه جواب بدست آمده قابل اطمینان نیست.

معادلات انتگرال غیر خطی فردهلم و ولترای نوع دوم را می‌توان به شکل‌های زیر نمایش داد.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t,u(t))dt \tag{۱۷.۱}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t,u(t))dt \tag{۱۸.۱}$$

دراین معادلات $u(t)$ تابع مجهول، در زیر علامت انتگرال به صورت غیرخطی ظاهر می‌شود. اگر هسته معادلات نسبت به تابع مجهول جدایی پذیر باشد در این صورت :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(u(t))dt \tag{۱۹.۱}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\psi(u(t))dt \qquad (۲۰.۱)$$

که در آن ها $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ توابع غیرخطی از $u(x)$ هستند. این نوع معادلات را معادله انتگرال همرشتاین[۱] می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱. معادله انتگرال نوع دوم را که دارای دو بخش انتگرال فردهلم و ولترا می‌باشد، معادله انتگرال غیر خطی فردهلم - ولترا نوع دوم می‌نامند.

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^b k_1(x,t)\varphi(t,u(t))dt + \lambda_2 \int_a^x k_2(x,t)\psi(t,u(t))dt \qquad (۲۱.۱)$$

تعریف ۷.۱.۱. شکل استاندارد معادله انتگرال - دیفرانسیل خطی بر حسب تابع مجهول $u(x)$ به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \qquad (۲۲.۱)$$

که درآن $u^{(n)}(x)$ مشتق n ام تابع $u(x)$ نسبت به x را نشان می‌دهد. همچنین معادله (۲۲.۱) را می‌توان به شکل اپراتوری زیر نیز نوشت :

$$u^{(n)}(x) - f(x) = (Ku)(x) \qquad a \le x \le b$$

که در آن K عملگر انتگرال تابع u نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱. وقتی که $\beta(x) = b$ باشد معادله (۲۲.۱) را معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی فردهلم مرتبه n ام می‌نامند :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}\ ,\ 0 \le k \le (n-1)$$

همچنین $\beta(x) = x$ باشد معادله (۲۲.۱) را معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی ولترا می‌نامند :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}\ ,\ 0 \le k \le (n-1)$$

۲.۱.۱ معادلات انتگرال منفرد

معادلات انتگرال منفرد در اوایل قرن اخیر در ارتباط با دو مساله کاملاً متفاوت توسط دو نفر معرفی شد که یکی از آن‌ها هیلبرت [۲] بود که ضمن کار روی برخی مسایل مرزی نظریه توابع تحلیلی با آن برخورد کرد و دیگری پوانکاره [۳] بود که در تئوری عمومی جذر و مد، با آن‌ها مواجه شد .

[۱] Hammrestein
[۲] D.Hilbert
[۳] H.Poincare

تعریف ۹.۱.۱. یک معادله انتگرال را معادله انتگرال منفرد گوئیم اگر حداقل یکی از حدود انتگرال بی‌نهایت باشد یا اینکه هسته معادله در یک نقطه یا در نقاطی از فاصله انتگرال‌گیری نامتناهی باشد .

ضرورت حل معادلات انتگرال با هسته منفرد ضعیف و کاربردهای آن :

معادلات انتگرال با هسته منفرد ضعیف اغلب استفاده کاربردی دارند. همچنین رفتار برخی پدیدهای فیزیکی را که در شاخه‌های مختلف مهندسی و علوم ظاهر می‌شوند، به کمک این نوع معادلات می‌توان مورد مطالعه قرار داد که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد :

۱- مسایل الکتریسته با زمان تناوب کم.

۲- صورت بندی مسایل موازنه رادیو اکتیوی و گرمای رادیو اکتیوی.

۳- توصیفی از بر هم کنش هیدرودینامیکی بین اعضایی از یک زنجیره پلیمری.

۴- تکثیر امواج رادیویی و شنوایی.

۵- مسایل دیریکله و مسایل ریاضی از نوع تعادل تابشی، حرارت تابشی و مسایل تبدیلی.

تعریف ۱۰.۱.۱. تابع f را در نقطه $z_\circ$ تحلیلی می‌نامیم هرگاه یکی از همسایگی‌های $z_\circ$ یافت شود که f در تمام نقاط آن مشتق پذیر باشد. تابع f را تام می‌نامیم اگر در تمام نقاط صفحه مختلط تحلیلی باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. هسته $k(t,s)$ جدایی پذیر[۱] نامیده می‌شود هرگاه بتوان آن را به صورت زیر نمایش داد :

$$k(t,s)=\sum_{i=1}^{n} a_i(t)b_i(s) \qquad (۲۳.۱)$$

تعریف ۱۲.۱.۱. تابع f دارای پیوستگی هلدر با توان p، $0<p\leq 1$ می‌باشد، اگر $c>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم :

$$\mid f(x)-f(y)\mid < c\mid x-y\mid^p$$

اگر در تعریف فوق قرار دهیم $p=1$ در این صورت f دارای پیوستگی لیپ شیتس [۲] می‌باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم $D(a,r)$ نشان دهنده یک دیسک باز به مرکز $a\in\mathbb{C}$ و شعاع $r>0$ به صورت :

$$D(a,r)=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z-a|<r\} \qquad (۲۴.۱)$$

[۱] Seperable Kernel

[۲] R.Lipschits

با شد. فرض کنیم S زیر مجموعه از $\mathbb{C}$ باشد، a را نقطه درونی از S می‌نامیم اگر وجود داشته باشد $a \in D(a,r)$ بطوریکه $D(a,r)$ متعلق به S باشد و نقطه a را نقطه حدی S می‌نامیم اگر دیسک $D(a,r)$ شامل نقطه‌ای مانند $b \in S$ غیر از a باشد، مرز S را با ∂D نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۴.۱.۱. (*بولزانو- وایرشتراس*[۱]) *هر مرز نامتناهی زیر مجموعه S از $\mathbb{C}$ حداقل دارای یک نقطه حدی است.*

تعریف ۱۵.۱.۱. (تعریفی از یک دامنه k -همبند) فرض کنیم k یک ثابت مثبت باشد، و برای $m = ۱,۲,۳,\cdots$، دنباله‌ای به شکل زیر را تعریف می‌کنیم :

$$\{L_{mj}\}_{j=۱}^{\infty} = \{Z_{mj}(t); ۰ \leq t \leq\}_{j=۱}^{\infty}$$

که دارای خواص زیر می‌باشد :

۱-اگر $L_{mj} = \partial D_{mj}$ باشد، B_{mj} کران بازی در مجموعه، $\mathbb{C}$ و L_{mj} به طور مثبت نسبت به B_{mj} معین می‌شوند.

۲- ناحیه‌ی B_{mj} برای هر m ثابت، محصور خواهد شد. برای نمونه $B_{mj} \subset B_{mj+۱}$ که $j = ۱,۲,\ldots$ می‌باشد ولی L_{mj} و $L_{mj+۱}$ هیچ نقاط مشترکی ندارند.

۳-ناحیه k با ناحیه‌ی B_{mj} برای هر ثابت $m = ۱,۲,\ldots,k$ هیچ نقطه مشترکی ندارد.

۴-فرض کنیم نواحی D و D_j به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$D_j = \bigcup_{m=۱}^{k} B_{mj} \qquad \rightarrow \qquad D = \lim_{j\to\infty} D_j \tag{۲۵.۱}$$

نواحی D_j و D که در این حالت معین می‌شوند، دنباله k -همبند نامیده می‌شوند.
برای مثال اگر $a \in D$ و برای $r > ۰$ ، $D(a;r)$ یک دامنه به طور ساده همبند است.
برای بعضی اعداد صحیح مثبت متناهی k، اگر $k = ۱$ آنگاه D را به طور ساده همبند می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. $H(D)$ خانواده‌ای از توابع، که در D تحلیلی‌اند.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنیم D یک دامنه k -همبند باشد و همچنین $\mathbf{D}(D)$ نشان دهنده خانواده‌ای از تمام دنباله‌های D_j که در تعریف (۱۵.۱.۱) مشخص شده است. فرض کنیم که به جز در یک مجموعه‌ای قابل شمارش از نقاط مجزا در $\mathbf{D}$، $f \in H(D)$ باشد که f' در آن موجود نمی‌باشد.
فرض کنیم P عدد ثابتی در بازه $۰ \leq P \leq \infty$ باشد، و $D_P(f;D)$ نشان دهنده مجموعه‌ای از همه دنباله‌های $D_j \in \mathbf{D}_D$ باشد اگر $D_j \in D_P(f;D)$ در این صورت $N_P(f;D) < \infty$ و

[۱] Bolzano - Weiestrass

داریم :

$$N_P(f;D) = \lim_{j\to\infty}(\int_{\partial D}|f(z)|^p|dz|)^{\frac{1}{P}}$$
$$\equiv \inf_{D_j\in\mathbf{D}_p(f;D)_{j\to\infty}} \sup(\int_{\partial D}|f(z)|^p|dz|)^{\frac{1}{P}}$$

برای $P=\infty$ داریم :

$$N_\infty(f;D) = \lim_{j\to\infty}\sup|f(z)|_{z\in\partial D_j}$$
$$\equiv \inf_{D_j\in D_\infty(f;D)_{j\to\infty}} \sup|f(z)|_{z\in\partial D_j} \tag{۲۶.۱}$$

برای هر f داریم $N_P(f;D)<\infty$ و تعریف $\int_{\partial D} f(z)dz$ را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \lim_{j\to\infty}\int_{\partial D_j} f(z)dz \tag{۲۷.۱}$$

قضیه ۱۸.۱.۱. *اگر D یک دامنه k ـ همبند و اگر $f\in H^p(D)$ برای $P\in[۱,\infty]$ آنگاه :*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = ۰$$

فصل ۲

تعریف و خواص تابع سینک

۱.۲ تابع سینک و خواص آن

تابع سینک[۱] در اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\operatorname{sinc}(x)=\begin{cases}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & , \quad x\neq 0\\ 1 & , \quad x=0\end{cases} \tag{۱.۲}$$

و برای هر $h>0$ تابع سینک با نقاط متساوی الفاصله را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$S(j,h)(x)=\operatorname{sinc}(\frac{x-jh}{h}) \tag{۲.۲}$$

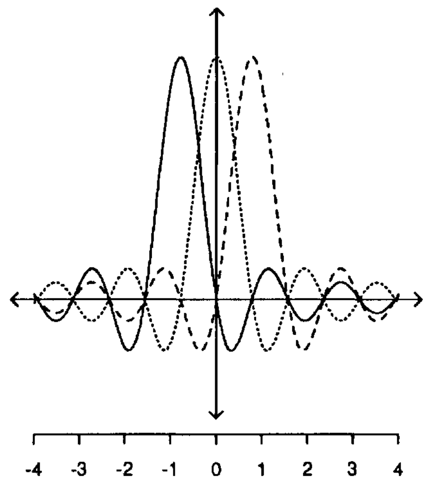
که تابع سینک $S(j,h)$ نامیده می‌شود. برای نقاط متساوی الفاصله $x_k=kh$ داریم :

$$S(j,h)(kh)=\delta_{jk}=\begin{cases}1 & , \quad k=j\\ 0 & , \quad k\neq j\end{cases} \tag{۳.۲}$$

با توجه به تعریف تابع سینک داریم :

$$\operatorname{sinc}(\frac{x-jh}{h})=\begin{cases}\frac{\sin(\pi(\frac{x-jh}{h}))}{\pi(\frac{x-jh}{h})} & , \quad x\neq jh\\ 1 & , \quad x=jh\end{cases} \tag{۴.۲}$$

[۱] Sinc



شکل ۱.۲: نمودار تابع سینک به ازای j های مختلف

آنگاه خواص زیر را داریم :

-۱

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(x)dx = \pi \tag{۵.۲}$$

-۲

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{sinc}(x)) = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x} \tag{۶.۲}$$

-۳

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(x)dx = ۱ \tag{۷.۲}$$

-۴

$$\sum_{k=۰}^{\infty} \mathrm{sinc}(x) = ۱ \tag{۸.۲}$$

با توجه به تعریف تابع بسل مشخص می‌شود که تابع سینک ارتباط نزدیکی با تابع بسل $J_۰(x)$ دارد :

$$J_n(x) = ۲^n x^n \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^k (k+n)!}{k!(۲k+۲n+۱)} x^{۲k} = x^n \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{k!(۲k+۲n+۱)} (\frac{x^۲}{۲})^k$$

$$J_۰(x) = \frac{\sin(x)}{x} \Longrightarrow \mathrm{sinc}(x) = J_۰(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{۹.۲}$$

در این صورت انتگرال مختلط تابع سینک برای $x \neq ۰$ به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\begin{aligned}\operatorname{sinc}(nx) \equiv \frac{\sin(nx)}{nx} &= \frac{۱}{nx} \times \frac{e^{inx} - e^{inx}}{۲i} \\ &= \frac{۱}{۲inx} e^{inx} \mid_{-n}^{n} = \frac{۱}{۲n} \int_{-n}^{n} e^{inx} dt\end{aligned}$$

و انتگرال مختلط تابع سینک برای $x = ۰$، برابر $\operatorname{sinc}(nx) = ۱$ می‌باشد.

همچنین تابع سینک دارای خواص زیر نیز می‌باشد :

۱ - $\operatorname{sinc}(x) \in L^{۲}(\mathbb{R})$

۲ - $\operatorname{sinc}(x) \notin L^{۱}(\mathbb{R})$

۳ - $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(j, h) dx = h$

اثبات. ۱

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \mid \operatorname{sinc}(x) \mid^{۲} dx = ۲ \int_{۰}^{\infty} \mid \operatorname{sinc}(x) \mid^{۲} dx \\ &= ۲ \int_{۰}^{۱} \operatorname{sinc}^{۲}(x) dx + ۲ \int_{۱}^{+\infty} \operatorname{sinc}^{۲}(x) dx \\ &\leq ۲ \int_{۰}^{۱} dx + ۲ \int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{(\pi x)^{۲}} dx = ۲(۱ + \frac{۱}{e^{۲}}) < \infty\end{aligned}$$

$\square$

اثبات. ۲

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid \operatorname{sinc}(x) \mid dx = ۲ \int_{۰}^{\infty} \mid \operatorname{sinc}(x) \mid dx$$

$$\geq ۲ \sum_{k=۱}^{+\infty} \frac{۱}{۲} \mid \operatorname{sinc}(\frac{(۲k-۱)}{۲}) \mid = ۲ \sum_{k=۱}^{+\infty} \frac{۱}{(۲k-۱)} = \infty$$

$\square$

نرمال شده تابع سینک دارای یک نمایش ساده به صورت ضرب نامتناهی است که به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=۱}^{\infty} (۱ - \frac{x^{۲}}{n^{۲}}) \tag{۱۰.۲}$$

که بوسیله رابطه زیر با تابع $\Gamma(x)$ ارتباط دارد :

$$\Gamma(۱-x)\Gamma(۱-x) = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} = \frac{۱}{\operatorname{sinc}(x)} \tag{۱۱.۲}$$

رابطه فوق فرمول بازتاب اویلر[۱] نامیده می‌شود. اویلر از رابطه زیر فرمول (۱۱.۲) را کشف کرد.

$$\frac{\sin(x)}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \tag{۱۲.۲}$$

۱.۱.۲ خاصیت تعامد تابع سینک

مجموعه توابع $\{\frac{S(k,h)}{\sqrt{h}}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ تشکیل یک مجموعه متعامد یکه در $\mathbb{R}$ می‌دهند یعنی برای هر k,j داریم:

$$\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} S(k,h)(x)S(j,h)(x)=\delta_{kj} \tag{۱۳.۲}$$

δ_{kj} همان دلتای کرونکر[۲] می‌باشد که این متعامد یکه بودن دنباله را نشان می‌دهد.

تعریف ۱.۱.۲. تبدیل فوریه F از تابع f را به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}f(t)dt \tag{۱۴.۲}$$

در این صورت معکوس آن به صورت زیر است :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} F(x)e^{ixt}dx \tag{۱۵.۲}$$

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنیم $h>0$ ثابت مثبتی باشد، مجموعه‌ی $\mathbf{W}(\frac{\pi}{h})$ خانواده‌ای از تمامی توابع تحلیلی f می‌باشد که در مجموعه‌ای اعداد حقیقی $f\in L^2(\mathbb{R})$ و در فضای مختلط تابع f به صورت نمایی از $\frac{\pi}{h}$ می‌باشد. به عنوان نمونه، برای $k>0$ داریم :

$$\forall t\in\mathbb{C}\,; \qquad |f(t)|\le ke^{\frac{\pi|t|}{h}}$$

قضیه ۳.۱.۲ (پارسوال[۳]). *اگر* $1<P<\infty$ *و* $q=\frac{P}{P-1}$ *و* $f\in L^P(\mathbb{R})$ *و* $g\in L^q(\mathbb{R})$ *و همچنین* F *و* G *نشان دهنده تبدیلات فوریه از* f *و* g *باشند در این صورت :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(x)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} F(x)\overline{G(x)}dx. \tag{۱۶.۲}$$

و اگر $F(x)$ *در بازه* $L^2(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})$ *باشد داریم :*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} F(x)e^{ixt}dx$$

که انتگرال فوق در نامساوی زیر صدق می‌کند :

$$|f(t)|\le f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} F(x)e^{ixt}dx\le Ke^{\frac{\pi|t|}{h}} \tag{۱۷.۲}$$

[۱] L.Euler
[۲] L.Kronecker
[۳] M.Parseval