دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

عنوان:

طرح اساساً غیر نوسانی وزن‌دار باتعدیل شبکه ایستا برای پیمودن شیب‌های در حال حرکت

استاد راهنما:
دکتر مریم عرب عامری

تحقیق و نگارش:
مهدیه دهقانی دشتابی

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه ساختار، تحلیل و کاربرد طرح اساساً غیر نوسانی وزن‌دار ($WENO$ [1]) را برای قوانین بقای هذلولوی یک بعدی شرح می‌دهیم. طرح $WENO$ طرح تفاضل متناهی با مرتبه دقت بالایی است که برای مسائلی با جواب‌های قطعه‌ای هموار دارای ناپیوستگی و یا مسائلی دارای نواحی با شیب تند طراحی شده است.

همچنین در این کار، نتایج را با استفاده از یک روش جدید که مبتنی بر ترکیب طرح $WENO$ با یک روش شبکه متحرک ایستا است، بر روی معادله وزش افقی خطی و معادله برگر چسبناک تحقیق می‌کنیم که نتایج عددی موید کیفیت دقت روش مذکور است.

واژگان کلیدی: اساساً غیر نوسانی وزن‌دار ($WENO$)، تعدیل شبکه ایستا، شبکه یکنواخت.

---

[1] Weighted Essentially Non-Oscillatory

پیشگفتار

راه حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE [1]) سهموی یا هذلولوی به دلیل وجود شیب‌های محلی زیاد در جواب بسیار چالش بر انگیز است. چنانچه از یک شبکه یکنواخت و ثابت استفاده شود، شبکه بایستی به اندازه کافی قادر باشد برای دنبال کردن بخش‌های شیب دار مرتبط با این شیب‌های بزرگ تظریف شود. با این وجود، توزیع گره‌های شبکه بر روی محدوده گسسته‌سازی ناکافی به نظر می‌رسد، زیرا در سطوح هموار گره‌های کمتری مورد نیاز است و تنها در مجاورت بخش‌های شیب دار است که نیاز داریم شبکه متراکم باشد. این امر، نیاز به استفاده از یک شبکه غیر یکنواخت و بکارگیری مداوم آن برای دنبال کردن بخش‌های شیب‌دار ایجاد شده در جواب را برمی‌انگیزد.

راه کارها و فنون تعدیل شبکه را می‌توان در دو گروه دسته‌بندی کرد: تعدیل شبکه بصورت ایستا و تعدیل شبکه بصورت پویا [۹، ۱۰ و ۱۳]. روش‌های تعدیل شبکه ایستا را می‌توان در دو گروه شبکه متحرک و تظریف موضعی شبکه دسته‌بندی کرد. در رویکرد شبکه متحرک، تعداد سلول‌های شبکه ثابت نگاه داشته می‌شوند اما در رویکرد تظریف موضعی، بر اساس همواری جواب سلول‌های شبکه حذف یا اضافه می‌شوند. حذف و اضافه شدن سلول‌های شبکه در حین شبیه‌سازی، بکارگیری این روش را در خصوص حل کننده معادلات دیفرانسیل جبری (DAE [2]) دشوار می‌سازد، زیرا تعداد متغیرها پس از هر بار تعدیل شبکه تغییر می‌کند، هنگام استفاده از شبکه متحرک ایستا با چنین مشکلاتی مواجه نمی‌شویم.

تعدیل شبکه باید با یک روش مناسب برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ترکیب شود [٦، ۹، ۱۱ و ۱۴]. سئوسز[3] و همکارانش در مطالعتشان دریافتند، استفاده از روش مرتبه بالاتر کاهش چشمگیر نقاط شبکه را ممکن می‌سازد و در نتیجه بار محاسباتی کاهش پیدا می‌کند[۱۰].

طرح اساساً غیر نوسانی وزن‌دار ($WENO$) که توسط لیو[4] و همکارانش [۷] ارائه شد، اخیراً به عنوان یک جایگزین محتمل و امید بخش برای استفاده از قوانین بقای هذلولوی در شبکه‌های غیر یکنواخت ظاهر شده

[1] Partial Differential Equation
[2] Differential Algebra Equation
[3] Sauces
[4] Liu

است [۱۲].

ترکیب طرح $WENO$ با تعدیل شبکه، طرحی با دقت و تفکیک پذیری بالا حاصل می‌سازد. هدف از این پایان‌نامه توصیف و تشریح چگونگی بکارگیری روش $WENO$ در خصوص شبکه‌های غیر یکنواخت است، که از تعداد ثابتی گره تشکیل شده و در نقاط زمانی مجزا حرکت می‌کنند. برای این منظور در فصل اول معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی معرفی می‌شوند. روش حرکت شبکه، در فصل دوم توضیح داده می‌شود. فصل سوم ساختار، تحلیل و کابرد طرح $WENO$ راشرح می دهد. نهایتا به منظور روشن نمودن مزایایی که از این روش حاصل می‌شود کیفیت نتایج بدست آمده از بکارگیری این رویکرد جدید، با پیاده سازی آن بر روی دو مسئله محک که جواب تحلیلی برای آنها وجود دارد، در فصل چهارم مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

فهرست مندرجات

فهرست نمودارها

نمودارها

فهرست جدول ها

جدول ها

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱ـ۱ مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را می‌توان به وسیله معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی کرد. اگر تابع دو متغیر مستقل یا بیشتر داشته باشد، معادلهٔ دیفرانسیل آن پدیده، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خواهد بود. در این فصل، ابتدا مختصری پیرامون معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و دسته‌بندی این معادلات می‌پردازیم، سپس تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای فصل‌های بعد بیان می‌شود.

۱ـ۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادله‌ای شامل متغیر وابسته و متغیرهای مستقل و مشتقات جزئی متغیر وابسته نسبت به یک یا چند متغیر مستقل است. فرم کلی بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم بصورت زیر است:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=0 \qquad (۱ـ۱)$$

که در آن a و b و c و d و e و f و g مقادیر ثابت یا توابعی از متغیرهای مستقل x و y و متغیر وابسته u می‌باشند.

در معادله فوق اگر a و b و ... و g اعداد ثابت یا توابعی فقط از x و y باشند، معادله خطی است. اگر ضرایب مذکور توابعی فقط از x و y و u باشند معادله نیمه خطی، ولی اگر توابعی از $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ باشند غیر خطی گفته می‌شود.

در معادله(۱ـ۱) اگر $g(x,y)$ به ازای هر x و y متحد صفر باشد معادله را همگن در غیر این صورت غیر همگن می‌نامند.

بالاترین مرتبه مشتق جزئی موجود در یک معادله، مرتبه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نامیده می‌شود.

معادله (۱ ـ ۱) را بر حسب علامت b^2-4ac به سه دسته تقسیم می‌کنند:

سهموی: معادلات سهموی روندهای شارش گرما و پخش را توصیف و در خاصیت $b^{۲} - ۴ac = ۰$ صدق می‌کنند.

هذلولوی: معادلات هذلولوی دستگاه‌های مرتعش و حرکت موج را توصیف و در خاصیت $b^{۲} - ۴ac > ۰$ صدق می‌کنند.

بیضوی: معادلات بیضوی پدیده‌های حالت پایدار را توصیف و در خاصیت $b^{۲} - ۴ac < ۰$ صدق می‌نمایند.

برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و پدیده فیزیکی آن‌ها چنین است:

۱ – **معادله گرما:** تابع u، دمای نقطه‌ای با مختصات (x, y, z) را در زمان t بیان می‌کند، آرایش معادله گرما چنین است:

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial z^{۲}} - \frac{\partial u}{\partial t} = ۰$$

۲– **معادله‌موج:** از سه متغیر مکان (x, y, z) و متغیر زمان t، آرایش آن پدید می آید:

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} + \frac{\partial u^{۲}}{\partial z^{۲}} = \frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}}$$

تابع u نشان دهنده جابجایی فضایی (x, y, z) ذره، در زمان t است. این معادله به همراه شرایط مرزی مناسب، ارتعاشات جسم سه بعدی را بیان می‌کند.

۳– **معادله لاپلاس:**

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} + \frac{\partial u^{۲}}{\partial z^{۲}} = ۰$$

تابع u نشان دهنده توزیع ماندگار دما یا توزیع ماندگار بار الکتریکی در جسم است. همچنین این معادله، پتانسیل‌های گرانش الکتریکی و مغناطیسی و پتانسیل سرعت در سیالات تراکم ناپذیر بدون جریان‌های گردشی را بیان می‌کند.

۱ــ۳ روش‌های گسسته‌سازی و معادلات تفاضلی

مشتقات جزئی را می‌توان به وسیله تفاضل‌های محدود به طرق مختلف تقریب کرد. کلیهٔ این روش‌ها دارای خطای برشی معروفند که با علامت O نمایش داده می‌شود. اگر تابع U و مشتقات آن به صورت توابعی پیوسته از x باشند در این صورت به کمک بسط تیلور می‌توان $U(x+h)$ و $U(x-h)$ را حول x به دست آورد.
به معادلاتی که از بسط تیلور بدست می‌آیند معادلات تفاضلی گفته می‌شود به عنوان مثال

$$U(x+h) = U(x) + hU'(x) + \frac{۱}{۲}h^{۲}U''(x) + \frac{۱}{٦}U'''(x) + O(h^{۴}) \qquad (۱ــ۲)$$

$$U(x-h) = U(x) - hU'(x) + \frac{۱}{۲}h^{۲}U''(x) - \frac{۱}{٦}U'''(x) + O(h^{۴}) \qquad (۱ــ۳)$$

از روابط (۱ – ۲) و (۱ – ۳) می‌توان معادله زیر را بدست آورد

$$U'(x) = \frac{۱}{h}\left(U(x+h) - U(x)\right) + O(h) \qquad (۱ــ۴)$$

که به معادله تفاضلی پیشرو معروف است. همچنین می‌توان معادله

$$U'(x) = \frac{۱}{h}\left(U(x) - U(x-h)\right) + O(h) \qquad (۱ــ۵)$$

را بدست آورد که به روش تفاضلی پسرو معروف است. معادلات (۱ – ۴) و (۱ – ۵) نشان می‌دهند که خطای برشی تقریب‌های پیشرو و پسرو از مرتبه h می‌باشند.
همچنین از کم کردن روابط (۱ – ۲) و (۱ – ۳) و صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه بالاتر روابط زیر به دست می‌آید.

$$U(x+h) - U(x-h) = ۲hU'(x) + O(h^{۳})$$

$$U'(x) = \frac{۱}{۲h}\left(U(x+h) - U(x-h)\right) + O(h^{۲}) \qquad (۱ــ٦)$$

معادله (۱ – ٦) به معادله تفاضل مرکزی معروف است.
از جمع روابط (۱ – ۲) و (۱ – ۳) و صرف‌نظر از جملات مرتبه بالاتر، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$U(x+h) + U(x-h) = ۲U(x) + h^{۲}U''(x) + O(h^{۴}) \qquad (۱ــ۷)$$

که در آن $O(h^4)$ بیانگر مرتبه خطای برشی است به گونه‌ای که جملات باقی مانده شامل توان‌های چهارم و بیشتر می‌باشد.

$$U''(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{h^2}\left(U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)\right) + O(h^2)$$

معادله فوق یک معادله تفاضلی برای تقریب $U''(x)$ است.

۱–۴ معادلات هذلولوی

این گونه معادلات معمولاً برای بیان و توصیف یک بعدی موج به عنوان مثال حرکت تار مرتعش مورد استفاده قرارمی‌گیرند. معادله موج با معادله دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,y) - \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) = 0 \qquad 0 < x < L \ , \ t > 0$$

تحت شرایط

$$U(0,t) = U(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$U(x,0) = f(x) = 0, \quad 0 \le x \le L$$

بیان می‌گردد.

با کمک روش تفاضلات متناهی و با روش خارج قسمت تفاضلات مرکزی برای مشتقات جزئی مرتبه دوم می‌توان معادله زیر را داشت:

$$\frac{U(x_i,t_{j+1}) - 2U(x_i,t_j) + U(x_i,t_{j-1})}{k^2} - \alpha^2 \frac{U(x_{i+1},t_j) - 2U(x_i,t_j) + U(x_{i-1},t_j)}{h^2} = 0$$

۱–۴–۱ روش مشخصه‌ها

در مسائل کاربردی، به‌خصوص در زمینه مکانیک، معادلات دیفرانسیل جزئی هذلولوی غالباً داده‌های اولیه پیوسته ندارند در چنین مسائلی از روش‌های تفاضلی استفاده نمی‌شود زیرا این روش‌ها به هموار کردن ناپیوستگی‌ها تمایل دارند. روشی که این ناپیوستگی‌ها را به حساب می‌آورد روش مشخصه‌ها نامیده می‌شود. مطلب اساسی در استفاده از مشخصه‌ها این است که با انتخاب مناسب محورهای مختصات می‌توان معادلات هذلولوی اصلی را با دستگاهی که محورهای مختصاتش، مشخصه‌ها باشند، عوض کرد. برای بررسی روش مشخصه‌ها معادله دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+e=0 \qquad (۱–۸)$$

که‌درآن a ,b ,c وd توابعی از متغیرهای مستقل x، y و متغیر وابسته u می‌باشند. شرایط اولیه یعنی مقادیر اولیهu ,$\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ بر یک منحنی C_i در نظر گرفته می‌شود. برای راحتی از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=q,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=s,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=t,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=v$$

در این صورت معادله (۱ – ۸) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$ar+bs+ct+e=0 \qquad (۱–۹)$$

و از طرفی داریم

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=pdx+qdy$$

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy=rdx+sdy\rightarrow r=\frac{dp-sdy}{dx} \qquad (۱–۱۰)$$

$$dq=\frac{\partial q}{\partial x}dx+\frac{\partial q}{\partial y}dy=sdx+tdy\rightarrow t=\frac{dq-sdx}{dy} \qquad (۱–۱۱)$$

با جایگذاری روابط (۱ − ۱۰) و (۱ − ۱۱) در ربطه (۱ − ۹) خواهیم داشت:

$$a(\frac{dp-sdy}{dx})+bs+c(\frac{dq-sdx}{dy})+e=0\rightarrow$$

$$[s(b-a\frac{dy}{dx}-c\frac{dx}{dy})+a\frac{dp}{dx}+c\frac{dq}{dy}+e=0]\times(\frac{dy}{dx})\rightarrow$$

$$s(b\frac{dy}{dx}-a\frac{dy}{dx}-c)+a\frac{dp}{dx}\frac{dy}{dx}+c\frac{dq}{dx}+e\frac{dy}{dx}=0 \qquad (۱۲-۱)$$

معدله (۱—۱۲) مستقل از r و t می‌باشد، برای اینکه معادله فوق مستقل از s گردد $\frac{dy}{dx}$ را چنان انتخاب می کنیم که ریشه معادله زیر باشد:

$$a(\frac{dy}{dx})^2-b(\frac{dy}{dx})+c=0 \qquad (۱۳-۱)$$

در این صورت با توجه به (۱—۱۲) و (۱—۱۳) داریم:

$$a\frac{dp}{dx}\frac{dy}{dx}+c\frac{dq}{dx}+e\frac{dy}{dx}=0 \qquad (۱۴-۱)$$

معادله (۱—۱۳) درجه ۲ است، با تشکیل b^2-4ac داریم:

۱— $\Delta>0$ معادله هذلولوی است.

۲— $\Delta=0$ معادله سهموی است.

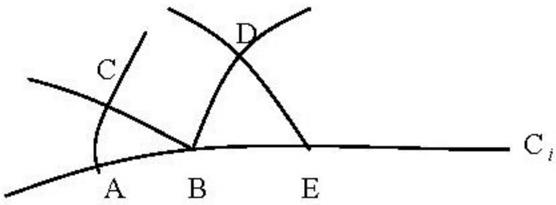
۳— $\Delta<0$ معادله بیضوی است.

برای حالت $\Delta>0$ معادله (۱—۱۳) دارای دو ریشه است،

$$\frac{dy}{dx}=f(x)=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\frac{dy}{dx}=g(x)=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

که این ریشه‌ها شیب منحنی مشخصه را در نقطه (x,y) مشخص می‌کنند و امتدادهای مشخصه نامیده می‌شوند.

فرض کنید PDE از نوع هذلولوی و منحنی اولیه C_i یک منحنی غیر مشخصه باشد که در طول آن مقادیر اولیه u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ معلوم باشند. فرض کنید A و B دو نقطه نزدیک بر روی منحنی C_i باشد چون PDE هذلولوی است، مشخصه‌های $f(x)$ و $g(x)$ متقاطعند. فرض کنید مشخصه $f(x)$ که از A می‌گذرد مشخصه $g(x)$ را که از B می‌گذرد در C قطع کند مطابق شکل (۱—۵—۱)



شکل (۱—۵—۱): منحنی‌های مشخصه.

چون A و B نقاط نزدیک به هم هستند اگر $f(A)$ و $g(B)$ به طور تقریبی، ضریب زاویه خط‌های AC وBC در نظر گرفته شوند آنگاه می‌توان تقریب‌های زیر را در نظر گرفت :

$$f(A) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \qquad , \qquad g(B) = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \tag{۱۵—۱}$$

که در آن x_C وy_C مجهول می‌باشند.

حال با توجه به رابطه (۱—۱۴) خواهیم داشت:

$$a\ f(A)\ dp + c\ dq + e\ dy = 0$$

$$a\ g(B)\ dp + c\ dq + e\ dy = 0$$

معادلات فوق در طول AC وBC، به کمک تقریبات زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$a_A\ f(A)(p_C - p_A) + c_A(q_C - q_A) + e_A(y_C - y_A) = 0 \tag{۱۶—۱}$$

$$a_B\ g(B)(p_C - p_B) + c_B(q_C - q_B) + e_B(y_C - y_B) = 0 \tag{۱۷—۱}$$

حال به کمک روابط (۱—۱۵)، (۱—۱۶) و (۱—۱۷) مجهولات x_C ،y_C ،p_C و q_A را به دست آورده و می‌توان مقدار u را در نقطه C از رابطه زیر بدست آورد:

$$u_C - u_A = \frac{p_C - p_A}{۲}(x_C - x_A) + \frac{q_C - q_A}{۲}(y_C - y_A)$$

همین طور می‌توان مقدار u_D را بدست آورد. با ادامه این کار، p و q ها را در نقاط دیگر بدست می آوریم.

۱—۵ قوانین بقا

قوانین بقا یک دسته بسیار مهم از معادلات مشتقات جزئی PDE هستند. همان طور که از نام آن‌ها پیداست این دسته از معادلات، قوانین بقای فیزیکی از قبیل جرم، تکانه حرکت و انرژی را مدل سازی می‌کنند. شکل کلی این مسائل به این صورت است :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}F(V) = ۰ \qquad (۱—۱۸)$$

به‌طوریکه V یک $k-$ بردار و F یک تابع ازR^k به توی R^k است. معادله (۱—۱۸) فرم بقایی قانون بقا نامیده می‌شود. این فرم قانون بقا، کلی و رایج است اما اگر از معادله فوق نسبت به x از a تا b و نسبت به t از $t_۱$ تا $t_۲$ انتگرال بگیریم داریم:

$$\int_a^b \int_{t_۱}^{t_۲} \frac{\partial V}{\partial t}\, dtdx + \int_a^b \int_{t_۱}^{t_۲} \frac{\partial}{\partial x}F(V)\, dtdx = ۰$$

حال اگر انتگرال‌گیری را با جمله اول نسبت به t و جمله دوم نسبت به x اعمال نماییم خواهیم داشت :

$$\int_a^b V(x,t_۲)\, dx - \int_a^b V(x,t_۱)\, dx = \int_{t_۱}^{t_۲} F(V(b,t))\, dt - \int_{t_۱}^{t_۲} F(V(a,t))\, dt \qquad (۱—۱۹)$$

معادله (۱—۱۹) فرم انتگرالی قانون بقا نامیده می‌شود. تعبیر فیزیکی معادله (۱—۱۹) این است که تغییر کمیت مورد نظر در بازه $[a,b]$ و در فاصله زمانی $t_۱$ و $t_۲$ بخاطر شار آن کمیت در طول مرزهای $x=a$ و $x=b$ در طول زمان $t_۱$ تا $t_۲$ است.

۱—۵—۱ تئوری قوانین بقای اسکالر

فرم اسکالری قانون بقا به صورت زیر است:

$$v_t + \frac{\partial}{\partial x}F(v) = ۰$$

که در آن v اسکالر است.

مثال زیر نمونه معروفی از قانون بقای اسکالر است.

مثال ۱—۵—۱: معادله برگر:[۱]

$$v_t + (\frac{۱}{۲}v^۲)_x = ۰ \quad , \quad x \in (۰,۱) \quad , \quad t > ۰$$

$$v(۰,t) = v(۱,t) = ۰ \quad , \quad t > ۰$$

$$v(x,۰) = \sin(۲\pi x) \quad , \quad x \in [۰,۱]$$

۱—۵—۲ شکل گیری شوک

همان طور که قبلاً گفته شد، روش‌های شبکه متحرک برای مسائلی که دارای تغییرات بزرگ و یا شوک‌های ناگهانی هستند بکار می‌روند. قوانین بقا از این دسته مسائل هستند و برای شناخت بیشتر این مسائل لازم است به معرفی شوک‌ها و چگونگی رخ‌داد شوک‌ه بپردازیم. بدین منظور نیازمند به فرم غیر بقایی قانون بقا هستیم که بصورت زیر بدست می آید:

---
[۱] Burger