بسم الله الرحمن الرحيم

١٠٢٤٥٩

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

عنوان پایان نامه:

نامساوی های مینیماکس و قضایای نقطه ثابت در فضای محدب تعمیم یافته

استاد راهنما:

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر عبدالعلی نعمتی

ارائه دهنده :

محسن رستمیان دلاور

(شهریور ۸۶)

تقدیم به پدر ومادر مهربانم

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

۱—۱ مقدمه

برای درک بهتر مطالب و موضوعات این پایان نامه تعدادی از تعاریف و نتایج آشنارا بیان می نماییم. همچنین، برخی از نتایجی که در فصل های بعدی این پایان نامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت را خواهیم دید. بطور خلاصه مفاهیمی در مجموعه ها، فضاهای توپولوژی، فضای برداری و نتایجی در مورد نگاشتهای چند مقداری بهمراه چند لم با اثبات آورده شده است.

قضایا و تعاریفی را که در این فصل بدون مرجع مشاهده می‌نمایید را می‌توان در کتابهای مختلف به عنوان مثال، توپولوژی دوگنجی (Dugundgi) [۱۴] و سیمز (Sims) [۴٦] مشاهده نمود.

۱—۲ مجموعه ها

تعریف ۱.۱ برای مجموعه دلخواه A، تعداد اعضای A (کاردینال) را با $|A|$ نمایش می دهیم. مجموعه A متناهی است اگروتنهااگر $|A| < \infty$.

تعریف ۲.۱ فرض کنید X یک مجموعه و A مجموعه ای از زیرمجموعه های X باشد. گوییم A دارای **خاصیت اشتراک متناهی** است هرگاه اشتراک اعضای هر زیر مجموعه متناهی از A ناتهی باشد.

تعریف ۳.۱ یک **مجموعه مرتب جزئی** X، یک مجموعه ناتهی است با یک رابطه $*$ روی آن که:

(۱) $x * x$، برای هر $x \in X$.

(۲) $x * y$ و $y * x$ ایجاب می کند که $x = y$، برای هر $x, y \in X$.

(۳) $x * y$ و $y * z$ ایجاب می کند که $x * z$، برای هر $x, y, z \in X$.

۱—۳ فضاهای توپولوژیک

تعریف ۴.۱ فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی باشد. خانواده τ از زیرمجموعه های X را یک **توپولوژی** گوییم هر گاه،

(۱) $X, \emptyset \in \tau$،

(۲) τ نسبت به اجتماع نامتناهی بسته باشد،

(۳) τ نسبت به اشتراک متناهی بسته باشد.

تعریف ۵.۱ زوج مرتب (X, τ) را یک **فضای توپولوژیک** می‌گوییم. وقتی که روی X یک توپولوژی وجود داشته باشد، معمولاً می‌گوییم، X یک فضای توپولوژیک می‌باشد. اعضای توپولوژی را مجموعه‌های **باز** گوییم و مجموعه‌ای را **بسته** گوییم هر گاه، متمم آن متعلق به توپولوژی باشد.

تعریف ۶.۱ خانواده $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ را یک **پوشش** (باز) برای زیرمجموعه B از فضای توپولوژیک X گوییم هر گاه، $B \subseteq \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. زیرمجموعه K از فضای توپولوژیک X را فشرده گوییم هرگاه، هر پوشش باز آن دارای یک زیرپوشش باز متناهی باشد.

تعریف ۷.۱ فضای توپولوژیک X را **هاسدورف** گوییم هر گاه، برای هر دو نقطه متمایز در X دو همسایگی جدا از هم از آنها موجود باشد.

تذکر ۸.۱ در سراسر این بحث I و J مجموعه‌های اندیس گذار و توپولوژی‌ها را هاسدورف در نظر می گیریم .

گزاره ۹.۱ هر زیر مجموعه بسته از یک مجموعه فشرده، فشرده است.

قضیه ۱۰.۱ اشتراک زیرمجموعه های فشرده از فضای توپولوژی X، که دارای خاصیت اشتراک متناهی باشند ناتهی است .

تعریف ۱۱.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را پیوسته گوییم هر گاه، تصویر وارون هر مجموعه باز در Y، در X باز باشد.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنیم برای هر $i \in I$، X_i یک فضای توپولوژیک باشد و $X = \prod_{i\in I} X_i$. برای هر $i \in I$ نگاشت $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ را نگاشتهای تصویری گوییم که:

$$\pi_i(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots) = x_i.$$

دراین صورت کوچکترین توپولوژی که روی آن نگاشتهای تصویری پیوسته باشند را **توپولوژی حاصلضربی** گوییم.

قضیه ۱۳.۱ [۱۴] **قضیه تیخونوف.** حاصلضرب هر تعداد از فضاهای فشرده، فشرده است.

تعریف ۱۴.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $Y \subseteq X$. در این‌صورت، گوییم X یک توپولوژی بر Y القا می‌کند که اعضای آن به این صورت می‌باشند که V در Y باز است هرگاه، یک مجموعه باز U در X وجود داشته باشد به طوری‌که، $V = U \cap Y$. در این‌صورت توپولوژی حاصل را **توپولوژی القایی** گوییم.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. در این‌صورت، **درون** A را که با A° یا $\mathrm{int}(A)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup\{U : U \subseteq A, U \in \tau\}.$$

به عبارت دیگر $\mathrm{int}(A)$ برابر است با، بزرگترین مجموعه باز در X که مشمول در A می‌باشد.

تعریف ۱۶.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$ در این‌صورت، **بستار** A را که با $\overline{A}$ یا $\mathrm{cl}(A)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathrm{cl}(A) = \bigcap\{F : A \subseteq F, F^c \in \tau\}.$$

به عبارت دیگر $\mathrm{cl}(A)$ برابر است با، کوچکترین مجموعه بسته در X که شامل A می‌باشد.

تعریف ۱۷.۱ [۵] فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. خانواده $\{\beta_j\}_{j\in J}$ راکه در آن $\beta_j \in C(X,[0.1])$ یک **افراز واحد** روی X گوییم هر گاه،

(۱) برای هر $x \in X$، یک همسایگی از x وجود داشته باشد که روی آن تعداد متناهی از β_j ها، مخالف صفر باشند،

(۲) برای هر $x \in X$، $\sum\limits_{j\in J} \beta_j(x) = 1$.

تعریف ۱۸.۱ [۱۴] فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. یک افراز واحد $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$ را **وابسته به یک پوشش باز** $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ از فضای توپولوژیک X گوییم هر گاه، به ازای هر $\alpha \in A$، یک U_β در $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ وجود داشته باشد به طوری‌که، $\mathrm{supp}(h_\alpha) \subseteq U_\beta$.

قضیه ۱۹.۱ [۵] فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و K یک زیر مجموعه فشرده (نا تهی) از X باشد. در این‌صورت، برای هر پوشش باز متناهی K، یک افراز واحد نسبت به این پوشش موجود است.

۱—۴ فضای برداری توپولوژی

تعریف ۲۰.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان F باشد. دراین‌صورت X را یک **فضای برداری توپولوژیک** گوییم، اگر روی X یک توپولوژی وجود داشته باشد به طوری‌که، توابع جمع و ضرب اسکالر پیوسته باشند.

تعریف ۲۱.۱ در یک فضای برداری X، **غلاف محدب** (**پوشش محدب**) برای یک $A \subset X$ متناهی بصورت زیر تعریف می شود:

$$co(A) = \{\sum_{i=0}^{n} t_i a_i,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ 0 \leq t_i \leq 1,\ a_i \in A\}.$$

برای هر $E \subset X$ دلخواه تعریف می کنیم:

$$co(E) = \bigcup \{co(A), A \subset E, |A| < \infty\}.$$

تعریف ۲۲.۱ n—**سادک استاندارد** Δ_n بارئوس $e_0, e_1, \ldots, e_n$، بصورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta_n = co(e_0, e_1, \ldots, e_n) = \{\sum_{i=0}^{n} t_i e_i,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ 0 \leq t_i \leq 1\}.$$

که در آن برای $i = 0, 1, \ldots, n$، $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$ عنصری است در R^{n+1}، با عدد ۱ در مولفه iام و ۰ در سایر مولفه ها.

۱—۵ نگاشتهای چند مقداری

تعریف ۲۳.۱ [۵] یک **نگاشت چند مقداری** $F : X \multimap Y$، یک تابع از مجموعه X به 2^Y (مجموعه توانی Y) است، که در واقع یک تابع است با مقادیر $F(x) \subseteq Y$ برای هر $x \in X$. $F^{-}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$ یک **لایه** برای هر $y \in Y$ نامیده می شود. برای مجموعه $A \subseteq X$، تعریف می کنیم $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$. برای فضاهای توپولوژی X و Y، نگاشت چند مقداری $F : X \multimap Y$ فشرده است هرگاه $T(X)$ در یک زیر مجموعه فشرده از Y جای بگیرد.

تعریف ۲۴.۱ [۵] فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک هستند. یک تابع چند مقداری $T : X \multimap Y$ را **نیم پیوسته بالایی** گوییم هرگاه، به ازای هر زیرمجموعه باز B از Y، $T^U(B) = \{x \in X : T(x) \subseteq B\}$ در X باز باشد.

تعریف ۲۵.۱ [۵] فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک هستند. یک تابع چند مقداری $T : X \multimap Y$ را **نیم پیوسته پایینی** گوییم هرگاه، به ازای هر زیرمجموعه باز B از Y، $T^l(B) = \{x \in X : T(x) \cap B \neq \emptyset\}$ در X باز باشد.

تعریف ۲۶.۱ [۵] فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک هستند. یک تابع چند مقداری $T : X \multimap Y$ را **باز مقدار** (بسته مقدار) گوییم، هر گاه برای هر $x \in X$، $T(x)$ یک مجموعه باز (بسته) در Y باشد.

تعریف ۲۷.۱ [۱۳] فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک هستند. یک تابع چند مقداری $T : X \multimap Y$ را **انتقال باز مقدار** گوییم؛ هر گاه برای هر $x \in X, y \in T(x)$ یک $x_\circ \in X$ وجود داشته باشد به طوری که، $y \in \text{int}T(x_\circ)$.

تعریف ۲۸.۱ [۱۳] فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک هستند. یک تابع چند مقداری $T : X \multimap Y$ را **انتقال بسته مقدار** گوییم، هر گاه برای هر $x \in X, y \notin T(x)$ یک $x_\circ \in X$ وجود داشته باشد به طوریکه، $y \notin \text{cl}T(x_\circ)$.

نتیجه ۲۹.۱ هر نگاشت چند مقداری باز(بسته) مقدار، یک انتقال باز(بسته) مقدار است.

گزاره ۳۰.۱ فرض X یک مجموعه و Y یک فضای توپولوژی باشد. نگاشت چند مقداری $F : X \longrightarrow Y$، یک انتقال بسته مقدار است اگروتنهااگر نگاشت چند مقداری $G = Y \setminus F : X \multimap Y$، یک انتقال باز مقدار باشد.

اثبات: با توجه به تعاریف ذکر شده اثبات واضح است. □

لم ۳۱.۱ فرض X یک مجموعه ناتهی، Y یک فضای توپولوژی و $G : X \multimap Y$ یک نگاشت چند مقداری باشد. آنگاه:

(۱) G انتقال بسته مقدار است اگروتنهااگر

$$\bigcap_{x\in X} G(x) = \bigcap_{x\in X} \overline{G(x)}. \qquad (*)$$

(۲) G انتقال باز مقدار است اگروتنهااگر

$$\bigcup_{x\in X} G(x) = \bigcup_{x\in X} int(G(x)). \qquad (**)$$

اثبات: (۱) فرض کنید G یک انتقال بسته مقدار است ولی

$$\bigcap_{x\in X} \overline{G(x)} \not\subseteq \bigcap_{x\in X} G(x).$$

پس $y \in \bigcap_{x\in X} \overline{G(x)}$ وجود دارد بطوریکه $y \notin \bigcap_{x\in X} G(x)$. بنابراین $x \in X$ وجود دارد بطوریکه $y \notin G(x)$. چون G یک انتقال باز مقدار است، یک $\bar{x} \in X$ وجود دارد بطوریکه $y \notin \overline{G(\bar{x})}$ و در نتیجه $y \notin \bigcap_{x\in X} \overline{G(x)}$. این تناقض دارد بااینکه $y \in \bigcap_{x\in X} \overline{G(x)}$. پس

$$\bigcap_{x\in X} \overline{G(x)} \subseteq \bigcap_{x\in X} G(x).$$

از طرفی همواره $\bigcap_{x\in X} \overline{G(x)} \subseteq \bigcap_{x\in X} G(x)$. بنابراین $(*)$ بدست می آید.
بعکس فرض $(*)$ برقرار باشد. برای هر $x \in X$، اگر $y \notin G(x)$ باشد آنگاه $\bigcap_{x\in X} \overline{G(x)} = \bigcap_{x\in X} G(x) \not\ni y$ و بنابراین $\bar{x} \in X$ وجود دارد بطوریکه $y \notin \overline{G(\bar{x})}$. پس G یک انتقال بسته مقدار است .

(۲) نگاشت چند مقداری $F : X \longrightarrow Y$ را بصورت $F(x) = Y \setminus G(x)$، برای هر $x \in X$ تعریف کنید. بنابراین با توجه به گزاره ۳۰.۱، G انتقال باز مقدار است اگروتنهااگر F انتقال بسته مقدار باشد. با توجه به بند (۱) همین قضیه $\bigcap_{x\in X} \overline{F(x)} = \bigcap_{x\in X} F(x)$. حال با متمم گیری از طرفین تساوی داریم:

$$\bigcup_{x\in X} G(x) = \bigcup_{x\in X} int(G(x)).$$

$\square$

لم ۳۲.۱ فرض X و Y فضاهای توپولوژی و $G : X \multimap Y$ یک نگاشت چند مقداری باشد. آنگاه:

(۱) $G(x)$ به ازای هر $x \in X$ ناتهی است،

(۲) G^- انتقال باز مقدار است.

اگروتنهااگر

$$X = \bigcup_{y\in Y} int(G^-(y)). \qquad (*)$$

اثبات: $\Leftarrow$ اگر برای هر $x \in X$، $G(x)$ ناتهی باشد آنگاه یک $y \in G(x)$، به ازای هر $x \in X$ وجود دارد، یعنی $x \in G^-(y)$. بنابراین $X = \bigcup_{y\in Y} G^-(y)$. اما چون G^- انتقال باز مقدار است با

توجه به لم ۱.۳۱، داریم :

$$.X = \bigcup_{y\in Y} G^{-}(y) = \bigcup_{y\in Y} int(G^{-}(y))$$

$\Leftarrow$ فرض $x \in X$ باشد. آنگاه $x \in \bigcup_{y\in Y} int(G^{-}(y)) \subseteq \bigcup_{y\in Y} G^{-}(y)$. بنابراین $y \in Y$ وجود دارد بطوریکه $x \in G^{-}(y)$ و $y \in G(x)$. پس $G(x)$ ناتهی است. بعلاوه برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ با $y \in G^{-}(x)$، از رابطه $(*)$، یک $\bar{y} \in Y$ هست که $x \in int(G^{-}(\bar{y}))$. پس G^{-} یک انتقال باز مقدار است.

□

تعریف ۱.۳۳ [۱۴] فرض کنیم $F : X \multimap Y$ یک نگاشت چند مقداری باشد. آنگاه $x \in X$ را **نقطه ثابت** برای F گوییم هر گاه $x \in F(x)$.

تعریف ۱.۳۴ [۵۱] فرض کنیم $S : X \multimap Y$ و $T : Y \multimap X$ نگاشتهای چند مقداری باشند. آنگاه $(x, y) \in X \times Y$ را **نقطه انطباق** گوییم هر گاه $x \in T(y)$ و $y \in S(x)$.

تعریف ۱.۳۵ [۵۱] فرض کنیم $S : X \multimap Y$ و $T : X \multimap Y$ نگاشتهای چند مقداری باشند. آنگاه $(x, y) \in X \times Y$ را **نقطه انطباق** گوییم هر گاه $T(x) \cap S(x) \neq \emptyset$.

فصل ۲

قضایای نقطه ثابت

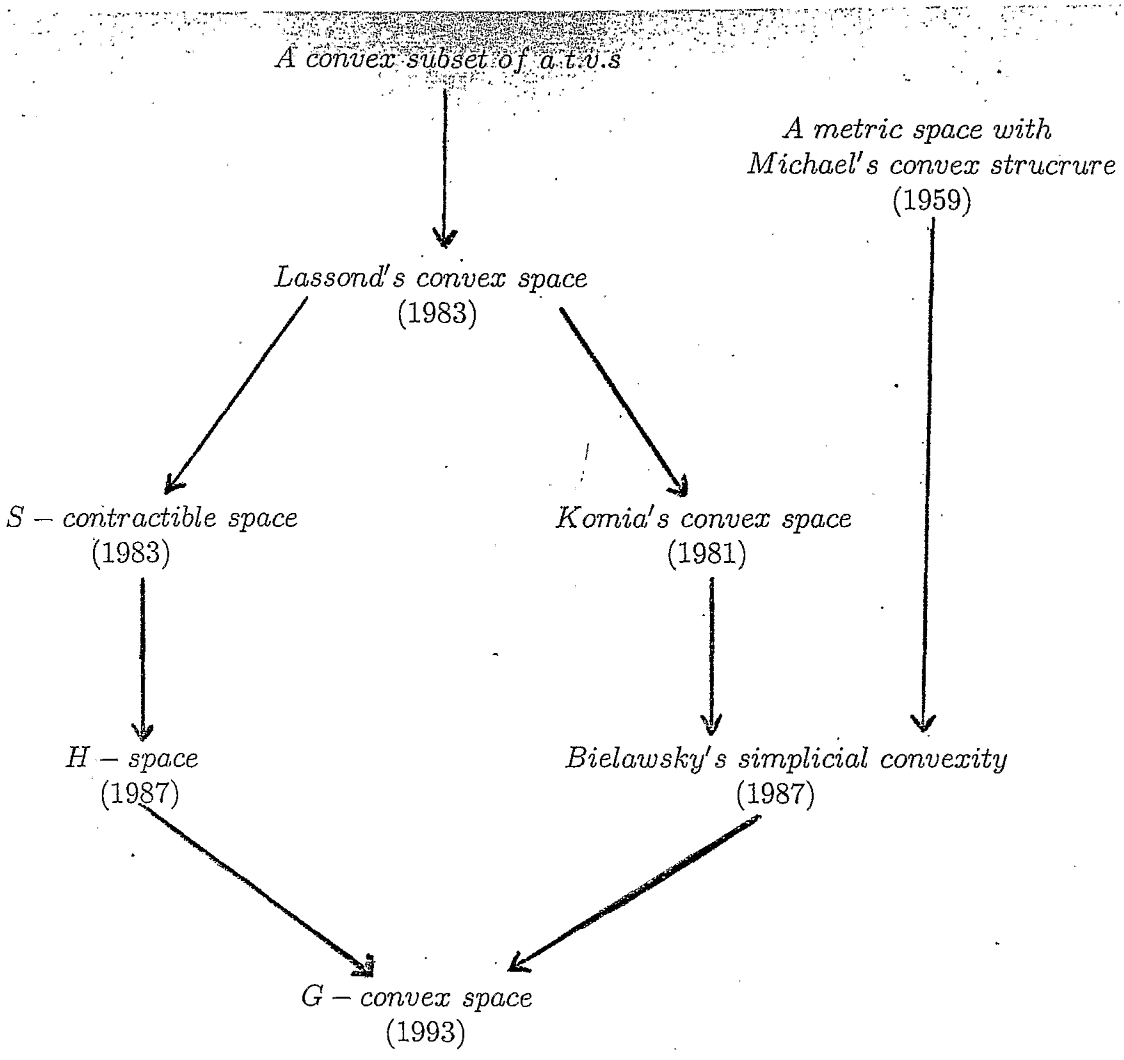
۲—۱ مقدمه

قضایای نقطه ثابت به عنوان یک موضوع جذاب در ریاضیات محض و کاربردی همواره مورد توجه ریاضیدانان بوده است، علی الخصوص که این قضایا رابط مهمی است مابین آنالیز غیر خطی و بقیه قسمتهای پیشرفته علوم که کاربردهای فراوانی در علوم مهندسی، معادلات دیفرانسیل و فیزیک کاربردی دارند. در هر صورت این دلیل محکمی است برای اینکه این دسته از قضایا مورد مطالعه قرار گیرند در فضایی که خود تعمیم فضای برداری، و بسیاری از فضاها با ساختار محدب است، یعنی فضای محدب تعمیم یافته. ابتدا به معرفی این فضا می پردازیم.

۲—۲ فضاهای محدب تعمیم یافته

مفهوم فضای محدب تعمیم یافته اولین بار در سال (۱۹۹۳) توسط پارک و کیم (Park, Kim) در [۴۴] ارائه شده است، که خود تعمیم دهنده بسیاری از فضاهایی بود که تا آن زمان و در طول سالیان دراز به عنوان تعمیمی از مفهوم تحدب در فضاهای برداری معرفی شده بودند. در نمودار زیر مراحل طی این روند بطور مختصر نشان داده شده است که همگی حالت خاصی از یک فضای محدب تعمیم یافته خواهند بود. البته در نمودار سعی شده است تا معروفترین فضاها از این دست نشان داده شود برای مطالعه بیشتر در مورد فضاهای ذکرشده در نمودار، و فضاهای دیگر ذکر نشده به [۳۵] مراجعه کنید:

نمودار:


A convex subset of a.t.v.s
A metric space with
Michael's convex strucrure
(1959)
Lassond's convex space
(1983)
S – contractible space
(1983)
Komia's convex space
(1981)
H – space
(1987)
Bielawsky's simplicial convexity
(1987)
G – convex space
(1993)