



دانشگاه الزهراء  
دانشکده علوم پایه

پایان نامه  
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد  
رشته فیزیک اتمی ملکولی

عنوان  
تاثیر ذرات محبوس  
بر انبساط یک بعدی پلاسما در حضور  
موج الکترومغناطیسی

استاد راهنما  
دکتر محمودرضا روحانی

دانشجو  
صدیقه کنعانی

اسفند ۱۳۸۶

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

دانشگاه الزهرا  
دانشکده علوم پایه

پایان نامه  
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد  
رشته فیزیک اتمی ملکولی

عنوان  
تاثیر ذرات محبوس  
بر انبساط یک بعدی پلاسما در حضور  
موج الکترومغناطیسی

استاد راهنما:  
دکتر محمودرضا روحانی

استاد مشاور:  
دکتر حسین حکیمی پژوه

دانشجو  
صدیقه کنعانی

اسفند ۱۳۸۶

تقدیم به آفریدگاری که آغاز همه از اوست و انجام همه بدوست ،  
بلکه خود همه اوست .

و تقدیم به مادر مهربان و پدر گرامیم که از بدو وجود یاریم نمودند  
و اموختنم که تنها به او توکل کنم .

و تقدیم به همسر مهربان و صبورم.

## پروردگارا!

ای بی نیاز! سپاسگزاریم را پذیرا باش. بارالهی! تو که در تمام لحظه های زندگی یگانه مونس و در دقایق یأس و نومیدی تنها یاورم بوده ای، ای که جز تو پناه گاهم نیست.

با سپاس فراوان از زحمات بی دریغ و مشفقانه استاد گرامی و ارجمندم جناب آقای دکتر محمود رضا روحانی، که در تمام این مدت صبورانه مرا به نحو احسن راهنمایی کردند و در این کار از هیچ کوششی دریغ نورزیدند. و با تشکر و تقدیر از جناب آقای دکتر حسین حکیمی پژوه و خانم دکتر فاطمه شهشهانی که داوری این کار را به عهده گرفتند. همچنین از خانم دکتر نرگس رجائی و آقای دکتر رضا شکوهی برای همکاریها و راهنمایی هایشان کمال تقدیر و تشکر را دارم. و از مرتضی و حسین کنعانی برای کمک در تایپ پایان نامه تشکر می کنم.

## چکیده

مسئله انبساط یک بعدی پلاسما ی بیش چگال غیر برخوردی در خلأ و در حضور موج الکترومغناطیسی، در دو حالت بررسی شده است. در حالت اول این انبساط را بدون به حساب آوردن ذرات محبوس در نظر گرفته ایم و در حالت دوم تاثیر ذرات محبوس را بر آن افزوده ایم.

ذرات محبوس توزیع چگالی پلاسما و میدان الکتریکی خود سازگار درون پلاسما را تغییر می دهند. همچنین عمق نفوذ میدان الکتریکی بدرون پلاسما، سرعت مرز پلاسما و مختصه چگالی بحرانی با به حساب آوردن ذرات محبوس تغییر می کنند. در اینجا، دو حالت با وبدون ذرات محبوس، برای مقادیر مختلف چگالی اولیه و شدت میدان الکتریکی موج فرودی، با هم مقایسه شده است.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
<b>فصل اول</b>	
۱	مقدمه
۲	۱-۱ تاریخچه
۴	۲-۱ اساس ICF
<b>فصل دوم</b>	
۷	انبساط آزاد پلاسما در خلأ
۸	۱-۲ انبساط یک بعدی
<b>فصل سوم</b>	
۱۷	تاثیر میدان الکترو مغناطیسی بر انبساط پلاسما
۱۸	۱-۳ انبساط پلاسمای کم چگال
۲۶	۲-۳ انبساط پلاسمای بیش چگال
۲۹	۳-۳ حل تحلیلی برای تابش با شدت کم
<b>فصل چهارم</b>	
۳۱	تاثیر ذرات محبوس بر انبساط پلاسما در حضور تابش الکترومغناطیس
۳۳	۱-۴ میدان کند تغییر
۳۸	۲-۴ میدان تند تغییر
۳۹	۳-۴ چگالی ذرات محبوس
۳۹	۴-۴ فرایند مخلوط شدن تغییر آنتروپی
۴۲	۵-۴ شارش یک بعدی self-similar پلاسمای رقیق شده
<b>فصل پنجم</b>	
۴۵	تاثیر ذرات محبوس بر انبساط پلاسمای بیش چگال
۴۶	۱-۵ انبساط آزاد پلاسمای بیش چگال
۵۰	۲-۵ انبساط همدمای پلاسمای بیش چگال در حضور تابش الکترومغناطیس

۵-۳-۳-تأثیر ذرات محبوس بر انبساط پلاسمای بیش چگال.....	۵۹
۵-۳-۱-تأثیر ذرات محبوس بر سرعت لبه پلاسما.....	۶۱
۵-۳-۱-۱-تغییر سرعت لبه پلاسما بر حسب A.....	۶۲
۵-۳-۱-۲-تغییر سرعت لبه پلاسما بر حسب $\Omega$ .....	۶۴
۵-۳-۱-۳-تغییر سرعت لبه پلاسما بر حسب زمان.....	۶۴
۵-۳-۲-تأثیر ذرات محبوس بر عمق نفوذ میدان الکتریکی بدرون پلاسما.....	۶۵
۵-۳-۱-تغییر عمق نفوذ میدان الکتریکی بر حسب A.....	۶۵
۵-۳-۲-تغییر عمق نفوذ میدان الکتریکی بر حسب $\Omega$ .....	۶۷
۵-۳-۲-۳-تغییر عمق نفوذ میدان الکتریکی بر حسب زمان.....	۶۹
۵-۳-۳-تأثیر ذرات محبوس بر تغییر مختصه چگالی بحرانی.....	۷۰
۵-۳-۳-۱-تغییر مختصه چگالی بحرانی بر حسب A.....	۷۰
۵-۳-۳-۲-تغییر مختصه چگالی بحرانی بر حسب $\Omega$ .....	۷۲
۵-۳-۳-۳-تغییر مختصه چگالی بحرانی بر حسب زمان.....	۷۴
۵-۴-تأثیر ذرات محبوس بر توزیع میدان الکتریکی.....	۷۵
۵-۵-۵-تأثیر ذرات محبوس بر توزیع چگالی.....	۷۶
۵-۵-۱-شدت میدان A ثابت $\Omega$ مختلف.....	۷۶
۵-۵-۲- $\Omega$ ثابت شدت میدان A مختلف.....	۸۰

### فصل ششم

۶-۱-کد خطی.....	۸۵
۶-۲-کد غیر خطی.....	۹۴
فهرست مراجع.....	۱۰۸



## فهرست جدولها

شماره	صفحه
جدول (۱-۵)	۵۷
جدول (۲-۵)	۵۷
جدول (۳-۵)	۵۸

## فهرست شکلها

شماره	صفحه
شکل (۱-۱)	۵
شکل (۱-۲)	۱۴
شکل (۲-۲)	۱۵
شکل (۱-۳-الف)	۱۸
شکل (۱-۳-ب)	۱۸
شکل (۲-۳-الف)	۲۳
شکل (۲-۳-ب)	۲۳
شکل (۳-۳-الف)	۲۵
شکل (۳-۳-ب)	۲۵
شکل (۴-۳)	۳۰
شکل (۱-۴)	۴۴
شکل (۱-۵)	۴۶
شکل (۲-۵)	۴۹
شکل (۳-۵)	۴۹
شکل (۴-۵-الف)	۵۵
شکل (۴-۵-ب)	۵۵
شکل (۵-۵-الف)	۵۶
شکل (۵-۵-ب)	۵۶
شکل (۶-۵)	۶۲
شکل (۷-۵)	۶۲
شکل (۸-۵)	۶۳
شکل (۹-۵)	۶۴
شکل (۱۰-۵)	۶۴
شکل (۱۱-۵)	۶۵
شکل (۱۲-۵)	۶۵
شکل (۱۳-۵)	۶۶

٦٧	شکل (١٤-٥)
٦٧	شکل (١٥-٥)
٦٨	شکل (١٦-٥)
٦٩	شکل (١٧-٥)
٦٩	شکل (١٨-٥)
٧٠	شکل (١٩-٥)
٧١	شکل (٢٠-٥)
٧١	شکل (٢١-٥)
٧٢	شکل (٢٢-٥)
٧٢	شکل (٢٣-٥)
٧٣	شکل (٢٤-٥)
٧٤	شکل (٢٥-٥)
٧٤	شکل (٢٦-٥)
٧٥	شکل (٢٧-٥)
٧٥	شکل (٢٨-٥)
٧٦	شکل (٢٩-٥)
٧٦	شکل (٣٠-٥)
٧٧	شکل (٣١-٥)
٧٧	شکل (٣٢-٥)
٧٨	شکل (٣٣-٥)
٧٨	شکل (٣٤-٥)
٧٩	شکل (٣٥-٥)
٨٠	شکل (٣٦-٥)
٨٠	شکل (٣٧-٥)
٨١	شکل (٣٨-٥)
٨١	شکل (٣٩-٥)
٨١	شکل (٤٠-٥)
٨٢	شکل (٤١-٥)
٨٣	شکل (٤٢-٥)

## فصل اول

### مقدمه

مسئله انبساط پلاسما در خلأ یا محیطی با چگالی کمتر در زمینه های مختلف فیزیک مشترک است. این مسئله دربرهمکنش لیزر با ماده [1] تا [7] ، در بادهای قطبی و ستاره ای در اختر فیزیک [8] تا [10] ، در "لایه برداری ساچمه ای"<sup>1</sup> به عنوان وسیله سوختگیری [11] و [12]، در scrape-off پلاسما، در توکامکهای محدود کننده limiter و divertor، و در arcing روی سطوح، نقش مهمی ایفا می کند. از آنجا که این مسئله یکی از قدیمی ترین موضوعات در فیزیک پلاسما است، نوشته های بسیار با ارزشی در این مورد وجود دارد. [13] تا [21]

برهمکنش پلاسما و لیزر بخش مهمی از فیزیک پلاسمای کاربردی است که مدتهاست تحقیقات در زمینه همجوشی با لیزر را برانگیخته است. این مبحث زمینه آزمایشهای پرفایده ای برای کشف بخش وسیعی از پدیده های پلاسما از جمله برانگیختگی امواج پلاسما، تولید و اشباع ناپایداریهای پلاسما و انتقال شار پر شدت گرما را فراهم کرده است.

---

<sup>1</sup> Pellet ablation

در آزمایشهای همجوشی با لیزر، اطلاع دقیق از پلاسمای در حال انبساط برای فهمیدن جفت شدگی انرژی نزدیک چگالی بحرانی و تولید یونهای پر انرژی ضروری است. [22]

همچنین تولید ذرات پر انرژی در اثر برهمکنش یک پالس پر شدت لیزر با یک هدف جامد طی سه دهه اخیر بطور وسیعی بررسی شده است. برای پالسهایی که بقدر کافی طولانی هستند، ذرات گسیل شده از هدف، یک هاله پلازما تشکیل می دهند و انبساط پلازما در خلأ نقش کلیدی در چنین پدیده هائی دارد. [23] در این باره در قسمت مربوط به "ICF" <sup>1</sup> بیشتر توضیح خواهیم داد.

و نیز برهمکنش پالسهای کوتاه و پر شدت لیزر با پلاسمای در حال انبساط با پدیده های جالب زیادی در لایه مرزی همراه است. از جمله برانگیختن انواع مختلف امواج سطحی و ناپایداریها [24] تا [27]، ظهور ساختار "قله های شبه پایا" [28]، تولید هماهنگهای بالا [24] و [28] و غیره. همه این اثرها شدیداً بستگی به چگالی پلازما نزدیک سطح دارند.

در آزمایشهای همجوشی با لیزر، انرژی نور فرودی، با پلاسمائی که یک گرادیان چگالی دارد برهمکنش می کند. این انرژی ابتداً توسط الکترونهاى نزدیک چگالی بحرانی جذب می شود. سپس الکترونهاى گرم در هر دو جهت، به سمت داخل پلاسمای غلیظ تر و به سمت خارج به درون خلأ، منبسط می شوند. انبساط به سمت داخل منجر به یک جریان برگشتی در الکترونهاى سرد می شود که در گرم کردن پلازما سهیم می شود و نیز باعث شتاب گرفتن یونها به سمت داخل می شود. درحالی که انبساط به سمت خارج منجر به شتاب گرفتن یونها به انرژیهای بالا می شود. این، مکانیزم جفت شدگی انرژی که بین میدان الکتریکی خود پلازما رخ می دهد، مطالعات تحلیلی زیادی را درباره انبساط پلازما، به منظور درک بهتری از تولید یونهای پر انرژی، برانگیخته است.

انبساط پلازما در خلأ یک "موج رقیق کننده"<sup>2</sup> ایجاد می کند که درون پلازما منتشر می شود، و در شرایط شبه خنثی ای می تواند برحسب یک مدل شماره ای یک بعدی مطالعه شود. [13]

## ۱-۱ تاریخچه

1 Inertial Confinement Fusion

2 quasi-stationary

3 rarefaction wave

اساسی ترین پدیده در انبساط پلاسما، شتاب گیری یونهای مثبت تا سرعتهای مافوق صوت می باشد، که از دهه ۱۹۳۰ توسط محققانی که در زمینه " قوس خلأ"<sup>۱</sup> در آزمایشگاه ها کار می کردند، مشاهده شد. ابتدا، در سال (۱۹۶۱)، Plytto تشخیص داد که فرایند شتاب گیری یونها نتیجه مستقیم انبساط پلاسما در خلأ است [29]. طبق نظر Plytto چون الکترونها از یونها سبک تر هستند و در نتیجه تحرک بیشتری دارند، از بدنه پلاسما سبقت می گیرند و به دنبال آن یک میدان الکتروستاتیک<sup>۲</sup> خود سازگار<sup>۲</sup> تولید می کنند که یونها را تا سرعتهای بالا شتاب می دهد. توضیحات Plytto به این دلیل مهم بود که، فرایند شتاب گیری یونها را منحصراً بر حسب پدیده های الکتروستاتیک توجیه کرد. از آن به بعد، انبساط پلاسما بطور تحلیلی و عددی، فقط با بکار بردن مدل های الکتروستاتیک (قانون پواسون) همراه با مجموعه ای از معادلات هیدرودینامیک یا جنبشی مورد بررسی قرار می گیرد. [30]

پس از آن Gurevich، (۱۹۶۶) مسئله انبساط یک بعدی پلاسمای نیمه بی نهایت، بدون در نظر گرفتن تابش الکترومغناطیس (EM) را با کمک معادله و لاسوف برای یونها حل کرد. [19] همین مسئله با مدل شماره ای با یونهای سرد و در هندسه مسطحه توسط Allen & Andrews (1970) [20] و در هندسه استوانه ای و کروی توسط Prewett & Allen (۱۹۷۳) حل شد [31]. در تمام موارد جواب self-similar با فرض تعادل همدمای الکترونی و شبه خنثی ای انبساط بدست آمده است. بیشتر مطالعات بعدی بر اساس این دو مدل صورت گرفته اند. [14]

مواردی که شرط شبه خنثی ای در طول انبساط نقض می شوند، و هنگامی که الکترونها یک تابع توزیع با دو دمای الکترونی دارند در مقاله های [13][14][32] و [33] بررسی شده اند. جواب تحلیلی برای مسئله ۲ و ۳ بعدی در مقاله های [34] و [35] با شرط شبه خنثی ای و توصیف آدیاباتیک بدست آمده است.

انبساط یک بعدی پلاسما تحت تأثیر موج EM در مراجع [18] [25] [36] و [37] مورد بررسی قرار گرفته است. در حد شدتهای زیاد در [36] بطور تحلیلی و در مراجع [18] و [37] بطور عددی و با کمک روش WKB بررسی شده است.

V.E. Fortov & A.V. Ivlev برای مسئله انبساط یک بعدی پلاسمای کم چگال کاملاً یونیزه در خلأ تحت تأثیر موج EM با هر شدت دلخواهی، جواب دقیق بدست

---

1 vacuum arc  
2 self-consistent

آورده اند و نیز همین مسئله را برای یک پلاسمای پرچگال با فرض کوچک بودن شدت موج EM و با تقریب تئوری شار ه ای با یونهای سرد و شرط شبه خنثی ای، بطور تحلیلی حل کرده اند. [38] در اینجا ما ابتدا همین مسئله را برای یک پلاسمای پرچگال با هر شدت دلخواه بطور عددی حل می کنیم سپس تأثیر ذرات محبوس را به صورت یک تصحیح وارد می کنیم .

مسئله ای که در اینجا بررسی می کنیم ، قسمتی از یک سناریوی بزرگتر به نام ICF است. چنانکه گفتیم و در قسمت بعد خواهیم دید ، در همجوشی با لیزر از لیزرهای با توان بالا که طبیعتاً میدانهای آنها دامنه بلندی دارند استفاده می شود . هنگام انبساط پلاسما در حضور این میدانها تعدادی از ذرات باردار پلاسما در این دامنه ها محبوس می شوند و چگالی و سرعت ذرات پلاسما را تغییر می دهند . می خواهیم ببینیم این تغییرات چه تأثیری در انبساط پلاسما دارد.

## ۱-۲ اساس Inertial Confinement Fusion (ICF)

همجوشی یک واکنش هسته ای است که توان خورشید و ستاره ها را تامین می کند . اتمهای عناصر سبک مثل هیدروژن تحت فشار و دمای خیلی زیاد به هم فشرده می شوند و به هم وصل می شوند تا عناصر سنگین تری مثل هلیم را تشکیل بدهند و در این فرایند انرژی آزاد می شود . برای اینکه همجوشی رخ دهد ، اتمهای هیدروژن باید تا دمای ۱۰۰ میلیون C ° گرم شوند و در فشار خیلی زیاد به مدت کافی برای همجوشی، باقی بمانند . خورشید هیدروژن را گرم و با گرانش محصور می کند . همجوشی با محصورسازی مغناطیسی، میدانهای مغناطیسی خیلی قوی را برای محصور سازی هیدروژنی که توسط ماکروویو و یا وسایل دیگر گرم شده ، بکار می برد. همجوشی با "محصور سازی لختی" <sup>۱</sup> انرژی پرتوهائی مثل لیزر را به کار می برد تا سوخت هیدروژنی را تا سرحد دمای همجوشی گرم و فشرده کند ، و از اینرسی خود سوخت برای محصور کردن آن به مدت کافی برای اینکه همجوشی رخ دهد، استفاده می کند . هدف درازمدت برنامه ICF استفاده از انرژی همجوشی در توان الکتریکی و دیگر کاربردهای انرژی است . اساس کار در برنامه ICF را به طور خلاصه در شکل (۱-۱) می بینیم .

---

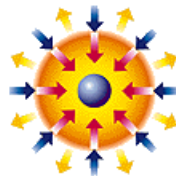
1 Inertial Confinement

- Laser energy
- Blowoff
- Inward transported thermal energy

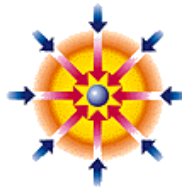
**1) Atmosphere formation: Laser beams rapidly heat the surface of the fusion target forming a surrounding plasma envelope.**



**2) Compression: Fuel is compressed by the rocket-like blowoff of the hot surface material**



**3) Ignition: During the final part of the laser pulse, the fuel core reaches 20 times the density of lead and ignites at 100,000,000 degrees Celsius**



**4) Burn: Thermonuclear burn spreads rapidly through the compressed fuel, yielding many times the input energy.**



شکل (۱-۱) ۱- تشکیل اتمسفر - پرتوهای لیزر سریعاً سطح هدف همجوشی را گرم می کنند در نتیجه دورتادور آن یک پلاسما تشکیل می شود. ۲- متراکم کردن- سوخت در اثر مواد داغی که مثل سوخت موشک سطح هدف را ترک می کنند فشرده می شود. ۳- اشتعال- در طی آخرین قسمت پالس لیزر هسته سوخت به چگالی ۲۰ برابر چگالی سرب میرسد و دردمای  $100,000,000^{\circ}C$  مشتعل می شود. ۴- سوختن - سوختن گرما هسته ای درون سوخت فشرده به سرعت پخش می شود، و چندین برابر انرژی داخلی رها می شود.





## فصل دوم

### مقدمه

در هیدرودینامیک یک گاز تراکم پذیر مسائل self-similar که هیچ دیمانسیون مشخصه ای در شرایط اولیه ونهائی ندارند، جای مهمی رابه خود اختصاص داده اند . زمان  $t$  و مختصه  $x$  در جواب چنین مسائلی تنها به صورت  $x/t$  ظاهر می شود . این به ما امکان می دهد معادلات را بطور قابل ملاحظه ای ساده کنیم ودر مورد یک بعدی جواب تحلیلی بدست آوریم . [39]

جوابهای self-similar در هیدرودینامیک ، بخش وسیعی از مسائل مهم فیزیک ( انبساط یک گاز در خلأ ، "انفجار نقطه ای" <sup>1</sup> ، واپاشی نا پیوستگی شرایط اولیه ، وغیره ) را توصیف می کنند. مطالعه مشابه درباره دینامیک یک پلاسمای رقیق شده، که توسط معادله جنبشی غیر برخورداری و یک میدان خود سازگار توصیف می شود ، بسیار مفید خواهد بود .

در بسیاری از موارد حرکت self-similar وهمدمای " پلاسمای رقیق شده" <sup>2</sup> توصیف خوبی از انبساط پلاسمای بدست می دهد. [22].

---

1  
2 Rarefied Plasma

## ۱-۲ انبساط یک بعدی پلاسما در خلأ

در این فصل انبساط آزاد و یک بعدی یک پلاسمای غیر برخوردی و نیمه بی نهایت که در ابتدا همگن است و در  $z < 0$  قرار دارد و از لحظه  $t = 0$  شروع به انبساط می کند ، رابرسی می کنیم. پلاسما با معادله جنبشی تابع توزیع یونها

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{e}{M} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (1-2)$$

(M جرم یون ،  $\phi$  پتانسیل الکتریکی است) که شبیه معادله تابع توزیع الکترونی است،  
و معادله پواسون

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -4\pi e(N - N_e) \quad (2-2)$$

$$N = N(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f dv$$

توصیف می شود. که در اینجا N چگالی یونی و  $N_e$  چگالی الکترونی می باشد.  
در هیدرودینامیک یک شماره ایده ال چنین مسئله ای اکیداً self-similar است. اما  
درباره مسئله مورد نظر ما، به طور اعم چنین نمی باشد، زیرا در معادلات (۱-۲) و  
ظ (۲-۲) یک پارامتر با دیمانسیون طول - شعاع دمای  $D = (T/4\pi n e^2)^{1/2}$  وجود  
دارد. در اینجا T دمای پلاسما در واحد انرژی است (برای سادگی دمای یونها  
والکترونها را در لحظه اول برابر می گیریم). به هر حال، براحتی دیده می شود که با  
گذشت زمان حرکت پلاسما به سرعت به حرکت self-similar نزدیک می شود. برای  
اثبات این مطلب، مراحل بعدی این فرایند را در نظر می گیریم. در لحظه اول در طول  
زمانی از مرتبه  $t_1 \approx D(m/2T)^{1/2}$ ، الکترونها از یونها به اندازه  $D \approx$  فاصله  
می گیرند، بطوری که روی مرز یک لایه دو برابر D تشکیل می گردد. الکترونها  
بدلیل میدان الکتریکی نمی توانند دورتر بروند. بنا براین، متعاقباً یک انبساط نسبتاً کند،  
با سرعتی از مرتبه سرعت حرارتی متوسط یونها، شروع می شود. در طی زمان  
 $t_1 \gg D \sqrt{M/2T} \gg t_2$  مرز بین پلاسما و خلأ در یک فاصله  $D \gg t_2 \sqrt{2T/M} \approx$

پخش می شود . طول مشخصه نا همگنی خیلی بیشتر از شعاع دبابی خواهد شد. در همین زمان پلاسما شبه خنثی خواهد بود، بطوری که معادله (۲-۲) به شکل ساده تر زیر

$$N = N_e \quad (۳-۲)$$

تبدیل می شود. چون در طی این زمان حرکت پلاسما با سرعت یونها ، یعنی نسبتاً کند رخ می دهد، الکترونها با درجه دقت بالائی یک توزیع بولتزمنی ( $N_e = N_0 e^{e\phi/T}$ ) خواهند داشت. بنا بر این، از (۳-۲) نتیجه می گیریم که

$$e\phi = T \ln(N/N_0) \quad (۴-۲)$$

باجایگذاری این رابطه در (۱-۲) سر انجام بدست می آوریم

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{e}{M} \frac{\partial}{\partial z} (\ln \int_{-\infty}^{\infty} f dv) = 0 \quad (۵-۲)$$

معادله (۵-۲) دیگر هیچ پارامتری با دیمانسیون طول ندارد ، و بنا بر این حرکتی که از زمان  $t_2 \approx$  شروع می شود self-similar است ، بطوری که

$$f = f(z/t, v)$$

در اینجا متغیر بدون بعد self-similar

$$\tau = \sqrt{M/2T} z/t$$

و همچنین کمیت‌های بدون بعد  $g$  و  $u$  را معرفی می کنیم .

$$g = (2\pi T/M)^{1/2} f / N_0 \quad (۶-۲)$$

$$u = v \sqrt{M/2T}$$

بعد از این معادله مورد نظر برای تابع توزیع بدون دیمانسیون یونها  $g(\tau, u)$  به شکل زیر خواهد بود.