دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

خانواده‌ای ناشمارا از مدول‌های تماماً انعکاسی تجزیه ناپذیر

تدوین

فاطمه ساوجی

استاد راهنما

پرفسور محمدتقی دیبایی

مهر 1391

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس گزاری...

حمد و سپاس بی قیاس خداوند سبحان را که به بندگان خود منت نهاد و او را به زیور عقل و خرد آراست تا به وسیله آن عبودیت کمال و ذات بی همتای خداوند را پیشه کند تا تعالی و کمال یابد.

قدر دانم زحمات بی دریغ و ارزشمند استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر محمد تقی دیبایی و سپاسدارم تعلیمات و ارشادات ایشان را که با عنایت و حسن توجه، صبورانه همپای جستجوهایم، مرا راهنما بودند.

تقدیر و سپاس حضور ارزشمند و مغتنم اساتید بزرگوار، گرانقدر و فهیم سرکار خانم دکتر جهانگیری و جناب آقای دکتر دیوانی آذر که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند.

هر نفس، شاکرم وجود مادر و پدری دانا، مومن و مهربان را که به فضل تو زندگانیم را به نور تو نورانی نموده اند و برادرم را که می شناسمش به دوستی و یگانگی و تقدیم به وجود پاکشان.

فاطمه ساوجی

۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه حدسی از شرایر بیان و ثابت می‌شود که نشان می‌دهد در یک حلقه موضعی از نوع کوهن-مکالی شمارا ، بعد مکان هندسی منفرد آن حداکثر یک است. به علاوه، نشان داده می‌شود که در حلقه‌های کوهن-مکالی موضعی، کوهن-مکالی شمارا بودن تحت موضعی سازی پایدار است. در ادامه ثابت می‌شود که تحت شرایطی ویژه، تعداد ناشمارا کلاس‌های یکریختی مدول‌های تماماً انعکاسی متلاشی نشدنی [1] وجود دارد.

واژه‌های کلیدی : حلقه کوهن-مکالی، از نوع کوهن-مکالی شمارا، تماماً انعکاسی، شبه دوگان، مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال.

رده بندی موضوعی(۲۰۰۰): 16G60، 13C14 ، 13H10، 13C02.

[1] در سراسر این پایان‌نامه به جای اصطلاح **تجزیه ناپذیر** از واژه **متلاشی نشدنی** استفاده شده است.

مقدمه

حلقه‌های کوهن-مکالی موضعی از نوع کوهن-مکالی شمارا در طی ۳۰ سال گذشته به طور دقیق مورد بررسی قرار گرفته شده است.

قضیه زیر یکی از نتایج خوب از این نوع حلقه ها است، که توسط اسلاندر[۲] روی حلقه‌های کامل در [1]، هونیکه[۳] و ویگاند [۴] روی حلقه‌های عالی در [17]و هونیکه و لوشکه [۵] در حالت کلی[14]، ثابت شده است.

قضیه (اسلاندر- هونیکه - لوشکه - ویگاند). فرض کنیم R یک حلقه کوهن-مکالی موضعی از نوع کوهن-مکالی شمارا باشد، در این‌صورت R حداکثر یک نقطه منفرد مجزا دارد.

واضح است که یک حلقه موضعی R با تنها یک نقطه منفرد است، اگر و تنها اگر برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sing}(R)$، $\dim R/\mathfrak{p} = ۰$ که در آن $\operatorname{Sing}(R)$، مکان هندسی منفرد R باشد. اما شرایر در [26] حدس زد که مکان هندسی مجموعه نقاط منفرد در حلقه کوهن-مکالی موضعی از نوع کوهن-مکالی شمارا مشتمل بر ایده‌آل‌های اول از بعد کمتر است. به عبارت دقیق‌تر:

حدس۱. فرض کنیم R یک $\mathbb{C}$-جبر موضعی کوهن-مکالی تحلیلی از نوع کوهن-مکالی شمارا باشد. در این‌صورت R مکان هندسی نقاط منفرد R حداکثر از بعد یک است، یعنی برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sing}(R)$، $\dim \frac{R}{\mathfrak{p}} \leq ۱$.

این حدس اخیراً توسط هونیکه و لوشکه در [15] اثبات شده است که قویتر از حدس شرایر می‌باشد. این اثبات در این پایان‌نامه گنجانده شده است.

از سوی دیگر در سال ۱۹۶۰، اسلاندر [1] یک ناوردای همولوژیکی برای مدول‌ها معرفی کرد که بعد

[۲] Auslander
[۳] Huneke
[۴] Wieganed
[۵] Leuschke

گرنشتاین یا به اختصار G-بعد نامیده می‌شود. پس از آن وی همراه با بریجر به توسعه تئوریِ G-بعد [3] پرداخت.

مدول‌هایی که دارای G-بعد صفر هستند، تماماً انعکاسی نامیده می‌شوند. روی حلقه موضعی گرنشتاین، مدول‌های تماماً انعکاسی منطبق بر مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال هستند.

مشخص شده است که، تحت شرایطی، حلقه‌های موضعی گرنشتاین از نوع کوهن-مکالی متناهی، ابررویه هستند. چنین حلقه‌هایی و همه مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال متلاشی نشدنی، روی آن‌ها به طور کامل رده بندی شده‌اند [8]،[11]،[16]،و[32].

بنابراین این سوال طبیعی مطرح می‌شود که آیا حلقه موضعی غیر گرنشتاینی که تنها مشتمل بر تعدادی متناهی کلاس‌های یکریختی از مدول‌های تماماً انعکاسی متلاشی نشدنی است، وجود دارد. اگر چنین حلقه‌ای وجود داشته باشد، آن‌گاه هدف ما تعیین همه کلاس‌های یکریختی از مدول‌های تماماً انعکاسی متلاشی نشدنی است.

به هرحال، ریو تاکاهاشی [۶] حدسی زد که چنین حلقه‌ای اساساً نمی‌تواند وجود داشته باشد.

حدس ۲. فرض کنیم R یک حلقه موضعی غیر گرنشتاین باشد. فرض کنیم یک R-مدول تماماً انعکاسی غیر آزاد وجود داشته باشد. در این‌صورت بی نهایت کلاس‌های یکریختی از مدول‌های تماماً انعکاسی غیر آزاد وجود دارند.

در این‌جا فرض وجود مدول تماماً انعکاسی غیر آزاد ضروری است زیرا توجه می‌کنیم که به عنوان مثال، روی حلقه کوهن-مکالی موضعی غیر گرنشتاین با چندگانگی مینیمال همه مدول‌های تماماً انعکاسی، آزاد هستند.

تاکاهاشی حتی حدس بالا را برای حلقه‌های موضعی هنسلی از عمق حداکثر دو ثابت می کند [27]،[28]،و[30]. همچنین وی اخیراً ثابت کرده است که در مورد هر حلقه هنسلی موضعی که یک مدول تماماً انعکاسی دوری غیر آزاد داشته باشد، این حدس درست است.

در این پایان‌نامه به بررسی روابط بین تعدادکلاس‌های یکریختی مدول‌های تماماً انعکاسی و بعدهای ایده‌آل

[۶] R. Takahashi

های اول می‌پردازیم. قضیه زیر قسمتی از قضیه اصلی این پایان‌نامه است.

قضیه. فرض کنیم R یک حلقه موضعی باشد، به طوری‌که کامل یا میدان مانده‌ای ناشمارا داشته باشد. فرض کنیم ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R که $\operatorname{grade}\mathfrak{p} > ۰$ و $\dim R/\mathfrak{p} > ۱$ و یک R-مدول تماماً انعکاسی M به طوری‌که $M_{\mathfrak{p}}$یک $R_{\mathfrak{p}}$-مدول آزاد نیست، وجود داشته باشند. در این‌صورت تعداد ناشمارا R-مدول تماماً انعکاسی متلاشی نشدنی غیر یکریخت وجود دارد.

در فصل۱ این پایان‌نامه به معرفی قضیه‌ها و مطالب مقدماتی که ابزار کار در فصول بعدی است می پردازیم.

فصل۲ به اثبات حدس شرایر توسط هونیکه و لوشکه اختصاص یافته است و نشان داده می‌شود روی حلقه های کوهن-مکالی موضعی، کوهن-مکالی شمارا بودن تحت موضعی سازی پایدار است.

در فصل ۳ نشان داده می‌شود که قضیه‌ای که توسط هونیکه و لوشکه اثبات گردیده است بدون شرط عالی بودن حلقه نیز برقرار است.

در فصل ۴ قضیه اصلی ثابت می‌شود و نشان داده می‌شود که قضیه منسوب به هونیکه و لوشکه در مورد حلقه‌های موضعی کوهن-مکالی که یک مدول کانونی دارند نیز برقرار است.

در فصل ۵ به بیان چند مثال از حلقه‌هایی که تعداد شمارایی از مدول‌های تماماً انعکاسی متلاشی نشدنی غیر یکریخت دارند می‌پردازیم.

در تدوین فصل ۲ از مقاله

C. Huneke, G. J. Leuschke, Local rings of countable Cohen-Macaulay type. Proc. Amer. *Math. Soc.* 131 (2003), no. 10, 3003–3007

استفاده شده است. فصل‌های ۳، ۴ و ۵ براساس مقاله زیر تهیه شده است.

R. Takahashi,An uncountably infinite number of indecomposable totally reflexive modules. Source: Nagoya Math. J. Volume 187 (2007), 35-48.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

در این فصل با این فرض که خواننده با مباحث جبر پیشرفته و جبر جابه‌جایی و همولوژی، آشنایی لازم را دارد، به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز می‌پردازیم. در سراسر این پایان‌نامه، R حلقه‌ای جابه‌جایی نابدیهی یکدار است و کلیه مدول‌ها، یکانی هستند.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم M مدولی روی حلقه R باشد. M یک R-مدول **ساده** [۱] نامیده می‌شود، هرگاه $M \neq 0$ و تنها زیرمدول‌های M، 0 و M باشند.

تعریف ۲.۱.۱. [25, 6.56] فرض کنیم R حلقه‌ای ناصفر و F یک R-مدول آزاد با پایه‌ای متناهی باشد. دراین‌صورت هر پایه F متناهی است و تعداد عضوهای هر دو پایه F یکسان‌اند. تعداد عضوهای هر پایه F **رتبه** [۲] F نامیده و با $\operatorname{rank} F$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. [25, 7.33] فرض کنید M مدولی روی حلقه R باشد. مقصود از یک زنجیر اکید از زیرمدول‌های M، زنجیری متناهی و اکیداً صعودی چون

$$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n$$

[۱] Simple module
[۲] Rank

از زیرمدول‌های M است که $\circ = M_\circ$ و $M_n = M$. طول این زنجیر اکید، تعداد علامت‌های $\subset$ در این زنجیره است که یکی کمتر از تعداد جمله‌های آن است. زنجیر اکید از زیرمدول‌های M، مانند

$$\circ = M_\circ \subset M_۱ \subset \cdots \subset M_{n-۱} \subset M_n = M$$

یک **سری ترکیبی** M نامیده می‌شود، هرگاه، به ازای هر $i = \circ, \cdots, n$، $\frac{M_i}{M_{i-۱}}$ یک R-مدول ساده باشد. به‌عبارت دیگر زنجیر فوق یک سری ترکیبی است اگر وتنها اگر نتوان با وارد کردن یک جمله دیگر آنرا گسترش داده و زنجیر اکیدی به طول $n+۱$ به دست آورد. لذا یک زنجیر اکید از زیرمدول‌های M، سری ترکیبی M است اگروتنهااگر زنجیر اکید ماکسیمال باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم M مدولی روی حلقه R باشد. M با طول متناهی است، هرگاه یک سری ترکیبی با طول متناهی داشته باشد. در این حالت **طول** [۳] M برابر با طول هر سری ترکیبی تعریف می‌شود و با $\lambda(M)$ (اگر بخواهیم روی حلقه مربوطه تاکید کنیم آنرا به صورت $\lambda_R(M)$) نشان داده می‌شود. اگر مدول M سری ترکیبی نداشته باشد می نویسیم $\lambda(M) = \infty$.

قضیه ۵.۱.۱. [25, 7.36] *فرض کنیم M مدولی روی حلقه R باشد. در این‌صورت M با طول متناهی است اگروتنهااگر M نوتری [۴] و آرتینی [۵] باشد. به‌عبارت‌دیگر M با طول متناهی است اگروتنهااگر مجموعه زیرمدول‌های M هم در شرط زنجیر صعودی و هم در شرط زنجیر نزولی صدق کند.*

قضیه ۶.۱.۱. [25, 9.3] *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m}, k)$ حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و میدان خارج‌قسمتی $k = \frac{R}{\mathfrak{m}}$ و M یک R-مدول متناهی‌مولد باشد. R-مدول $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ توسط $\mathfrak{m}$ پوچ می‌شود. بنابراین ساختار طبیعی $\frac{R}{\mathfrak{m}}$- مدولی دارد. فرض کنیم $x_۱, \cdots, x_n \in M$. دراین‌صورت احکام زیر معادلند.*

(۱) M توسط $x_۱, \cdots, x_n$ تولید می‌شود؛

(۲) R-مدول $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ توسط $x_۱ + \mathfrak{m}M, \cdots, x_n + \mathfrak{m}M$ تولید می‌شود؛

(۳) k-فضای برداری $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ توسط $x_۱ + \mathfrak{m}M, \cdots, x_n + \mathfrak{m}M$ تولید می‌شود.

[۳] Length of module
[۴] Noetherian
[۵] Artinian

به‌علاوه، بعد k- فضای $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ متناهی است و تعداد عضوهای مجموعه مولد مینیمال R- مدول M برابر $\mathrm{vdim}_k(\frac{M}{\mathfrak{m}M})$ است.

قضیه ۷.۱.۱. [25, 7.42] *فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان k باشد. در این صورت V ، k- فضای متناهی بعد است اگروتنهااگر k- مدول متناهی طول باشد. در این صورت*

$$\dim_k V = \lambda(V).$$

فضای برداری $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ را روی میدان $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $\dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}(\frac{M}{\mathfrak{m}M}) = \nu(M)$. با توجه به قضیه اخیر $\dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}}(\frac{M}{\mathfrak{m}M}) = \lambda(\frac{M}{\mathfrak{m}M})$، بنابراین $\nu(M) = \lambda(\frac{M}{\mathfrak{m}M})$.

تعریف ۸.۱.۱. [25, 4.19] فرض کنیم I ایده‌آل تجزیه پذیری از حلقه R و تجزیه $I = Q \cap \cdots \cap Q_n$ که به ازای $i = ۱, \cdots, n$، $\sqrt{Q_i} = \mathfrak{p}_i$ تجزیه اولیه مینیمال I باشد. در این صورت مجموعه n عضوی $\{\mathfrak{p}_۱, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$ را مجموعه ایده‌آل‌های وابسته به I می‌نامیم و با $\mathrm{ass}\, I$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۹.۱.۱. [25, 4.23] فرض کنیم I ایده‌آل سره حلقه R باشد و J ایده‌آلی ازR باشد که $I \subseteq J$. در این‌صورت J ایده‌آل تجزیه‌پذیر از R است اگر و تنها اگر J/I ایده‌آل تجزیه پذیر R/I باشد. در این حالت

$$\mathrm{ass}_{R/I}(J/I) = \{\frac{\mathfrak{p}}{I}, \mathfrak{p} \in \mathrm{ass}\, J\}$$

قضیه ۱۰.۱.۱. [25, 4.24] *اگر I ایده‌آل تجزیه‌پذیر R باشد و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ در این صورت $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال Iاست اگر وتنها اگر $\mathfrak{p}$ عضو مینیمال (نسبت به رابطه شمول) از مجموعه $\mathrm{ass}\, I$ باشد.*

تعریف ۱۱.۱.۱. [25, 9.14] فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. **محمل** [۶] M و مجموعه **ایده‌آل‌های اول وابسته** به M به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathrm{Supp}\ M = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | M_{\mathfrak{p}} \neq ۰\}.$$

$$\mathrm{Ass}\ M = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{p} = (۰ :_R x) \text{ وجود دارد به‌طوری‌که } x \in M\}.$$

[۶] Support

قضیه ۱.۱.۱۲. [25, 9.20] *فرض کنیم M مدولی متناهی‌مولد روی حلقه R باشد. دراین‌صورت*

$$\text{Supp } M = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) | \mathfrak{p} \supseteq (\circ : M)\} = V(\text{Ann}(M)).$$

تذکر ۱.۱.۱۳. [25, 9.33] فرض کنیم I ایده‌آل سره R باشد. در این صورت به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R داریم

$$\mathfrak{p} \in \text{ass}(I) \Longleftrightarrow \mathfrak{p} \in \text{Ass}(R/I)$$

گزاره ۱.۱.۱۴. [25, 9.36] *فرض کنیم M مدولی متناهی‌مولد روی حلقه R باشد. دراین‌صورت*

$$\text{Zdv}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \mathfrak{p}.$$

قضیه ۱.۱.۱۵. [25, 9.39] *فرض کنیم M مدولی متناهی‌مولد روی حلقه نوتری R باشد. دراین‌صورت*

$$\text{Ass}(M) \subseteq \text{Supp}(M)$$

و هر عضو مینیمال $\text{Supp}(M)$ متعلق به $\text{Ass}(M)$ است.

گزاره ۱.۱.۱۶. [25, 3.56] *فرض کنیم $I_1, \cdots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند و فرض کنیم $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول R باشد و $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. در این‌صورت jای وجود دارد که $1 \leq j \leq n$ داریم $\mathfrak{p} = I_j$.*

لم ۱.۱.۱۷. [25, 8.24] **(لم ناکایاما)** *فرض کنیم M یک R-مدول متناهی‌مولد و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R چنان باشد که $\mathfrak{a}M = M$. اگر $\mathfrak{a} \subseteq J(R)$، که در آن $J(R)$ رادیکال جیکوبسن R است، دراین‌صورت $M = \circ$.*

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنیم M یک R-مدول و I ایده‌آلی از حلقه‌R باشد. در این‌صورت

- اگر $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)$، **ارتفاع** [۷] $\mathfrak{p}$ نسبت به M با نماد $\text{ht}_M(\mathfrak{p})$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{ht}_M(\mathfrak{p}) = \sup\{n | \text{زنجیری اکید از عناصر } \text{Supp}(M) \text{ مانند } \mathfrak{p}_\circ \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \text{ وجود دارد}\}.$$

[۷] Height

اگر سوپریمم مجموعه فوق موجود نباشد، قرار می‌دهیم $\mathrm{ht}_M(\mathfrak{p}) = \infty$. به ازای یک ایده‌آل I از Rبه طوری که $IM \neq M$ ارتفاع I نسبت به M چنین تعریف می‌شود

$$\mathrm{ht}_M(I) := \inf\{\mathrm{ht}_M(\mathfrak{p})|\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M), I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

- هنگامی که از **ارتفاع ایده‌آل** I بدون ذکر مدولی صحبت می‌کنیم، منظور ارتفاع I نسبت به R در است. در این حالت ارتفاع I را با نماد $\mathrm{ht}_R(I)$ و یا در صورت مشخص بودن حلقه با علامت $\mathrm{ht}(I)$ نشان می‌دهیم. در این‌صورت **بعد حلقه** [8] R به‌صورت

$$\dim(R) := \sup\left\{\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p})|\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\right\},$$

تعریف می‌شود.

- **بعد کرول** M را با نماد $\dim_R(M)$ و یا در صورت مشخص بودن حلقه با $\dim(M)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\dim_R(M) := \sup\left\{\mathrm{ht}_M(\mathfrak{p})|\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)\right\}.$$

- با توجه به‌این‌که $\mathrm{Supp}(M) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$، می‌توان نتیجه گرفت $\dim_R(M) \leq \dim(R)$.

تعریف ۱.۱.۱۹. [25, 15.26] فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد، دراین‌صورت حلقه R را **منظم** [9] گویند، هرگاه

$$\dim R = \mathrm{vdim}_{\frac{R}{\mathfrak{m}}} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}.$$

قضیه ۱.۱.۲۰. [19, 2.5] *(قضیه کاپلانسکی)*[10] *هر مدول تصویری روی حلقه‌ی موضعی آزاد است.*

تعریف ۱.۱.۲۱. دنباله دقیق $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \to 0$ از R-مدول ها و R-همریختی ها را شکافته شده می‌نامیم هرگاه R-همریختی مانند $g : C \to B$ موجود باشد به طوری‌که $hog = \mathrm{Id}_C$.

[8] Dimension
[9] Regular ring
[10] Kaplansky theorem

لم ۲۲.۱.۱. *فرض کنیم $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ یک دنباله دقیق کوتاه از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها باشد. در این صورت این دنباله دقیق شکافته شده است اگر $\mathrm{Ext}_R^1(C, A) = 0$.*

برهان. فرض کنیم $\mathrm{Ext}_R^1(C, A) = 0$. با اثر دادن فانکتور $\mathrm{Hom}_R(C, -)$ روی دنباله دقیق $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$، به دنباله دقیق طولانی

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, A) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(C, B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(C, C) \to \mathrm{Ext}_R^1(C, A) \to \cdots$$

دست می‌یابیم که در آن $\mathrm{Ext}_R^1(C, A) = 0$. بنابراین g^* پوشاست. لذا برای هر عضو از $\mathrm{Hom}_R(C, C)$ و به ویژه Id_C عضوی مانند $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(C, B)$ موجود است، به طوری که $g^*(\alpha) = \mathrm{Id}_C$. لذا $g\alpha = \mathrm{Id}_C$. این بدان معناست که همریختی مانند $\alpha : C \to B$ وجود دارد به طوری که $g\alpha = \mathrm{Id}_c$. □

لم ۲۳.۱.۱. *اگر $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$، یک دنباله دقیق کوتاه از R-مدول‌های آزاد و R-همریختی‌ها باشد، آنگاه $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(C)$. ($A$، B و C متناهی‌مولد و آزاد هستند.)*

برهان. C یک R-مدول آزاد و در نتیجه یک R-مدول تصویری است. بنابراین دنباله دقیق کوتاه مذکور شکافته شده است. لذا $B \cong A \oplus C$. اینک اگر $A = \oplus_{i=1}^{n} R$، $B = \oplus_{j=1}^{m} R$ و $C = \oplus_{i=1}^{r} R$، آنگاه

$$B \cong (\oplus_{i=1}^{n} R) \oplus (\oplus_{i=1}^{r} R).$$

$R^m = R^{n+r}$، لذا $m = n + r$. □

۲.۱ تکمیل حلقه‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. دنباله $\{M_n\}_{n \geq 0}$ از زیرمدول‌های M را یک **صافی** [11] برای M گویند، هرگاه دنباله فوق کاهشی باشد. به عبارت دیگر، به ازای هر n، $n \geq 0$، $M_n \supseteq M_{n+1}$.

تعریف ۲.۲.۱. گردایه‌ی $\beta = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از زیرمجموعه‌های باز فضای توپولوژیک X را یک **پایه** برای X گویند، هرگاه

[11] Filteration

(۱) $X = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$؛

(۲) برای هر U و V در β و هر z، $z \in U \cap V$، عضوی مانند $W \in \beta$ وجود داشته باشد به طوری‌که $z \in W$ و $W \subseteq U \cap V$.

تذکر ۳.۲.۱. [6, 2.6.1] فرض کنیم M یک R-مدول و $\{M_n\}_{n\geq \circ}$ یک صافی برای M باشد. در این‌صورت به ازای هر $x \in M$، گردایه $\beta = \{x + M_n\}_{n\geq\circ}$ **پایه‌ای برای یک توپولوژی** [۱۲] منحصر بفرد روی M است.

تعریف ۴.۲.۱. [6, 2.6.2] فرض کنیم M یک R-مدول و $\{M_n\}_{n\geq\circ}$ یک صافی برای M باشد. توپولوژی حاصل از پایه توپولوژیکی یک $\beta = \{x + M_n\}_{n\geq\circ}$ را **توپولوژی خطی** روی M گویند.

تعریف ۵.۲.۱. [6, 2.6.7] دنباله $\{x_n\}_{n\geq\circ}$ از عناصر R-مدول M، یک **دنباله کوشی** در توپولوژی خطی معین شده $\{M_n\}_{n\geq\circ}$ نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر عدد صحیح نامنفی n، عدد صحیح نامنفی $s(n)$ موجود باشد که به ازای هر p, q، $p, q \geq s(n)$، $x_p - x_q \in M_n$.

- دنباله $\{x_n\}_{n\geq\circ}$ نسبت به توپولوژی مذکور، همگرا نامیده می‌شود، هرگاه عضوی مانند $x \in M$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر عدد صحیح نامنفی n، عدد صحیح نامنفی $S(n)$ چنان موجود باشد که به ازای هر $p \geq S(n)$، $x_p - x \in M_n$. در این‌صورت x را حد دنباله $\{x_n\}_{n\geq\circ}$ می‌نامند. در این‌صورت دنباله $\{x_p\}_{p\geq\circ}$ همگرا به صفر است اگروفقط اگر nای وجود داشته باشد که برای هر $p \geq n$، آن‌گاه $x_{\mathfrak{p}} \in M_n$.

تعریف ۶.۲.۱. [6, 2.6.8] فرض کنیم M یک R-مدول مجهز به توپولوژی خطی معین شده با صافی $\{M_n\}_{n\geq\circ}$ باشد. مجموعه کلیه‌ی دنباله‌های کوشی در M را با C نشان می‌دهیم. به‌علاوه مجموعه همه‌ی دنباله‌های همگرا به صفر را با $C_\circ$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $\{x_n\}_{n\geq\circ}$ و $\{y_n\}_{n\geq\circ}$ دو عضو C باشند و $r \in R$. در این‌صورت C با دو عمل

$$\{x_n\}_{n\geq\circ} + \{y_n\}_{n\geq\circ} = \{x_n + y_n\}_{n\geq\circ}, \quad r\{x_n\}_{n\geq\circ} = \{rx_n\}_{n\geq\circ}$$

[۱۲] Topology

تبدیل به یک R-مدول می‌شود. به‌علاوه توجه کنیم که $C_\circ$ با این ساختار، یک R-زیرمدول Cاست. زیرا اگر $\{z_n\}_{n\geq\circ}$ و $\{w_n\}_{n\geq\circ}$ دو عضو $C_\circ$ باشند، آنگاه بنابرتعریف، هر دو این دنباله‌ها به صفر همگرا هستند. به‌علاوه به ازای هر $r\in R$ داریم

$$r\{z_n\}_{n\geq\circ}+\{w_n\}_{n\geq\circ}=\{rz_n+w_n\}_{n\geq\circ}$$

که به وضوح به صفر همگرا است. لذا $r\{z_n\}_{n\geq\circ}+\{w_n\}_{n\geq\circ}\in C_\circ$ و از آنجا که $C_\circ$ یک R-زیرمدول C است. اینک می‌توانیم مدول خارج قسمتی $\frac{C}{C_\circ}$ را در نظر بگیریم. در این‌صورت **تکمیل** [۱۳] مدول M در توپولوژی خطی معین شده با صافی $\{M_n\}_{n\geq\circ}$ را همان $\frac{C}{C_\circ}$ تعریف میشود و با نماد $\hat{M}$ نشان می‌دهند. در واقع $\hat{M}=\frac{C}{C_\circ}$

همریختی ای مانند

$$\theta:M\to\frac{C}{C_\circ}$$

با ضابطه $\theta(x)=\{x+C\}_{n\geq\circ}$ وجود دارد که در آن $\{x+C_\circ\}_{n\geq\circ}$ دنباله‌ای ثابت است. در این‌صورت

$\ker\theta=\cap_{n\geq\circ}M_n$

- *اگر $\cap_{n\geq\circ}M_n=\circ$، آنگاه θ تکریختی است.*
- *M یک R- **مدول کامل** [۱۴] نامیده می‌شود، هرگاه θ یکریختی باشد. به بیان معادل $\hat{M}\cong M$.*

فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت هر دنباله کاهشی $\{I_n\}_{n\geq\circ}$ از ایده‌آل‌های R یک صافی برای R، به‌عنوان R- مدول است.

- *با توجه به مطالبی که بیان گردید، می‌توان تکمیل حلقه‌ی R را نسبت به صافی $\{I_n\}_{n\geq\circ}$ تعریف کرد. تکمیل حلقه‌ی R با $\hat{R}$ نشان داده می‌شود.*

فرض کنیم M یک R- مدول و $\{I_n\}_{n\geq\circ}$ یک صافی از ایده‌آل‌های حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت $\{I_nM\}_{n\geq\circ}$ یک صافی از زیرمدول‌های M است. زیرا اگر $I_m\supseteq I_n$، آنگاه $I_mM\supseteq I_nM$.

[۱۳] Completion
[۱۴] Complete module

قضیه ۱.۲.۷. [6, 2.6.13] *فرض کنیم که M یک R-مدول مجهز به توپولوژی خطی معین شده با صافی $\{M_n\}_{n\geq 0}$ باشد و*

$$0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$$

دنباله‌ای دقیق از R-مدول‌ها متناهی مولد و R-همریختی‌ها باشد. در این‌صورت $\{\psi(M_n)\}_{n\geq 0}$ و $\{\varphi^{-1}(M_n)\}_{n\geq 0}$ به ترتیب دو صافی برای M' و M'' هستند و به‌علاوه دنباله

$$0 \to \hat{M}' \xrightarrow{\hat{\varphi}} \hat{M} \xrightarrow{\hat{\psi}} \hat{M}'' \to 0$$

دقیق است.

گزاره ۱.۲.۸. [6, 2.6.14] *فرض کنیم که M یک R-مدول مجهز به توپولوژی معین شده با صافی $\{M_n\}_{n\geq 0}$ باشد. در این‌صورت به ازای هر $n \geq 0$،*

$$\frac{M}{M_n} \cong \frac{\hat{M}}{\hat{M}_n}.$$

قضیه ۱.۲.۹. [6, 2.6.16] *فرض کنیم M یک R-مدول و I ایده‌آلی از R باشد. در این‌صورت $\{I^n\}_{n\geq 0}$ یک صافی برای R و $\{I^nM\}_{n\geq 0}$ یک صافی برای M است. دراین‌صورت توپولوژی معین شده با صافی $\{I^nM\}_{n\geq 0}$ **توپولوژی I-ادیک** [۱۵] نامیده می‌شود.*

گزاره ۱.۲.۱۰. *فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد. در این‌صورت*

(۱) *اگر $0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ یک دنباله دقیق کوتاه از R-مدول‌های باشد، آنگاه $0 \to \hat{M}' \xrightarrow{\hat{\varphi}} \hat{M} \xrightarrow{\hat{\psi}} \hat{M}'' \to 0$ یک دنباله دقیق کوتاه نسبت به توپولوژی I-ادیک است.*

(۲) *اگر M و N دو R-مدول دلخواه باشند، آنگاه $\widehat{M \oplus N} \cong \hat{M} \oplus \hat{N}$.*

(۳) *به ازای هر $n \geq 0$، $\frac{M}{I^nM} \cong \frac{\hat{M}}{\widehat{I^nM}}$.*

---

[۱۵] I-adic topology

برهان. (۱) حکم با توجه به قضیه ۷.۲.۱، به‌دست می‌آید.

(۲) حکم از جمعی بودن فانکتور $\frac{R}{I^n} \otimes_R -$ حاصل می‌شود.

(۳) از نتیجه [6, 2.6.14]، به دست می‌آید. □

قضیه ۱۱.۲.۱. [6, 2.6.19] *فرض کنیم R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول متناهی‌مولد باشد. دراین‌صورت نسبت به توپولوژی I-ادیک، $\hat{R} \otimes_R M \cong \hat{M}$، که در آن ضابطه‌ی صریح یکریختی به صورت*

$$\{r_n + I^n\}_{n \geq 0} \otimes m \mapsto \{r_n m\}_{n \geq 0}$$

می‌باشد.

گزاره ۱۲.۲.۱. [6, 2.6.20] *فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد. دراین‌صورت تکمیل شده‌ی R نسبت به توپولوژی I-ادیک، یعنی $\hat{R}$، یک R-مدول یکدست است.*

گزاره ۱۳.۲.۱. [6, 2.6.21] *فرض کنیم R یک حلقه نوتری، M یک R-مدول متناهی‌مولد و J نیز ایده‌آلی از R باشد. دراین‌صورت*

(۱) $\widehat{JM} \cong J\hat{M} = \hat{J}\hat{M}$؛

(۲) $\widehat{M/JM} \cong \widehat{M}/J\widehat{M}$. به ویژه به ازای هر $n > 0$، $\frac{M}{J^n M} \cong \frac{\hat{M}}{J^n \hat{M}}$.

قضیه ۱۴.۲.۱. [6, 2.6.24] *فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد و $\hat{R}$ نشان دهنده‌ی تکمیل حلقه‌ی R نسبت به توپولوژی I-ادیک باشد. در این‌صورت $\hat{R}$ نیز یک حلقه نوتری است.*

قضیه ۱۵.۲.۱. [6, 2.6.26] *فرض کنیم $\hat{R}$ نشان دهنده‌ی تکمیل حلقه‌ی R نسبت به توپولوژی I-ادیک باشد. دراین‌صورت $\widehat{IR} = I\hat{R}$ زیرمجموعه رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی $\hat{R}$ است، یعنی $I\hat{R} \subseteq J(\hat{R})$.*

گزاره ۱۶.۲.۱. [6, 2.6.27] *فرض کنیم R یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد و $\hat{R}$ نشان دهنده‌ی تکمیل حلقه‌ی R نسبت به توپولوژی $\mathfrak{m}$-ادیک باشد. در این‌صورت $\hat{R}$ نیز یک حلقه‌ی موضعی است و ایده‌آل ماکسیمال آن عبارت است از $\mathfrak{m}\hat{R}$.*

قضیه ۱.۲.۱۷. [25, 8.23] ***قضیه اشتراک کرول.*** *فرض کنیم R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول متناهی‌مولد باشد. فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه R باشد که $I \subseteq J(R)$. در این صورت*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0.$$

نتیجه. *اگر R یک حلقه نوتری باشد و $I \subseteq J(R)$ ، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$.*

تذکر. *اگر R یک حلقه نوتری و موضعی باشد، آنگاه R را می توان به عنوان زیر حلقه‌ای از $\hat{R}$ در نظر گرفت که درآن $\hat{R}$ نشان دهنده تکمیل حلقه R نسبت به توپولوژی $\mathfrak{m}$-ادیک است. زیرا همریختی $\theta : R \to \hat{R}$ موجود است به طوری‌که $\ker\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n$. بنابر نتیجه اخیر $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$. لذا $\ker\theta = 0$ و θ تکریختی است. بنابراین R را می‌توان زیر حلقه‌ای از $\hat{R}$ در نظر گرفت. به‌علاوه توجه می‌کنیم که θ یک همریختی یکدست با وفا است زیرا $\hat{R}$ به عنوان R-مدول یکدست با وفا است.*

تعریف ۱.۲.۱۸. R -مدول M را **متلاشی‌نشدنی** [16] گویند، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

۱) $M \neq 0$،

۲) تنها جمعوندهای مستقیم M، زیرمدول‌های 0 و M باشند.

تعریف ۱.۲.۱۹. [20] فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد. در این‌صورت R را یک حلقه **هنسلی** [17] می نامند ، هرگاه در شرط زیر صدق کند:

اگر $f(x)$ یک چند جمله ای تکین با ضرایب در R باشد به طوری که $f(x) + \mathfrak{m}[x]$ (یعنی تصویر $f(x)$ تحت همریختی حلقه ای طبیعی $R[x] \to \frac{R}{\mathfrak{m}}[x]$) به حاصلضرب دو چند جمله ای تکین مانند $h_0 + \mathfrak{m}[x]$ و $g_0 + \mathfrak{m}[x]$ تجزیه شود که در آن $h_0(x)$ و $g_0(x)$ دارای ریشه مشترک در $\mathfrak{m}$ نباشد، آن‌گاه $f(x)$ به حاصلضرب دو چندجمله‌ای مانند $h(x)$ و $g(x)$ تجزیه شود به طوری که $h(x)+\mathfrak{m}[x] = h_0(x)+\mathfrak{m}[x]$ و $g(x)+\mathfrak{m}[x] = g_0(x) + \mathfrak{m}[x]$.

قضیه ۱.۲.۲۰. [20, 7.46] *هر حلقه کامل، هنسلی است.*

---

[16] Indecomposable
[17] Henselian ring