بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده علوم ـ گروه ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

قابهای ریس و تقریب ضرایب قاب

مؤلف:

شهرام بنایی

استاد راهنما:

دکتر اکبر نظری

تیرماه ۱۳۸۲

بسمه تعالی

این پایان نامه
به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

گروه ریاضی
دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

داور ۱ : دکتر محمد علی دهقان

داور ۲ : دکتر عطاء اله عسکری همت

استاد راهنمای پایان نامه : دکتر اکبر نظری

نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر حسن رنجبر عسکری

دانشجو : شهرام بنایی

تقدیم به بهترین‌های زندگی‌ام:

ـ پدر و مادر عزیز و دو خواهر مهربانم

که هرچه دارم از آنهاست.

ـ معلم و استاد راهنمای بزرگوارم

که به من اندیشیدن را آموخت.

تشکر و قدردانی

«من علّمنی حرفاً فقد صیّرنی عبداً»

سپاس یزدان پاکی که در فضای تحقیق و پژوهش مرا در جوار آموزگاران اندیشه‌های بزرگ و ناب نشاند و کسانی را سر راه من قرار داد که انسانهای والامقام و نیک نفس بودند، یا از چشمه فیاض و جوشان علمشان سیراب شدم و یا مرهون عواطف و مراحم بی‌شائبه آنان گشتم.

از استاد راهنمای پایان‌نامه‌ام جناب آقای دکتر اکبر نظری از دانشگاه شهید باهنر کرمان، که در تمام مراحل تهیه این پایان‌نامه از نظرات گرانقدرشان استفاده کردم و در محضرش علاوه بر درس ریاضی درس زندگی نیز آموختم، نهایت تشکر و قدردانی خود را ابراز می‌نمایم و از خداوند منان عمری سراسر سربلندی و سرافرازی برایشان آرزومندم. همچنین از جناب آقای دکتر محمدعلی دهقان و جناب آقای دکتر عطاءالله عسکری‌همت که زحمت مطالعه و داوری این رساله را پذیرفتند سپاسگزارم.

از کلیه عزیزانی که مرا در تهیه این رساله یاری فرمودند، خصوصاً جناب آقای دکتر یدالله نژاددهقان (دانشگاه تبریز) و سرکار خانم مانی که با دقت و ظرافت مراحل تایپ رساله را انجام دادند، نهایت امتنان را دارم.

در آخر از مهربانترین همراهان زندگی‌ام، پدر و مادر عزیز و بزرگوارم که در تمامی مراحل زندگی از جمله تحصیل، پشتیبان و مشوق من بودند از صمیم قلب و با تمام وجود تشکر و قدردانی می‌کنم.

شهرام بنایی

تیرماه ۱۳۸۲

چکیده

یک قاب، خانواده‌ای است مانند $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت H، با این خاصیت که هر عضو این فضا می‌تواند به صورت ترکیبات خطی از عناصر قاب نوشته شود. نظریه قابها، چگونگی انتخاب ضرایب متناظر را که ضرایب قاب نامیده می‌شوند توصیف می‌کند. از نقطه نظر کاربردی، به دست آوردن ضرایب قاب مسأله مشکلی است. زیرا نیاز به محاسبهٔ معکوس یک عملگر در فضای هیلبرت H دارد. برای حل این مشکل روشی به نام روش تصویری معرفی می‌گردد. اساس روش تصویری در نظر گرفتن زیرخانواده‌های متناهی $\{f_i\}_{i=1}^{n}$، از قاب و تصویر متعامد P_n به روی ترکیباتش می‌باشد. برای $f \in H$، $P_n f$ به صورت ترکیب خطی از f_iها که $(i = 1, 2, \ldots, n)$ نمایش داده می‌شود طوری که ضرایب متناظر می‌توانند با به کار بردن روشهای بعد متناهی محاسبه شوند. به همین روش جواب مسأله گشتاور را نیز تقریب می‌زنیم.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
پیش گفتار	۱
فصل ۰ نمادها و پیش‌نیازها	۳
فصل ۱ قابها و خواص آنها در فضای هیلبرت	۱۵
فصل ۲ روش تصویری	۳۷
فصل ۳ مسأله گشتاور	۷۳
واژه‌نامه فارسی ـ انگلیسی	۸۰
واژه‌نامه انگلیسی ـ فارسی	۸۳
مراجع	۸۶

پیش‌گفتار

گرچه تبدیل فوریه در آنالیز بیش از یک قرن یکی از ابزارهای اساسی بوده و هنوز هم دارای اهمیت و کاربرد است، اما دارای یک سری نواقص است. بدین ترتیب که تبدیل فوریه یک موج، اطلاعات راجع به لحظه پخش و زمان شروع و پایان سیگنال را مخفی می‌کند. در سال ۱۹۴۶ میلادی گابور[۱]، شیوه‌ای را معرفی کرد که بوسیله آن می‌توان سیگنال را به سیگنالهای مقدماتی تجزیه کرد. گابور بخاطر موفقیتها و ایده‌هایش در زمینه فیزیک موفق به دریافت جایزه نوبل در سال ۱۹۷۱ میلادی شد. قابها برای فضاهای هیلبرت توسط دافین[۲] و شیفر[۳] در سال ۱۹۵۲ میلادی برای مطالعهٔ مسائلی در زمینه آنالیز فوریه غیرهارمونیک معرفی شدند و بعد از آن مقالهٔ اساسی دوبشی[۴]، گراسمان[۵] و میر[۶] در سال ۱۹۸۶ میلادی منتشر شد. بعد از انتشار این مقالهٔ مهم، مقولهٔ قابها بطور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت که حاصل آن انتشار مقالات فراوان در این زمینه است و اخیراً کتابی در مورد نظریهٔ قابها توسط پروفسور ال کریستنسن[۷] از دانشگاه صنعتی دانمارک منتشر شده است.

---

[۱] Gabor

[۲] Duffin

[۳] Schaeffer

[۴] Daubechies

[۵] Grossman

[۶] Mayer

[۷] Ole Christensen

این پایان نامه در چهار فصل تدوین شده که به طور خلاصه به آنها اشاره می‌شود.

فصل ۰: در این فصل مفاهیم و قضایای مربوط به نظریهٔ عملگرها، نمادها و پیش نیازهای مورد استفاده در طول پایان‌نامه معرفی شده است. ممکن است خواننده با بعضی از این تعاریف و قضایا از قبل آشنایی داشته باشد.

فصل ۱: در این فصل به طور کامل، قضایا و نتایج مربوط به قابها و خواص آنها، در فضای هیلبرت (البته بیش از متن اصلی) مورد بررسی قرار گرفته است و نشان داده شده که هر عضو فضای هیلبرت H را می‌توان برحسب ترکیبات خطی از عناصر قاب نوشت.

فصل ۲: در این فصل روش تصویری را که یک روش برای بدست آوردن ضرایب قاب است مورد بررسی قرار داده و قضیه اساسی این فصل که معادل بودن روش تصویری قوی با قاب ریس شرطی است، اثبات کرده‌ایم.

فصل ۳: در این فصل، مبحث مسألهٔ گشتاور و بهترین تقریب جواب برای مسأله گشتاور، تعریف و مورد توجه و بررسی قرار گرفته است و ثابت شده است که عنصر منحصر بفردی مثل f به شکل $f = \sum_{i\in I} a_i S^{-1} f_i$ بهترین تقریب جواب برای مسأله گشتاور می‌باشد.

فصل ۰

نمادها و پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه که در طول این پایان‌نامه مورد نیاز می‌باشد آورده شده است. این مطالب برگرفته از کتابها و مقالات مختلفی است که در قسمت مراجع آورده شده‌اند.

۰ـ۱ تعریف: فرض کنید که V یک فضای برداری باشد. تابع $\langle \circ, \circ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ را یک ضرب داخلی بر V گوئیم هرگاه:

۱) برای هر $x \in V$ $\langle x, x\rangle > \circ$.

۲) اگر $x = \circ$ باشد. آنگاه $\langle x, x\rangle = \circ$.

۳) برای هر $x, x_1, x_2 \in V$ آنگاه $\langle x_1 + x_2, x\rangle = \langle x_1, x\rangle + \langle x_2, x\rangle$.

۴) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر $x, y \in V$، $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

۵) برای هر $x, y \in V$، $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

زوج $(V, \langle \circ, \circ\rangle)$ را فضای ضرب داخلی گوئیم.

۰ـ۲ تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد و $\| \; \| : V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ یک تابع باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in V$ و هر اسکالر α داشته باشیم،

الف) $\|x\| \geq \circ$ و $\|x\| = \circ$ اگر و فقط اگر $x = \circ$؛

ب) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$؛

ج) (نامساوی مثلثی) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این حالت $\| \cdot \|$ را یک نرم روی V نامیم و زوج $(V, \| \cdot \|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌گوئیم.

۰ـ۳ تبصره: اگر V یک فضای نرم‌دار باشد و برای هر $x, y \in V$ قرار دهیم $d(x, y) = \|x - y\|$ آنگاه به وضوح می‌بینیم که d یک متر روی V است. بنابراین هر فضای نرم‌دار یک فضای متریک است. d را متر تولید شده توسط نرم می‌نامیم.

۰ـ۴ تعریف: در فضای ضرب داخلی X نرم x را با $\|x\|$ نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

$$\|x\|^{۲} = \langle x, x\rangle$$

۰ـ۵ تعریف: اگر فضای ضرب داخلی $\langle ۰, ۰\rangle$ نسبت به نرم $\|\cdot\|^{۲} = \langle ۰, ۰\rangle$ کامل باشد آنگاه فضای ضرب داخلی را یک فضای هیلبرت می‌نامیم. در این پایان‌نامه فضای هیلبرت را با H نمایش خواهیم داد.

۰ـ۶ تعریف: فضای نرم‌دار X را یک فضای باناخ گوئیم، هرگاه X نسبت به متر تولید شده توسط نرم، یک فضای کامل باشد. بدین معنی که هر دنباله کوشی مانند $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نسبت به متر تولید شده توسط نرم، همگرا به یک $x \in X$ باشد.

۰ـ۷ تبصره: فضاهای هیلبرت رده خاصی از فضاهای باناخ هستند. بنابراین تمام قضایا در مورد فضاهای باناخ درباره فضاهای هیلبرت نیز برقرار است.

۰ـ۸ تعریف: به فضای هیلبرت H که شامل یک زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر باشد، فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر گوئیم.

در این پایان‌نامه مادامیکه صحبت از فضای هیلبرت می‌شود منظور فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر است.

۰ـ۹ تعریف: فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $x, y \in H$ آنگاه بردارهای x و y را متعامد نامند (x بر y عمود است) اگر $\langle x, y\rangle = ۰$ و در این صورت می‌نویسیم $x \perp y$.

۰ـ۱۰ قضیه: (فیثاغورث) اگر $f_۱, f_۲, \ldots, f_n$ بردارهای دوبه‌دو متعامد در فضای هیلبرت H باشند، آنگاه

$$\|f_۱ + f_۲ + \ldots + f_n\|^{۲} = \|f_۱\|^{۲} + \|f_۲\|^{۲} + \ldots \|f_n\|^{۲} \cdot$$

اثبات: ر.ک [p.۷ ،۷].

۰ـ۱۱ قضیه: فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت، برای هر x و y در

X روابط زیر برقرارند:

الف) (نامساوی کوشی_شوارتز) $\quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

ب) (نامساوی مثلثی) $\quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ج) (قانون متوازی‌الاضلاع) $\quad \|x+y\|^{۲} + \|x-y\|^{۲} = ۲(\|x\|^{۲} + \|y\|^{۲})$

اثبات: ر.ک [p.۸ ،۱۰].

۰_۱۲ تعریف: مجموعهٔ $\{u_{۱}, u_{۲}, \ldots\}$ در فضای ضرب داخلی X متعامد گفته می‌شود، هرگاه برای هر $i \neq j$، $u_i \perp u_j$. به علاوه، اگر برای هر $i \geq ۱$، $\|u_i\| = ۱$ باشد، آنگاه آن مجموعه را متعامد یکه می‌نامند.

۰_۱۳ قضیه: فرض کنید $\{u_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه در فضای هیلبرت H باشد. در این صورت، شرایط زیر معادلند.

الف) $\{u_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای H است.

ب) برای هر $x \in H$، $\quad x = \sum_{i=۱}^{\infty} \langle x, u_i\rangle u_i$

ج) برای هر $x \in H$، $\quad \|x\|^{۲} = \sum_{i=۱}^{\infty} |\langle x, u_i\rangle|^{۲}$ (اتحاد پارسوال)

د) $\overline{span}\{u_i\}_{i=۱}^{\infty} = H$

اثبات: ر.ک [p.۳۹۰ ،۱۳].

۰_۱۴ تبصره: از این به بعد پایه متعامد یکه متعارف را با $\{e_i\}_{i=۱}^{\infty}$ نمایش می‌دهیم. در این حالت داریم:

$$e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=۱}^{\infty} \quad ; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} ۱ \, , & i = j \\ ۰ \, , & i \neq j \end{cases}$$

به δ_{ij}، دلتای کرونکر گفته می‌شود.

۰_۱۵ قضیه: فضای هیلبرت H دارای پایه متعامد یکه است اگر و تنها اگر H تفکیک‌پذیر باشد.

اثبات: ر.ک. [p.۳۴ ،۱۰].

۰_۱۶ **تعریف:** خانواده $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایه ریس برای فضای هیلبرت H است اگر $\overline{span}\{f_i\}_{i\in I} = H$ و اعداد $A, B > 0$ وجود داشته باشند به طوری که. برای هر دنبالهٔ $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ داشته باشیم:

$$A\sum_{i\in I}|c_i|^2 \leq \|\sum_{i\in I} c_i f_i\|^2 \leq B\sum_{i\in I}|c_i|^2 \cdot$$

۰_۱۷ **تعریف:** اگر V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند، تابع $T : V \to W$ را یک تبدیل خطی از V به W گوئیم اگر به ازای هر $\alpha, \beta \in V$ و به ازای هر اسکالر $c, \lambda \in F$ داشته باشیم:

$$T(\lambda\alpha + c\beta) = \lambda T\alpha + cT\beta \cdot$$

۰_۱۸ **تعریف:** اگر H و K دو فضاهای هیلبرت باشند و $T : H \to K$ یک تبدیل خطی باشد، نرم T را با $\|T\|$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H \quad , \quad \|x\| \leq 1\} \cdot$$

اگر $\|T\| < \infty$ باشد آنگاه گوئیم که T کراندار می‌باشد.

۰_۱۹ **تعریف:** مجموعهٔ همهٔ تبدیلات خطی و کراندار از H به K را با نماد $B(H,K)$ نمایش می‌دهیم و اگر فضای H و K با هم برابر باشند،

$$B(H,K) = B(H,H) = B(H)$$

به عناصر $B(H)$ عملگر می‌گوئیم. همچنین مجموعهٔ همه تبدیلهای خطی و کراندار از H به $\mathbb{C}$ را با $H^* = B(H,\mathbb{C})$ نمایش داده و آن را دوگان H می‌نامیم.

۰ـ۲۰ قضیه: برای هر تبدیل خطی $T : X \to Y$ شرایط زیر معادلند.

الف) T در صفر پیوسته است.

ب) T پیوسته است.

ج) T کراندار است.

اثبات: ر.ک. [p.۲۶ ،۷].

۰ـ۲۱ قضیه: اگر $T \in B(X,Y)$، آنگاه عملگر یکتای $T^* \in B(Y,X)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ داریم:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \cdot$$

به علاوه $\|T^*\| = \|T\|$ و به T^* الحاقی T گفته می‌شود.

اثبات: ر.ک. [p.۹۳ ،۱۵].

۰ـ۲۲ قضیه: اگر $S,T \in B(H)$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، آنگاه

الف) $(\alpha T + S)^* = \overline{\alpha} T^* + S^*$،

ب) $(TS)^* = S^*T^*$،

ج) $T^{**} = (T^*)^* = T$،

د) اگر T معکوس‌پذیر و معکوسش $T^{-۱}$ باشد، آنگاه T^* معکوس‌پذیر و $(T^*)^{-۱} = (T^{-۱})^*$ است.

اثبات: ر.ک. [p.۳۲ ،۷].

۰ـ۲۳ تعریف: فرض کنید $S,T \in B(H)$ در این صورت

الف) عملگر S خودالحاق است، هرگاه $S = S^*$. یعنی برای هر $x,y \in H$، $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$.

ب) عملگر S مثبت است، هرگاه برای هر $x \in H$،

$$\langle Sx, x\rangle \geq ۰$$

در این حالت می‌نویسیم $S \geq 0$.

ج) گوئیم که $S \geq T$، هرگاه $S - T \geq 0$.

۰_۲۴ قضیه: اگر $T \in B(H)$، خودالحاق باشد، آنگاه

الف) برای هر $x \in H$، $\langle Tx, x\rangle$ یک عدد حقیقی است.

ب) $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.

اثبات: ر.ک. [p.۳۴، ۷].

۰_۲۵ لم: همه عملگرهای مثبت خودالحاق هستند.

اثبات: فرض کنیم $S \in B(X)$ و $S \geq 0$. بنابراین برای هر $x \in X$،

$$\langle Sx, x\rangle = \langle \overline{Sx, x}\rangle = \langle x, Sx\rangle = \langle S^*x, x\rangle$$

آنگاه با توجه به قضیه (۰_۲۱) که نشان دهنده یکتایی S^*، در صورت وجود می‌باشد، خواهیم داشت که $S = S^*$ یعنی S خودالحاق است.

۰_۲۶ قضیه: فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی مختلط و $T : X \to X$ یک عملگر خطی باشد. اگر برای هر $x \in H$، $\langle Tx, x\rangle = 0$، آنگاه $T = 0$.

اثبات: ر.ک. [p.۲۹۶، ۱۵].

مثال زیر نشان می‌دهد که شرط مختلط بودن برای گزاره بالا الزامی است.

۰_۲۷ مثال: اگر $X = \mathbb{R}^2$ و $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ چنان باشد که

$$T(1, 0) = (0, 1) \quad , \quad T(0, 1) = (-1, 0)$$

آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^2$ داریم $\langle Tx, x\rangle = 0$. در صورتیکه واضح است که $T \neq 0$ می‌باشد.

۰_۲۸ قضیه: اگر H یک فضای هیلبرت و $f \in H$ باشد آنگاه

$$\|f\| = \sup\{|\langle f, g\rangle| : g \in H, \|g\| = 1\}\cdot$$

اثبات: فرض کنید $g \in H$ باشد. طبق نامساوی کشی_شوارتز داریم:

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\| \, \|g\|$$

از این رو

$$\sup_{\|g\|=1} |\langle f,g\rangle| \leq \|f\| \cdot$$

و از طرفی اگر $g_0 := \frac{f}{\|f\|}$، آنگاه

$$|\langle f,g_0\rangle| = \frac{1}{\|f\|}\langle f,f\rangle = \frac{\|f\|^2}{\|f\|} = \|f\| \cdot$$

با توجه به مطالب بالا نتیجه می‌گیریم که

$$\blacksquare \cdot \|f\| = \sup_{\|g\|=1} |\langle f,g\rangle|$$

۰_۲۹ قضیه: (معکوس کراندار) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. اگر $T \in B(X,Y)$ یک به یک و پوشا باشد، آنگاه $T^{-1} \in B(Y,X)$.

اثبات: ر.ک. [p.۱۸۲ ،۱۳].

۰_۳۰ قضیه: (قضیه نمایش ریس)[1] اگر f یک تابعک خطی و کراندار روی فضای هیلبرت H باشد، آنگاه $y \in H$ یکتای وجود دارد به طوری که برای هر $x \in H$،

$$f(x) = \langle x,y\rangle$$

بعلاوه $\|f\| = \|y\|$.

به عبارت دیگر قضیه فوق به هر تابعک خطی و کراندار روی H، یک ضرب داخلی نسبت می‌دهد.

اثبات: ر.ک. [p.۶۱ ،۱۰].

---

[1] Riesz representation theorem

۰_۳۱ تعریف: فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار باشند. تبدیل خطی $T : X \to Y$ از پائین کران‌دار گفته می‌شود، هرگاه $\beta > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$،

$$\beta \|x\| \leq \|Tx\| \cdot$$

۰_۳۲ قضیه: اگر M یک زیرفضای دلخواه از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه شرایط زیر برقرارند

الف) $M^\perp$ یک زیرفضای بسته از H است.

ب) $\overline{M}^\perp = M^\perp$ و $\overline{M} = M^{\perp\perp}$.

ج) $\overline{M} = H$ اگر و تنها اگر $M^\perp = \{0\}$.

اثبات: ر.ک. [۱۴، p.۸۵].

۰_۳۳ قضیه: اگر H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت و $T \in B(H_1, H_2)$، آنگاه شرایط زیر برقرارند.

الف) $N(T) = R(T^*)^\perp$

ب) $N(T^*) = R(T)^\perp$

ج) $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$

د) $\overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$.

اثبات: ر.ک. [۱۰، p.۸۰].

۰_۳۴ تعریف: اگر X یک فضای برداری باشد، آنگاه عملگر خطی $P : X \to X$ یک تصویر نامیده می‌شود هرگاه $P^2 = P$.

۰_۳۵ تعریف: فرض کنید که M یک زیرفضای بسته از H باشد. عملگر P را که بر H تعریف شده، تصویر متعامد می‌نامیم اگر برای هر $m \in M$ و $n \in M^\perp$ داشته باشیم:

$$P(m+n) = m \cdot$$

۰_۳۶ قضیه: $P \in B(H)$ یک تصویر متعامد است اگر و تنها اگر $P^2 = P$ و P خودالحاق

باشد.

اثبات: ر.ک. [۸۳، p، ۱۰].

۰_۳۷ لم: ضرب داخلی بر روی $H \times H$ پیوسته است. یعنی اگر در H، $x_n \to x$ و $y_n \to y$ در اینصورت

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle \cdot$$

اثبات: با توجه به نامساوی کوشی شوارتز

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0 \end{aligned}$$

زیرا $x_n \to x$ پس $\|x_n\| \to \|x\|$ و $y_n \to y$ پس $\|y_n\| \to \|y\|$.

اینک قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که به قضیه اصل کران‌داری یکنواخت معروف است.

۰_۳۸ قضیه: فرض کنیم X فضای باناخ و Y یک فضای نرم‌دار باشد. اگر $F \subseteq B(X,Y)$ باشد به‌طوری‌که برای‌هر $x \in X$، $\sup\{\|Ax\| : A \in F\} < \infty$ آنگاه $\sup\{\|A\| : A \in F\} < \infty$ است.

اثبات: ر.ک. [p.۹۸، ۷].

۰_۳۹ تعریف: فرض کنیم $T : H \to H$ یک عملگر خطی مثبت کران‌دار خودالحاق بر روی فضای هیلبرت H باشد. در این صورت عملگر خطی، کران‌دار و خودالحاق A، ریشهٔ دوم T نامیده می‌شود اگر $A^2 = T$.

۰_۴۰ قضیه: هر عملگر خطی کران‌دار، خودالحاق و مثبت $T : H \to H$ بر روی فضای هیلبرت H، یک ریشهٔ دوم مثبت A دارد که یکتا است.

اثبات: ر.ک [p.۴۷۶، ۱۲].

قضیه فوق به قضیه ریشه دوم مثبت معروف است.

۰_۴۱ تعریف: گردایه $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X را یک σ_جبر در X نامیم اگر $\mathcal{M}$ دارای خواص زیر باشد.

۱) $X \in \mathcal{M}$،

۲) هرگاه $A \in \mathcal{M}$، آنگاه $A^c \in \mathcal{M}$ که در آن A^c، متمم A نسبت به X است.

۳) هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، $A_n \in \mathcal{M}$ آنگاه $A \in \mathcal{M}$.

۰_۴۲ تعریف: یک اندازهٔ مثبت تابعی است مانند μ که بر یک σ_جبر مانند $\mathcal{M}$ تعریف شده است، بردش در $[0, \infty]$ است و جمعی شمارش‌پذیر می‌باشد. یعنی هرگاه $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارش‌پذیر و از هم جدا از اعضای $\mathcal{M}$ باشند، آنگاه:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot$$

۰_۴۳ قضیه: فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت بر σ_جبر $\mathcal{M}$ باشد، در این صورت هرگاه $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ و $A_n \in \mathcal{M}$ و $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ و $\mu(A_1)$ متناهی باشد آنگاه: $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

اثبات: ر.ک. [۱۶، p.۳۰].

۰_۴۴ لم: دنبالهٔ $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ از اعداد نامنفی و جمع‌پذیر را در نظر بگیرید و فرض کنید $\{J_k\}_{k\in N}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های N باشد، که $J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \supseteq \ldots$ و وجود داشته باشد $c > 0$ طوری که به ازای هر $k \in N$، $c \leq \sum_{i\in J_k} c_i$ آنگاه $c \leq \sum_{i\in\cap J_k} c_i$.

اثبات: یک اندازه مثبت μ بر روی σ_جبری از زیرمجموعه‌های N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu(S) = \sum_{i\in S} c_i$$