دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

موضوع:

شرایط دقیق ستاره‌گونی برای توابع تحلیلی با مشتقات کراندار

استاد راهنما:

دکتر رسول آقالاری

نام دانشجو:

الهه سلیمانی

زمستان ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به روح پاک پدرم؛

گرچه در این مدت حضور سبزش گرمابخش وجودم نبود اما او بود که

عشق علم و معرفت را در جانم به ودیعه گذاشت و جوانه علم و دانش را در وجودم شکوفا ساخت،

یادش در قلبم تا ابد مایه استواری من خواهد بود.

تقدیم به مادرم؛

آن وجود تکرار ناپذیر آفرینش،

که همانند شمعی فروزان دلسوزانه خویش را فدای میوه‌های زندگانیش ساخت.

او که بودنش تاج افتخاری ست بر سرم و آفتاب مهرش در آستانه قلبم همیشه پابرجاست.

الهه سلیمانی

زمستان ۹۲

سپاس گزاری...

سپاس و ستایش مرخدای را عزوجلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن،تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار،درخشان.آفریدگاری که خویش را به ما شناساند و درهای علم و معرفت را بر ما گشود و عمری و خدمتی عطا فرمود تا بدان،بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.و سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم،اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او با زبان قاصر و دست ناتوان چیزی بنگاریم.اما از آنجایی که تجلیل از معلم،سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانتهایی را که به دستش سپرده‌اند تضمین،بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکرالمخلوق لم یشکرالخالق"

از مادر عزیزم بخاطر تمام محبتها،مهربانیها و دل‌گرمي‌هاي بي‌دريغش،

از استاد صبور و باتقوا جناب دکتر رسول آقالاری که در کمال سعه صدر با حسن خلق و

فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننموده‌اند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفته‌اند،

از اساتید باکمالات و شایسته آقایان دکتر سعید شمس و دکتر سعید استادباشی که زحمت داوری این پایان‌نامه را برعهده گرفته‌اند،

کمال تشکر و قدردانی را دارم باشد که بتوانم بخشی از زحمات آنان را سپاس گویم.

الهه سلیمانی

زمستان ۹۲

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه شرایط دقیق ستاره‌گونی برای توابع تحلیلی با مشتقات کراندار بررسی شده است.و همچنین برد مجموعه $\{\frac{zf'(z)}{f(z)}; z \in \mathbb{D}, f \in \mathcal{J}_\lambda\}$ مورد مطالعه قرار مي‌گیرد.که در آن $\mathcal{J}_\lambda$ توابع تحلیلی نرمالیزه در دیسک واحد با شرط $|f'(z) - ۱| \leqslant \lambda$ مي‌باشد. هدف اصلی این پایان‌نامه تعمیم قضیه (۴.۲.۳) و فراهم آوردن راههای مختلف برای بدست آوردن کران دقیق برای توابع ستاره‌گون است.

واژگان کلیدی

توابع تک‌ارز- توابع تحلیلی- توابع ستاره‌گون- توابع قویاً ستاره‌گون

پیشگفتار

این پایان‌نامه در ۳ فصل نوشته شده است.

در فصل اول مطالب مورد نیاز برای فصول بعدی آورده شده است، که شامل ۴ بخش است.

در بخش اول تعاریف و قضایای مقدماتی را بیان می‌کنیم. در بخش دوم ابتدا توابع تک‌ارز [۱] را تعریف کرده سپس به بیان قضایای مهم در این زمینه می‌پردازیم و در بخش‌های سوم و چهارم توابع ستاره‌گون [۲] و محدب [۳] (به ترتیب) را تعریف نموده و قضایای مهمی را در این زمینه بیان می‌کنیم.

فصل دوم شامل ۷ بخش است. در بخش اول مفهوم پیروی دیفرانسیلی و قضایایی در این مورد را بیان می‌کنیم. در بخش دوم کلاس توابع بطوریکنواخت محدب، در بخش سوم

[۱] Univalent

[۲] Starlike

[۳] Convex

توابع $k-$یکنواخت محدب را تعریف کرده و به دو ویژگی این توابع اشاره می‌کنیم و در بخش چهارم ویژگی‌های این توابع بازای $0 \leqslant k < \infty$ بررسی شده و مقاطع مخروطی را بازای مقادیر مختلف معرفی می‌کنیم. در بخش پنجم کلاس توابع ستاره‌گون سهموی (S_p) تعریف شده و ارتباط آن با کلاس‌های دیگر بررسی شده است. بخش ششم کلاس توابع بطور یکنواخت ستاره‌گون می‌باشد و در بخش هفتم کلاس توابع ستاره‌گونی نسبت به نقاط متقارن بررسی شده است.

فصل سوم شامل ۲ بخش است. در بخش اول نواحی $\Gamma_\lambda(b)$و $\Omega_{\lambda,c}$ معرفی شده‌اند و قضایای بسیار مهمی که در بخش‌های بعدی کاربرد فراوانی دارد بیان شده است. در بخش دوم مرز $\Omega_{\lambda,c}$بررسی شده و قضایا و نتایج اصلی این پایان‌نامه آورده شده است. این پایان‌نامه بر اساس مقاله زیر

Frode Running, Stephan Ruscheweyh and Nikolas Samaris, Sharp starlikeness conditions for analytic functions with bounded derivative. J. Austral. Math. Soc. (series A) 69(2000),303-315

مي‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیّه

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱. دیسک واحد باز را با $\mathbb{D}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; \quad |z| < ۱\}$$

و داریم:

$$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}; \quad |z| \leq ۱\}$$

تعریف ۲.۱.۱. هر مجموعه‌ی باز و همبند غیر تهی در $\mathbb{C}$ را یک ناحیه در $\mathbb{C}$ می‌نامیم .

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد که در آن Ω یک مجموعه‌ی

باز می‌باشد در این صورت گوییم f در نقطه $z_\circ \in \Omega$ مشتق پذیر است هر گاه:

$$\lim_{z \to z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}$$

موجود باشد و آنرا با $f'(z_\circ)$ نمایش می دهیم.حال هرگاه f در هر نقطه $z_\circ \in \Omega$ مشتق پذیر باشد می‌گوییم f در Ω تحلیلی[1] است.

تذکر ۴.۱.۱ . رده تمام توابع تحلیلی در ناحیه Ω را با $H(\Omega)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $H(\mathbb{D})$ کلاس تمام توابع تحلیلی در دیسک واحد باز $\mathbb{D}$ باشد. قرار مي‌دهيم:

$$A_n = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) | f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right\}$$

و همچنين قرار مي‌دهيم:

$$A = A_1 = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) | f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right\}$$

در واقع A مجموعه تمام توابع تحليلي f در ديسك واحد $\mathbb{D}$ با شرط نرماليزه:

$$f(0) = 0 \qquad , \qquad f'(0) = 1$$

مي‌باشد.

تعریف ۶.۱.۱. تابع f تعریف شده در Ω به وسیله سری توانی در Ω قابل نمایش است اگر به هر دیسک $D(a, r) \subset \Omega$ یک سری توانی مانند $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n$ چنان نظیر باشد که به ازای

[1] Analytic

هر $z \in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

قضیه ۷.۱.۱. *هر گاه f به وسیله سری توانی در Ω قابل نمایش باشد، آنگاه $f \in H(\Omega)$ است و f' نیز به وسیله سری توانی در Ω قابل نمایش است در واقع هر گاه به ازای $z \in D(a,r)$ داشته باشیم:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

آنگاه:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

برهان. به مرجع[۸] ،قضیه ۶.۱۰ مراجعه شود. $\square$

قضیه ۸.۱.۱. *به ازای هر مجموعه‌ی باز Ω در صفحه، هر تابع تحلیلی f در Ω به وسیله سری توانی قابل نمایش است.*

برهان. به مرجع [۸] ،قضیه ۱۶.۱۰ مراجعه شود. $\square$

نتیجه ۹.۱.۱. *اگر $f \in H(\Omega)$ آنگاه $f' \in H(\Omega)$.*

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم f نگاشت پیوسته‌ای باشد، f را در نقطه z_0 حافظ زاویه گوییم هر گاه f اندازه زاویه بین خمهای گذرنده بر نقطه‌ی مفروض z_0 را حفظ کند. حال اگر نگاشت f علاوه بر حافظ زاویه بودن، حافظ جهت نیز باشد یعنی جهت زوایای گذرنده بر

نقطه $z_\circ$ را نیز حفظ کند f در $z_\circ$ همدیس[۲] است.

قضیه ۱۱.۱.۱. *هرگاه $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد، آنگاه f در هر نقطه‌ی $z_\circ \in G$ که $f'(z_\circ) \neq \circ$ باشد همدیس است.*

برهان. اثبات: به مرجع[۸]،قضیه ۲.۱۴ مراجعه شود. □

مثال ۱۲.۱.۱. تابع $f(z) = e^z$ روی $\mathbb{C}$ نگاشتی همدیس است. زیرا e^z تابعی تام است و به ازای هر $z \in \mathbb{C}$، $f'(z) \neq \circ$ است.

مثال ۱۳.۱.۱. نگاشت $f(z) = z^۲$ در هر نقطه‌ی $z_\circ \neq \circ$ همدیس است. زیرا مشتق آن یعنی $f'(z) = ۲z$ در $z_\circ$، مخالف صفر هست. اما $f(z) = z^۲$ در نقطه‌ی $z = \circ$،که f' صفر می‌شود همدیس نیست. زیرا در واقع

$$arg f(z) = arg z^۲ = ۲ arg z$$

این نگاشت هر زاویه به راس مبدا مختصات را دو برابر می‌کند.

قضیه ۱۴.۱.۱ (نگاشت باز[۳]). *فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده و f تابع تحلیلی و غیرثابت در Ω باشد، آنگاه برای هر مجموعه باز U در Ω، $f(U)$ باز است.*

برهان. به مرجع[۸]،قضیه ۳۲.۱۰ مراجعه شود. □

---

[۲] Conformal map

[۳] Open mapping theorem

قضیه ۱۵.۱.۱ (مدول ماکزیمم [۴]). *فرض کنیم Ω یك ناحیه بوده و $f \in H(\Omega)$ و $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ باشند.در اینصورت*

$$|f(a)| \leqslant Max|f(a+re^{i\theta})|, \qquad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$$

همچنین، تساوي در رابطه‌ي بالا برقرار است اگروفقط‌اگر f در Ωثابت باشد.در نتیجه $|f|$ در هیچ نقطه از Ω ماکزیمم موضعي ندارد مگر f ثابت باشد.

برهان. به مرجع[۸]،قضیه ۲۴.۱۰ مراجعه شود. □

تعریف ۱۶.۱.۱. تابع حقیقي مقدار u همساز نامیده مي‌شود هر گاه u داراي مشتقات مرتبه دوم پیوسته در Ω بوده و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ (خاصیت مقدار میانگین). اگر $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یك تابع همساز باشد و$\overline{D(a,r)} \subset \Omega$

آنگاه

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta}) d\theta$$

قضیه ۱۸.۱.۱ (اصل ماکزیمم[۵]). *فرض کنیم Ωیك ناحیه و uیك تابع پیوسته حقیقي مقدار روي Ω با خاصیت مقدار میانگین باشد. اگر نقطه‌اي چون $a \in \Omega$موجود باشد بطوریکه براي*

[۴]Maximum modulus theorem

[۵]Maximum princeple

هر $z \in \Omega$، $u(a) \geqslant u(z)$ باشد آنگاه u یك تابع ثابت است.

برهان. به مرجع[۸]،قضیه ۲۴.۱۰ مراجعه شود. □

قضیه ۱۹.۱.۱ (اصل مدول مینیمم براي توابع همساز[۶]). *فرض کنیم Ω یک ناحیه و u یک تابع پیوسته حقیقی مقدار روی Ω با خاصیت مقدار میانگین باشد. اگر نقطه‌ای چون $a \in \Omega$ موجود باشد بطوریکه برای هر $z \in \Omega$، $u(a) \leqslant u(z)$ باشد آنگاه u یک تابع ثابت است.*

برهان. به مرجع[۸] مراجعه شود. □

تعریف ۲۰.۱.۱. تابع $f \in H(\mathbb{D})$ را تابع شوارتز[۷] می‌نامیم هر گاه داشته باشیم:

(۱)برا ی هر $z \in \mathbb{D}$، $|f(z)| \leqslant ۱$;

(۲) $f(۰) = ۰$

لم ۲۱.۱.۱ (لم شوارتز[۸]). *اگر $f \in H(\mathbb{D})$ یک تابع شوارتز باشد، آنگاه*

$$|f(z)| \leqslant |z| \qquad (z \in \mathbb{D})$$

و

$$|f'(۰)| \leqslant ۱$$

[۶]Minimum princeple

[۷]Schwarz function

[۸]Schwarz Lemma

بعلاوه اگر $|f'(0)| = 1$ *و یا برای* $z \in \mathbb{D}$ $z \neq 0$ **داشته باشیم** $|f(z)| = |z|$*، آنگاه* **عدد ثابت** λ **موجود** *است بطوریکه براي هر* $z \in \mathbb{D}$*،* $|\lambda| = 1$ *و* $f(z) = \lambda z$.

برهان. به مرجع[۸]،قضیه ۲.۱۲ مراجعه شود. □

۲.۱ توابع تک‌ارز

تعریف ۱.۲.۱. تابع مختلط f روی $\mathbb{D}$ را تک‌ارز[۹] گوییم، هرگاه به‌ازای هر دو نقطه متمایز z_1و z_2 از $\mathbb{D}$ داشته باشیم:

$$f(z_1) \neq f(z_2), \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{D})\cdot$$

تعریف ۲.۲.۱. تابع fرا در نقطه $z_0 \in \mathbb{D}$ موضعا تک‌ارز گوییم، هرگاه در یک همسایگی z_0 تک‌ارز باشد.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه تمام توابع تحلیلی و تک‌ارز f که در دیسک واحد $\mathbb{D}$ تعریف شده و در شرایط نرمالیزه $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ صدق می‌کند را با Sنمایش می‌دهیم.

می‌توان دید که هر $f \in S$ دارای بسط تیلور به‌فرم زیر است:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1$$

کلاس S تحت جمع یا ضرب بسته نیست،لذا فضاي برداري نمي‌باشد.

[۹] Univalent

مثال ۴.۲.۱. تابع کوبه

$$k(z)=\frac{z}{(۱-z)^۲}=z+۲z^۲+\dots$$

تابع تحلیلی در کلاس S است که $\mathbb{D}$ را به کل $\mathbb{C}$ به‌استثناء آن قسمت از محور حقیقی که از $-\frac{۱}{۴}$ تا $-\infty$ قرار دارد تصویر می‌کند.

حال می‌خواهیم یک توصیف هندسی برای برد اعضای Sارائه دهیم.

قضیه ۵.۲.۱. *اگر $f\in S$ و $f(z)\neq w$، آنگاه*

$$g(z)=\frac{wf(z)}{w-f(z)}\in S$$

برهان. به مرجع[۱]،صفحه ۲۷ مراجعه شود. □

قضیه ۶.۲.۱ (بایبرباخ). *هرگاه $f\in S$ و*

$$f(z)=z+\sum_{k=۲}^{\infty}a_kz^k$$

در این‌صورت $|a_۲|\leqslant ۲$.

برهان. به مرجع[۱]،قضیه ۲.۲ مراجعه شود. □

قضیه ۷.۲.۱ ($\frac{۱}{۴}$کوبه [۱۰]). *فرض کنیم $f\in S$ در اینصورت f قرص به مرکز مبدأ و شعاع $\frac{۱}{۴}$ را می‌پوشاند، یعنی*

$$D(۰,\frac{۱}{۴})\subseteq f(\mathbb{D})$$

[۱۰] Koobe on quarter theorem

برهان. به مرجع[۱]،قضیه ۲.۳ مراجعه شود. □

۳.۱ توابع ستاره‌گون

در این بخش با استفاده از مفهوم ستاره‌گونی، زیرکلاس جدیدی از S را تعریف می‌کنیم و سپس شرط معادل تحلیلی را برای آن معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. ناحیه $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ را نسبت به نقطه ثابت $z_\circ$ ستاره‌گون[۱۱] گوییم، هرگاه هر پاره‌خط مستقیمی که نقاط Ω را به $z_\circ$ وصل می‌کند، کاملا داخل Ω قرار گیرد.

تعریف ۲.۳.۱. تابع $f \in S$ را نسبت به مبدأ ستاره‌گون (یا بطور خلاصه ستاره‌گون) گوییم اگر چنانچه قرص واحد باز، تحت تابع f بر دامنه‌ای که نسبت به $z_\circ = \circ$ ستاره‌گون است نگاشته شود.

این زیررده از S را با S^* نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنیم $f \in S$، آنگاه $f \in S^*$ اگروتنهااگر*

$$Re\Big\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\Big\} > \circ \quad , \quad (z \in \mathbb{D}).$$

برهان. به مرجع[۱]،قضیه ۲.۱۰ مراجعه شود. □

[۱۱] Starlike

نکته ۴.۳.۱ . با توجه به قضیه‌ی فوق یک توصیف تحلیلی برای S^* بصورت زیر می‌باشد:

$$S^* = \Big\{ f \in S : \quad Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} > ۰ \Big\}\cdot$$

مثال ۵.۳.۱. تابع کوبه $k(z) = \dfrac{z}{(۱-z)^۲}$ یک تابع ستاره‌گون است. زیرا داریم:

$$Re\Big\{ z\frac{k'(z)}{k(z)} \Big\} = Re\Big\{ \frac{۱+z}{۱-z} \Big\} > ۰\cdot$$

تعریف ۶.۳.۱. گوییم $f \in S$ ستاره‌گون از مرتبه $۰ \leqslant \alpha < ۱$ است، هرگاه

$$Re\Big\{ z\frac{f'(z)}{f(z)} \Big\} > \alpha, \quad (z \in \mathbb{D})\cdot$$

مجموعه این توابع را با $S^*(\alpha)$ نمایش می‌دهیم. بعبارت دیگر

$$S^*(\alpha) = \Big\{ f \in S : \quad Re\Big\{ z\frac{f'(z)}{f(z)} \Big\} > \alpha \Big\}\cdot$$

قرار می‌دهیم $S^*(۰) = S^*$.

تذکر ۷.۳.۱ .

$$S^*(\alpha) \subseteq S^*(۰) = S^* \qquad (۰ \leqslant \alpha < ۱)\cdot$$

تعریف ۸.۳.۱. تابع $f \in A$ به‌طور قوی ستاره‌گون[۱۲] از مرتبه‌ی $۰ < \alpha \leqslant ۱$ است اگروتنهااگر

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec (\frac{۱+z}{۱-z})^{\alpha}, \quad (z \in \mathbb{D})\cdot$$

[۱۲] strongly starlike