





بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

آقای حمیدرضا زارعی فردجهومی به شماره دانشجویی ۸۷۵۷۰۲۰۰۲ رساله واحدی خود را با عنوان: «مدل‌بندی و تحلیل داده‌های فضایی ناگوسی براساس آمیختن مقیاسی از یک میدان تصادفی چوله گاوسی بسته» در تاریخ ۹۱/۱۲/۱۹ ارائه کردند.

اعضای هیأت داوران نسخه نهایی این رساله را از نظر فرم و محتوا تأیید کرده است و پذیرش آن را برای تکمیل درجه دکتری پیشنهاد می‌کند.

امضاء	رتبه علمی	نام و نام خانوادگی	اعضای هیأت داوران
	استادیار	آقای دکتر مجید جعفری خالدي	۱- استاد راهنما
	استاد	آقای دکتر محمدقاسم وحیدی اصل	۲- استاد مشاور
	استاد	آقای دکتر محسن محمدزاده	۳- استاد ناظر داخلی
	استادیار	آقای دکتر موسی گل‌علی‌زاده	۴- استاد ناظر داخلی
	استاد	آقای دکتر حمید پزشکی	۵- استاد ناظر خارجی
	استاد	آقای دکتر مجتبی گنجعلی	۶- استاد ناظر خارجی
	استادیار	آقای دکتر موسی گل‌علی‌زاده	۷- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی

آیین نامه چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله) های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله) ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته **آمار** سال **۱۳۹۱** در دانشکده **علم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی **سرکار خانم/جناب آقای دکتر مجید حیدر خالقی**، مشاور سرکار خانم/جناب آقای دکتر **محمدتاسم و حیدری اصل** و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر _____ از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **حیدر نازاری فرد** دانشجوی رشته **آمار** مقطع **دکتری** تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.



نام و نام خانوادگی:

حیدر نازاری فرد

تاریخ و امضا:

۹۲، ۲، ۵

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان‌نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه های مصوب انجام شود.

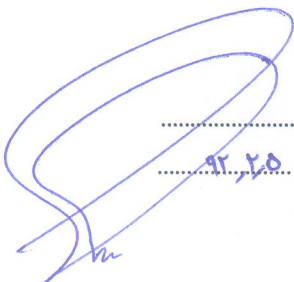
ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

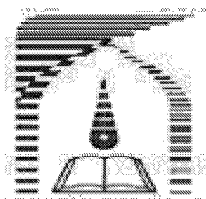
ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب.....^{۱۳۸۷}.....^{آمار} دانشجوی رشته.....^{محمد رضا عساکر}.....^{دکترا} متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته‌های علمی مستخرج از پایان‌نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین‌نامه فوق‌الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می‌دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:.....

تاریخ: ۹۲.۲.۵.....





دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

رساله دوره دکتری آمار

مدلبندی و تحلیل داده‌های فضایی ناگوسی بر اساس آمیختن مقیاسی از یک میدان تصادفی چوله گاوسی بسته

توسط

حمیدرضا زارعی فرد جهرمی

استاد راهنما

دکتر مجید جعفری خالدی

استاد مشاور

دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

اسفند ۱۳۹۱

تقدیم

به او که خواهد آمد، به رنگ عدالت و به روشنایی خورشید

و به پر بهاترین کنج های کیتی

پدر و مادر مهربانم

قدردانی

«و کویند سپاس خدای را که ما را بدین راه رسانید و اگر خدا را سپاس نگویم هرگز راه نمی یابیم» (اعراف، ۴۳)

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پر تو الطاف بی شمارش بر خطه نخله زندگی ام آشکار است. حمد و شنامی گزارم اورا که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره گیری از خون کستوده دانش استیدم را نصیب و روزی ام کردانید.

اتنان و سپاس می گزارم زحمات و راهنمایی های ظریف، ارزشمند و بی شائبه استاد فرزانه و گرانمایه ام، جناب آقای دکتر مجید جعفری خالیدی که باحمیت و جدیت، مراب دقت، اندیشه، درک و تعمق و امی داشتند. همچنین از جناب آقای دکتر محمد قاسم و حمیدی اصل که به عنوان استاد مشاور بهوار از ر، نمودهای ایشان بهره بردم کمال تشکر را دارم. از اساتید محترم جناب آقای دکتر محمد زاده و جناب آقای دکتر گل علیزاده که افتخار شاگردی ایشان را داشتم و جناب آقای دکتر پزشکی و جناب آقای دکتر کجلی که زحمت داوری رساله را بر عهده داشتند سپاسگزاری می نمایم و امیدوارم بهواره در پناه الطاف الهی محفوظ و موفق باشند.

از خانواده ام که همیشه همدل و راهنمای من در تمامی مراحل زندگی بوده اند و از تمامی دوستانی که در این مرحله از زندگی مراب هر شکل ممکن یاری نموده اند، صمیمانه تشکر می نمایم.

تو خوشنود باشی و ما را ستکار

خدا یا چنان کن سر انجام کار

حمید رضا زارعی فرد بهرمی

تهران - اسفند ۱۳۹۱

مدلبندی و تحلیل داده‌های فضایی ناگوسی بر اساس آمیختن مقیاسی از یک

میدان تصادفی چوله‌گوسی بسته

چکیده

در رگرسیون کلاسیک و فضایی معمولاً فرض می‌شود که داده‌های تحت بررسی نرمال هستند. اما در عمل با موارد متعددی مواجه می‌شویم که در توزیع داده‌ها شواهدی از وجود چولگی یا سنگینی دم‌ها مشاهده می‌شود. در اینگونه مسائل، خانواده‌ی توزیع‌های آمیخته مقیاسی از چوله‌نرمال روش مناسبی برای مدل‌بندی داده‌ها فراهم می‌سازد.

در این رساله با هدف ارائه‌ی مدل‌های جدید و انعطاف‌پذیر که با مشکلات مدل‌های موجود مواجه نباشد، ابتدا بر مبنای توزیع‌های آمیخته مقیاسی تعمیمی از مدل رگرسیونی چوله‌اسلش معرفی و ویژگی‌های آن بیان می‌شود. این مدل نه تنها توانایی در نظر گرفتن چولگی را دارد بلکه با اختیار متغیرهای آمیزنده‌ی متفاوت برای هر مشاهده قادر است ناهمگنی موجود در داده‌های نامتقارن به دلیل حضور داده‌های دورافتاده را نیز در نظر گیرد و بعلاوه معیاری برای شناسایی آنها فراهم آورد. سپس به منظور تحلیل داده‌های فضایی، مدلی ناگوسی تحت عنوان چوله‌گوسی یکپارچه-لگ‌گوسی بر مبنای توزیع آمیخته مقیاسی از چوله‌نرمال یکپارچه معرفی می‌شود. در ادامه بر اساس پیچشی از دو میدان تصادفی گوسی و لگ‌گوسی مستقل، یک مدل متغیرپنهان چوله چند متغیره پیشنهاد شده و برای تحلیل توأم برآمدهای پیوسته و رسته‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. سرانجام تعمیمی چوله از مدل‌های گرافیکی ارائه شده و بر اساس آن میدان‌های تصادفی مارکوفی چوله‌گوسی تعریف می‌شوند. مدل‌ها و

روش‌های استنباط آماری آنها در مثال‌های شبیه‌سازی و کاربردی ارائه شده و عملکرد آنها مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی : مدل فضایی ناگوسی، توزیع‌های آمیخته مقیاسی، مدل‌های گرافیکی، روش بیزی، الگوریتم تقریب تصادفی EM .

فهرست مندرجات

۱	مقدمات و طرح مسئله	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۱۱	۲.۱ مدل‌های فضایی و مسائل مربوط به آنها	۱۱
۲۶	۲ مدل رگرسیونی چوله‌اسلش تعمیم یافته	۲۶
۲۶	۱.۲ مقدمه	۲۶
۲۸	۲.۲ مدل رگرسیونی با خطاهای آمیخته مقیاسی از چوله‌نرمال	۲۸
۳۰	۳.۲ تحلیل بیزی مدل چوله‌اسلش تعمیم یافته	۳۰

۳۷ روش بیز تجربی	۱.۳.۲
۴۰ شناسایی داده‌های دورافتاده و آزمون چولگی	۲.۳.۲
۴۲ شبیه‌سازی	۴.۲
۴۹ مثال کاربردی	۵.۲
۵۳ بحث و نتیجه‌گیری	۶.۲

۳ میدان تصادفی آمیخته مقیاسی از چوله گاوسی یکپارچه

۵۵ مقدمه	۱.۳
۵۷ میدان تصادفی چوله گاوسی یکپارچه	۲.۳
۶۱ مدل فضایی چوله گاوسی یکپارچه-لگ گاوسی	۳.۳
۶۵ تابع همبستگی	۱.۳.۳
۶۶ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی	۴.۳
۷۰ شبیه‌سازی از توزیع پسین توأم متغیرهای پنهان	۱.۴.۳

۷۵	پیشگویی	۲.۴.۳
۷۷	شناسایی داده‌های دورافتاده	۳.۴.۳
۷۹	شبیه‌سازی	۵.۳
۸۲	مثال کاربردی	۶.۳
۸۶	بحث و نتیجه‌گیری	۷.۳
۴ مدل فضایی متغیر پنهان چوله برای تحلیل توأم برآمدهای پیوسته و رسته‌ای		
۸۷	مقدمه	۱.۴
۹۱	مدل فضایی چوله‌ی یک متغیره	۲.۴
۹۴	مدل متغیر پنهان فضایی دو متغیره‌ی چوله	۳.۴
۹۵	محدودیت‌هایی برای شناسایی‌پذیری پارامترهای مدل	۱.۳.۴
۹۷	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل	۴.۴

۱۰۱	شبيه سازى مونت كارلوى زنجير ماركوفى از متغيرهاى پنهان	۱.۴.۴
۱۰۴	پيشگويى	۲.۴.۴
۱۰۶	مثالهاى عددى	۵.۴
۱۰۶	مطالعه‌ى شبيه‌سازى	۱.۵.۴
۱۰۹	مثال کاربردى	۲.۵.۴
۱۱۳	بحث و نتيجه‌گيرى	۶.۴

۵ مدل‌هاى گرافيكى تجزيه‌پذير چوله گاوسى

۱۱۵	مقدمه	۱.۵
۱۱۷	مقدمه‌اى بر نظريه گراف	۲.۵
۱۲۲	مدل‌هاى گرافيكى چوله گاوسى تجزيه‌پذير	۳.۵
۱۲۹	ميدان تصادفى ماركوفى با توزيع‌هاى چوله گاوسى بسته	۴.۵
۱۲۹	ميدان تصادفى ماركوفى گاوسى	۱.۴.۵
۱۳۱	ميدان تصادفى ماركوفى چوله گاوسى	۲.۴.۵

۱۳۴	میدان تصادفی مارکوفی ذاتی	۵.۵
۱۳۵	میدان تصادفی مارکوفی گاوسی ذاتی	۱.۵.۵
۱۳۷	میدان تصادفی مارکوفی چوله گاوسی ذاتی	۲.۵.۵
۱۴۳	تحلیل بیزی	۶.۵
۱۴۳	تحلیل بیزی مدل‌های <i>SGDG</i>	۱.۶.۵
۱۴۷	تحلیل بیزی مدل‌های <i>SGMRF</i>	۲.۶.۵
۱۵۱	تحلیل بیزی برای یک مدل با اثرات تصادفی <i>ISGMRF</i>	۳.۶.۵
۱۵۳	شبیه‌سازی	۷.۵
۱۵۷	مثال کاربردی	۸.۵
۱۶۱	بحث و نتیجه‌گیری	۹.۵
۱۷۸		الف خلاصه‌ای از برنامه‌های رایانه‌ای با نرم افزار R	

لیست جداول

- ۴۳ ۱.۴.۲ اریبی برآوردها تحت دو مدل مورد مقایسه
- ۴۴ ۲.۴.۲ توان دوم میانگین خطای برآورد پارامترها، تحت دو مدل SS و GSS
- ۴۸ ۳.۴.۲ مینیمم و ماکسیمم مقدار $E(\lambda_i|y)$ برای مشاهدات منتخب
- ۵۰ ۴.۵.۲ برآورد بیزی پارامترها برای داده‌های AIS تحت دو مدل رگرسیونی مورد مقایسه
- ۵۳ ۵.۵.۲ مقادیر AO_i ، مقادیر برآورد شده‌ی $E(\lambda_i|y)$ و عامل بیزی در تأیید $\lambda_i = 1$
- ۸۰ ۱.۵.۳ مقادیر واقعی و برآورد شده‌ی دو پارامتر α و ν

- ۲.۵.۳ متوسط اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآورد پارامترها تحت مدل‌های
مختلف. ۸۲
- ۳.۶.۳ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل *SUGLG* براساس داده‌های سرب. ۸۴
- ۲.۵.۴ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها تحت دو مدل ۱ و ۴. ۱۱۲
- ۱.۸.۵ ماتریس ضریب همبستگی جزئی نمونه‌ای برای داده‌های نمرات ریاضی. ۱۵۷
- ۲.۸.۵ نمرات ریاضی: میانگین‌های پسینی پارامترها. ۱۶۱

لیست اشکال

- ۴۵ . . $\alpha = 1$ برای $i = 1, \dots, n$ مقدار B_i (خط چین) و ماکسیمم (خط) و مینیمم ۱.۴.۲
- ۴۶ . . $\alpha = 3$ برای $i = 1, \dots, n$ مقدار B_i (خط چین) و ماکسیمم (خط) و مینیمم ۲.۴.۲
- ۴۶ . . $\alpha = 5$ برای $i = 1, \dots, n$ مقدار B_i (خط چین) و ماکسیمم (خط) و مینیمم ۳.۴.۲
- ۴۷ . . $\alpha = 8$ برای $i = 1, \dots, n$ مقدار B_i (خط چین) و ماکسیمم (خط) و مینیمم ۴.۴.۲
- ۴۷ . . $\alpha = 10$ برای $i = 1, \dots, n$ مقدار B_i (خط چین) و ماکسیمم (خط) و مینیمم ۵.۴.۲
- ۵۲ . . . داده‌های AIS : $E(\lambda_i|y)$ (خط) و B_i (خط چین) برای همگی مشاهدات ۶.۵.۲
- ۵۲ . . . داده‌های AIS : AO_i برای همگی مشاهدات ۷.۵.۲

- ۱.۵.۳ ناحیه‌ی HPD و مقادیر برآورد شده‌ی $E(\lambda_i|z)$ ، $i = 1, \dots, 100$ ، تحت مدل
 $SUGLG$. خط: $E(\lambda|z)$. نقطه خط: کران پایین. نقطه چین: کران بالا. ۸۱
- ۲.۶.۳ مکان‌های نمونه‌گیری داده‌های سرب. ۸۳
- ۳.۶.۳ بافت‌نگار (ستون چپ) و نیمه تغییرنگار تجربی استوار (ستون راست) برای
 داده‌های سرب. ۸۳
- ۴.۶.۳ ناحیه‌ی HPD و مقادیر برآورد شده‌ی $E(\lambda_i|z)$ ، $i = 1, \dots, 117$ ، تحت مدل
 $SUGLG$. خط: $E(\lambda|z)$. نقطه خط: کران پایین. نقطه چین: کران بالا. ۸۵
- ۵.۶.۳ نقشه‌ی پیشگویی در ناحیه‌ی مورد مطالعه. ۸۶
- ۱.۲.۴ تابع چگالی $Y(s)$ تحت $\beta = 0$ و $\sigma_1^2 = 1$ و چهار زوج متفاوت برای دو پارامتر
 α و σ_2^2 ۹۳
- ۲.۵.۴ نمودار بازه‌های اطمینان (انحراف استاندارد $\times 1/96 \pm$ میانگین) حاصل از مقادیر
 ملاک AIC در ۲۰ تکرار متناظر با (a) $\alpha = \psi = 1$ و (b) $\alpha = \psi = 2$ ۱۰۹

- ۳.۵.۴ داده‌های Br و Cs : نقاط تیره و روشن به ترتیب دلالت بر مکان‌های پیشگویی و نمونه‌گیری دارند. ۱۱۰
- ۴.۵.۴ بافت‌نگار داده‌ی Cs (ستون راست) و داده‌های Br (ستون چپ) ۱۱۱
- ۵.۵.۴ نیمه تغییرنگار تجربی استوار داده‌های Cs (ستون راست) و داده‌های Br (ستون چپ) ۱۱۱
- ۶.۵.۴ انحراف مقادیر پیشگویی شده از مقادیر واقعی برای مکان‌های پیشگویی شده تحت مدل ۱ (خط)، مدل ۴ (خط‌چین) و تعمیم دو متغیره از مدل ژانگ و الشراوی (۲۰۱۰) (نقطه‌چین)، (ستون سمت چپ مربوط به داده‌های Cs و ستون سمت راست مربوط به داده‌های Br می‌باشد) ۱۱۳
- ۱.۲.۵ یک گراف تجزیه‌ناپذیر. ۱۱۸
- ۲.۲.۵ مثال‌هایی از گراف تجزیه‌پذیر با رتبه‌بندی مناسب رأس‌ها ۱۱۹
- ۳.۳.۵ چپ: نمودار هم‌تراز مدل $SGDG$ با پارامترهای $\mu = (0, 0)$ ،
 $L_{12} = -0/5$ و $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ راست: نمودار هم‌تراز مدل
 $SGDG$ با پارامترهای $\mu = (0, 0)$ ، $L_{12} = -0/5$ ، $D_{\kappa} = \text{diag}(1, 1)$ و $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$ ۱۲۵

۴.۴.۵ نمایی از یک گراف همسایگی برای یک مدل اتورگرسو ضریبی. ۱۳۴

۵.۷.۵ توزیع‌های پسینی δ_1, δ_2 و δ_3 تحت چهار مجموعه داده‌ی شبیه‌سازی شده واقع در گروه A . δ_i ‌های واقعی در نمودار مشخص شده‌اند. ۱۵۵

۶.۷.۵ توزیع‌های پسینی L_{12} و L_{23} تحت چهار مجموعه داده‌ی شبیه‌سازی شده واقع در گروه B . مقادیر واقعی L_{12} و L_{23} در نمودار مشخص شده‌اند. ۱۵۶

۷.۷.۵ توزیع‌های پسینی δ_1, δ_2 و δ_3 (نمودار سمت چپ) و L_{12} و L_{23} (نمودار سمت راست) تحت داده‌ی شبیه‌سازی شده واقع در گروه C . مقادیر پارامترهای استفاده شده برای شبیه‌سازی داده‌ها در نمودار شرح داده شده‌اند. ۱۵۶

۸.۸.۵ گراف همسایگی داده‌های نمرات ریاضی. ۱۵۸

۹.۸.۵ بافت‌نگارهای داده‌های نمرات ریاضی و مدل‌های برازش یافته به آنها. ۱۵۹