بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

قطر و بعد گراف مقسوم علیه های صفر حلقه های جابه جایی

استاد راهنما:

دکتر کریم سامعی

استاد مشاور:

دکتر غلامرضا صفا کیش همدانی

پژوهشگر:

سمیه جمشیدی صالح

مهر ماه ۱۳۸۹

به نام خدایی که فرمانروایی آشکارحق است. که اگر چیزی را به پایین بیاورد هیچ بالا برنده ای نیست تا به یاری اش بشتابد. و اگر چیزی را بالا ببرد هیچ پایین برنده ای براو نیست تا او را خوار کند.

تقدیم به:

پدر و مادرم آنها که نعمت چگونه زیستن را به من آموختن.

و به خواهر وبرادرانم که باآنها شاد بودن وزندگی کردن آموختم.

یاد خدا آرام بخش دلهاست

بی کران سپاسمان به درگاه حق او که قطره ای از اقیانوس بی انتهای علم خود را بر ما عنایت فرمود تا پیوسته ، مشتاق بهره گیری از قطره ای دیگر باشیم.

اینک وظیفه ی خود می دانم با تأسی جستن از حدیث نبوی ((من لم یشکر المخلوق لم یشکرالخالق)) قدردانی خویش را از راهنمایی های بسیار گران قدر، جناب آقای دکتر کریم سامعی و دکتر غلامرضا صفا کیش همدانی که همواره از هیچ کوششی در خصوص آراستن دانشجویان به زیور علم و دانش و هم چنین علم اخلاق دریغ نورزیده اند، بیان نموده و خالصانه برای ایشان از خداوند منان سلامتی و توفیق روز افزون آرزو می نمایم.

و بی نهایت احساس قدردانی و سپاس را تقدیم می دارم به خانواده ی بی همتایم ، پدرم، تکیه گاه زندگیم، مادرم، اسطوره ی عشق و ایثار ، مهربان خواهرم، عزیزان زندگیم و اسطوره های شادی و امید برادرانم.

و درآخر از تمامی عزیزاتی که در تکمیل و اتمام این پایان نامه مرا یاری نموده اند، تقدیر و تشکر می کنم.

دانشگاه بوعلی سینا

مدیریت تحصیلات تکمیلی

دانشگاه بوعلی سینا

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی

عنوان:

قطر و بعد گراف مقسوم علیه های صفر حلقه های جابه جایی

نام نویسنده: سمیه جمشیدی صالح

نام استاد/اساتید راهنما: دکتر کریم سامعی

نام استاد/اساتید مشاور: دکتر غلامرضا صفاکیش همدانی

دانشکده : علوم پایه	**گروه آموزشی:** ریاضی	
رشته تحصیلی: ریاضی محض	**گرایش تحصیلی:** جبر	**مقطع تحصیلی:** کارشناسی ارشد
تاریخ تصویب: ۱۳۸۹/۰۶/۰۱	**تاریخ دفاع:** ۱۳۸۹/۰۷/۱۳	**تعداد صفحات:** ۷۴

چکیده:

برای حلقه های جابه جایی و یک دار R گراف مقسوم علیه های صفر حلقه ی R که با $\Gamma(R) = Z(R)-\{0\}$ نشان داده می شود گرافی ساده است که راس های آن همه ی مقسوم علیه های صفر غیر بدیهی هستند و دو راس متمایز x و y مجاور هستند اگر وتنها اگر $xy = 0$

در این پایان نامه ارتباط بین قطر و بعد $\Gamma(A)$ و $\Gamma(B)$ را بررسی می کنیم. و در حالت خاص نشان می دهیم وقتی A صفر بعدی است $\operatorname{diam}\Gamma(A) \leq \operatorname{diam}\Gamma(B)$ هم چنین در این پایان نامه قطر و بعد گراف مقسوم علیه صفر حلقه چندجمله ای ها و سری های توانی را مورد بررسی قرار می دهیم.

واژه‌های کلیدی: مقسوم علیه صفر ، گراف مقسوم علیه صفر ، قطر گراف ، بعد گراف ، چندجمله ای ها ، سری های توانی.

فهرست مندرجات

فصل ۰

مقدمه

خداوند جهان را به زبان اعداد خلق کرده است.

کپلر [1]

طی دو دههٔ اخیر علاقهٔ خاص ریاضی‌دانان به تحقیق در زمینه‌های ترکیبی ریاضی مانند مباحث ترکیبی جبر، آنالیز ونظریهٔ احتمالات و هم‌چنین جبر مجرد و نظریهٔ گراف، باعث بوجود آمدن مباحث جدید و متنوعی در این زمینه گردیده است.

ایدهٔ برقراری ارتباط بین حلقه‌های جابه‌جایی و نظریهٔ گراف برای اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط بک [2] طی مقالهٔ

Beck, I., **1988**. Coloring of commutative ring, J. Algebra. 116: 208-226.

مطرح شد. بک همهٔ عناصر حلقه را بعنوان رئوس گراف قرار داد. در این گراف دو رأس متمایز y,x مجاور هستند، اگر و تنها اگر $xy=0$. این گراف لزوماً همبند نبود و رأس ۰ در آن با همهٔ رئوس دیگر مجاور بود.

---

[1] Kapler

[2] Beck

مطالعه در این مقوله توسط ریاضی‌دانان متعددی ادامه یافت، تا اینکه در سال ۱۹۹۹، اندرسون[۳] و لیوینگستون [۴] طی مقالهٔ

Anderson, D. F., and Livingston, P. S.**1999**. The zero-divisor graph of a commutative ring. J. Algebra. 217: 434-447.

تعریف جدیدی برای گراف وابسته به یک حلقهٔ جابه‌جایی آوردند. در این تعریف رئوس گراف، مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی حلقه هستند و دو رأس x,y مجاور هستند، اگر و تنها اگر $xy = 0$. این پایان نامه مرور مقالهٔ اندرسون

Anderson, David F.,**2008**. On the diameter and girth of zero-divisor graph II. Volume 34, No. 2: 361-371.

می‌باشد و به سوالهای زیر پاسخ داده می‌شود:

۱) هر حلقهٔ توسیع جابه‌جایی از A مانند B باید دارای چه خصوصیاتی باشد که قطر A برابر ۳ ولی قطر حلقهٔ توسیع آن یعنی B برابر ۲ باشد؟

۲) با در نظر گرفتن چه شرایطی روی حلقه‌های A و B همواره قطر A کمتر از قطر B می‌باشد؟

ساختار کلی این مجموعه به صورت زیر می‌باشد.

فصل اول از این پایان نامه مشتمل بر ۲ بخش می‌باشد. بخش اول شامل مفاهیمی در نظریهٔ حلقه‌های جابه‌جایی و فون‌نویمان منظم است. و در بخش دوم به نظریهٔ ضرب تانسوری و مدولهای یکدست می‌پردازیم.

---

[۳] Anderson

[۴] Livingston

فصل دوم ابتدا شامل مفاهیم و تعاریف مقدماتی از نظریهٔ گراف است، سپس مثال‌هایی از گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های جابه‌جایی را ارائه می‌دهیم و در آخر به ذکر چندین قضیهٔ اساسی خواهیم پرداخت.

و بالاخره در فصل سوم این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۱۱] و [۱۲] تنظیم شده است، به تحلیل این مطلب می‌پردازیم، که وقتی B توسیعی از A می‌باشد، حلقه‌های A و B باید دارای چه شرایطی باشند تا قطر A همواره از قطر B کوچکتر باشد. و هم‌چنین در این فصل به ارتباط بین قطر و بعد $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[[x]])$ می‌پردازیم.

قابل ذکر است که در این پایان‌نامه نماد R نشان دهندهٔ حلقهٔ جابه‌جایی که لزوماً دامنهٔ صحیح نمی‌باشد و نمادهای $\mathrm{diam(G)}$ و $gr(G)$ به ترتیب نشان دهندهٔ قطر و بعد برای گراف G هستند.

فصل ۱

مباحث مقدماتی

تمام آثار طبیعت نتایج ریاضی چند قانون تفسیر ناپذیرند.

پیرسیمون لاپلاس [1]

در فصل اول مفاهیم، اصطلاحات و قضایایی را ارائه می‌دهیم که ابزارهای اساسی ما در فصل‌های بعد می‌باشند. در بخش اول مفاهیم ابتدایی و مقدماتی را از نظریهٔ حلقه‌های جابه‌جایی و حلقهٔ فون‌نویمان منظم می‌آوریم و در بخش ۲ به بررسی ضرب تانسوری و مدول یکدست می‌پردازیم.

۱ — ۱ مفاهیمی در نظریهٔ حلقه‌های جابه‌جایی و فون‌نویمان منظم

در این بخش به طور مختصر به بیان مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ حلقه‌های جابه‌جایی می‌پردازیم و قضایای مهمی را در باب ساختار مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه بررسی می‌کنیم.

۱ — ۱ لم و تعریف. فرض کنید R یک حلقه و I ایدآل R باشد، در این‌صورت، $\sqrt{I} = \{ r \in R \mid r^n \in I,$ به طوری‌که nای متعلق به $\mathbb{N}$ موجود باشد $\}$، ایدآلی از R است که I را شامل می‌شود و **رادیکال** I نام دارد.

[1] Pierre Simon Laplace

اثبات. لم و تعریف ۳—۴۶، از مرجع [۲] را ببینید. ■

۱—۲ لم و نمادگذاری. فرض کنید I ایدآل سرهٔ حلقهٔ R باشد. **واریتهٔ**[۲] I را با نماد $\mathrm{Var}(I)$ نشان می‌دهیم و به صورت، $\mathrm{Var}(I) = \{\ P \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq P\}$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت ،

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathrm{Var}(I)} P$$

اثبات. لم ۳—۴۸، از مرجع [۲] را ببینید. ■

۱—۳ قضیه. فرض کنید I ایدآل سرهٔ حلقهٔ R باشد، در این‌صورت $\mathrm{Var}(I)$، حداقل یک عضو مینیمال نسبت به رابطهٔ مشمولیت دارد. عضوهای مینیمال $\mathrm{Var}(I)$ را ایدآل‌های **اول مینیمال** I می‌نامیم و با $\mathrm{Min}(I)$ نشان می‌دهیم. اگر R ناصفر باشد، ایدآل‌های اول مینیمال ایدآل صفر را، ایدآل‌های اول مینیمال R می‌نامیم و با $\mathrm{Min}(R)$ نمایش می‌دهیم.

اثبات. قضیهٔ ۳—۵۲، از مرجع [۲] را ببینید. ■

۱—۴ نتیجه. فرض کنید I ایدآل سرهٔ حلقهٔ R باشد، در این‌صورت:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{p \in \mathrm{Min}(I)} P$$

اثبات. نتیجهٔ ۳—۵۴، از مرجع [۲] را ببینید.

۱—۵ نتیجه. اگر در لم ۱—۱، قرار دهیم $I = ۰$، آن‌گاه $\sqrt{۰}$ را **رادیکال پوچ** حلقه R می‌گوییم، در این‌صورت بنابر نتیجهٔ ۱—۴،

$$\sqrt{۰} = \bigcap_{p \in \mathrm{Spec}(R)} P = \bigcap_{p \in \mathrm{Min}(R)} P$$

---

[۲] Variety

اثبات. نتیجهٔ ۳—۴۹، از مرجع [۲] را ببینید. ■

۱—۶ نتیجه. فرض کنید R یک حلقه باشد، در این‌صورت مجموعهٔ عناصر پوچ‌توان R را با $\mathrm{Nil}(R)$ نشان می‌دهیم که طبق نتیجهٔ ۱—۴، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\mathrm{Nil}(R) = \sqrt{0} = \bigcap_{p\in \mathrm{Min}(R)} P$$

۱—۷ تعریف. حلقهٔ جابه‌جایی R را **کاهشی** می‌گوییم، اگر $\mathrm{Nil}(R) = 0$.

مثال ۱. فرض کنید R دامنهٔ صحیح باشد، در این‌صورت چون $\{0\}$ اید آل اول R است، پس $\mathrm{Nil}(R) = 0$ و بنابراین حلقهٔ R کاهشی است. به عنوان مثال حلقهٔ $\mathbb{Z}$ کاهشی است.

مثال ۲. فرض کنید $R = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$، در این‌صورت $\mathrm{Nil}(R) = 0$ و بنابراین حلقهٔ R کاهشی است.

۱—۸ نکته. فرض کنید X مجهول باشد و

$$f = r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n \in R[X].$$

در این‌صورت f پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $r_0, \dots, r_n$ همه پوچ‌توان باشند.

اثبات. تمرین ۱—۳۶، از مرجع [۲] را ببینید. ■

۱—۹ نتیجه. هرگاه حلقه R کاهشی باشد آن‌گاه حلقه‌های $R[X], R[[X]]$ نیز کاهشی است.

اثبات. بلافاصله از نکته فوق نتیجه حاصل می‌شود. ■

۱–۱۰ تعریف. مفروضات لم ۲–۴۱، از مرجع [۲] را در نظر می‌گیریم $f^{-1}(J)$ را حاصل تحدید J نسبت به همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ می‌نامیم و آن را با J^c نمایش می‌دهیم.

به ازای هر ایدآل I از R ایدآل $f(I)S$، یعنی ایدآل تولید شده توسط $f(I)$ در S را حاصل توسیع I نسبت به همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ می‌نامیم و با I^e نمایش می‌دهیم.

۱–۱۱ تعریف. حلقهٔ R را **شبه‌موضعی** می‌گوییم، اگر و تنها اگر فقط یک ایدآل ماکسیمال داشته باشد.

مثال ۳. فرض کنید $R = \mathbb{Z}_9$، در این‌صورت R یک حلقهٔ شبه موضعی با ایدآل ماکسیمال منحصر به فرد $M = \{0, 3, 6\}$ است.

مثال ۴. هر میدان، حلقه‌ای است که آرتینی و نوتری می‌باشد.

۱–۱۲ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای ناصفر باشد. عبارتی چون،

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

به طوری‌که $P_0, ..., P_n$، ایدآل‌های اول R هستند، زنجیرهٔ ایدآل‌های اول R نامیده می‌شود. طول این زنجیر تعداد علامات $\subset$، در زنجیر است. لذا طول زنجیر فوق n است.

بعد R را برابر با

$$\sup\{\, n \in \mathbb{N}_0 \ :\ \text{زنجیره‌ای به طول } n \text{ از ایدآل‌های اول } R \text{ وجود داشته باشد}\}$$

تعریف می‌کنیم، مشروط بر این که مجموعهٔ فوق کوچک‌ترین کران بالا داشته باشد و در غیر این‌صورت آن را ∞ می‌گوییم. بعد R را با $\dim(R)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۵. بعد هر حلقهٔ جابه‌جایی، آرتینی و ناصفر، برابر صفر است، زیرا در این حلقه‌ها هر ایدآل اول، ماکسیمال است. از این‌رو بعد هر میدان برابر صفر است.

۱—۱۳ تعریف. فرض کنید R یک حلقه باشد. می‌گوییم $x \in R$ **مقسوم‌علیه صفر** در R است، اگر $0 \neq y \in R$ وجود داشته باشد، به طوری‌که $xy = 0$. مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر حلقهٔ R را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم.

۱—۱۴ نکته. فرض کنید R یک حلقهٔ دامنهٔ صحیح باشد، در این‌صورت $Z(R) = \{0\}$.

۱—۱۵ قضیه. (مک کوی) f مقسوم‌علیه‌های صفر حلقهٔ $R[x]$ است اگر و تنها اگر عضوی چون $c \in R$ وجود داشته باشد به طوری‌که، $cf = 0$ و $c \neq 0$.

اثبات. قضیهٔ ۲—۲، از مرجع [۳] را ببینید. ■

۱—۱۶ تعریف. فرض کنید I و J ایدآل های حلقهٔ R باشند. حاصل‌تقسیم یا خارج‌قسمت $(I : J)$ را به صورت:

$$(I : J) = \{a \in R : a.J \subseteq I\}$$

تعریف می‌کنیم. با توجه به این تعریف روشن است که $(I : J)$، ایدآلی از R شامل I می‌باشد. یعنی $I \subseteq (I : J)$

چنانچه $I=\circ$، مجموعهٔ

$$(\circ : J) = \{a \in R : aJ = \circ\} = \{a \in R : ab = \circ, b \in J \text{ به ازای هر } \}$$

را **پوچساز** J می‌نامیم و با $\mathrm{Ann}(J)$ نمایش می‌دهیم.

۱—۱۷ نتیجه. فرض کنید R حلقه کاهشی باشد. در این‌صورت،

$$Z(R) = \bigcup_{P \in Min(R)} P$$

اثبات. نتیجهٔ ۲—۴، از مرجع [۱۹] را ببینید. ■

۱—۱۸ لم. فرض کنید R حلقهٔ جابه‌جایی و X مجهولی روی R باشد. فرض می‌کنیم $f : R \longrightarrow R[X]$ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد و اصطلاحات توسیع و تحدید و نمادهای ۱—۱۰، را در مورد f به کار می‌بریم.

فرض می‌کنیم I ایدال R باشد و به ازای $r \in R$ نگارهٔ طبیعی r در R/I را با $(\overline{r})$ نمایش می‌دهیم.

بنا براین یک همریختی حلقه‌ای مانند

$$\eta : R[X] \longrightarrow (R/I)[X]$$

وجود دارد که به ازای هر $r_\circ, r_1, ..., r_n \in R \;\;,\;\; n \in N$ $\eta(\sum_{i=\circ}^{n} r_i X^i) = \sum_{i=\circ}^{n} \overline{r}_i X^i$

۱) $I^e = Ker\eta$، یعنی

$$I^e = \{\sum_{i=\circ}^{n} r_i X^i \in R[X] \; : \; r_i \in I \;,\; i = \circ, ..., n \text{ به ازای هر } n \in \mathbb{N}_\circ\}$$

۲) $I^{ec} = I$ و لذا $\mathbb{C}_R = \tau_R$؛

۳) $R[I]/I^e = R[X]/IR[X] \cong (R/I)[X]$؛

۴) اگر $I_1, ..., I_n$ ایدالهایی از R باشند آن‌گاه

$$(I_1 \cap ... \cap I_n)R[X] = I_1 R[X] \cap ... \cap I_n R[X].$$

اثبات. تمرین ۲—۴۷، از مرجع [۲] را ببینید. ■

۱—۱۹ تعریف. زیر مجموعهٔ A از حلقهٔ B را زیر حلقه گوییم اگر A با اعمال B زیر حلقه باشد. در این‌صورت گوییم B حلقهٔ حاصل از توسیع A است .

۱—۲۰ تعریف. فرض کنید R یک حلقه و $S = R - Z(R)$، در این‌صورت $S^{-1}R$ را حلقهٔ خارج‌قسمتی تام حلقهٔ R گوییم و با $T(R)$ نمایش می‌دهیم. هر عضو S رایک عضو منظم حلقه R می‌نامند.

۱—۲۱ تعریف. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی باشد، حلقهٔ R را فون‌نویمان منظم گوییم، هرگاه به ازای هر $x \in R$، $y \in R$ موجود باشد، به طوری‌که $x = x^2 y$.

مثال ٦. فرض کنید R یک میدان باشد، در این‌صورت R فون‌نویمان منظم است. زیرا به ازای هر $0 \neq a \in R$ داریم $a = a^2 a^{-1}$.

۱—۲۲ نکته. هر حلقه فون‌نویمان منظم کاهشی است.

۱—۲ مفاهیمی در نظریهٔ ضرب تانسوری و مدول‌های یکدست

۱—۲۳ تعریف. Rـ مدول راست، A یکدست است اگر فانکتور $A \otimes_R -$ دقیق باشد . همچنین، Rـ مدول چپ، B یکدست است اگر فانکتور $- \otimes_R B$ دقیق باشد .

۱—۲۴ قضیه. شرایط زیر معادل هستند.

۱) B، Rـ مدول راست یکدست است،

۲) به ازای هر Rـ همریختی یک به یک مثل $\varphi : A \longrightarrow A'$ ، $\mathbb{Z}$ـ همریختی

$$۱_B \otimes \varphi : B \otimes_R A \longrightarrow B \otimes_R A'$$

یک به یک است .

اثبات. قضیهٔ ۱۰—۱، از مرجع [۵] را ببینید. ■

۱—۲۵ قضیه. فرض کنید R حلقه باشد دراین‌صورت R ، Rـ مدول یکدست است.

اثبات. قضیهٔ ۳—۴۳، از مرجع [۲۴] را ببینید. ■

۱—۲۶ قضیه. فرض کنید F_R یکدست و $۰ \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow ۰$ یک دنباله دقیق از Rـ مدولهای راست باشد . آن‌گاه شرایط زیر هم ارزند:

۱) B یکدست است؛

۲) $K \bigcap FI = KI$، به ازای ایدال چپ I؛

۳) $K \bigcap FI = KI$، به ازای ایدال متناهی تولید I.

اثبات. قضیهٔ ۳—۵۵، از مرجع [۲۴] را ببینید. ■

۱—۲۷ قضیه. حلقهٔ R فون‌نویمان منظم است اگر و تنها اگر هر Rـ مدول راست یکدست باشد.

اثبات. قضیهٔ ۳—۵۴ ، از مرجع [۲۴] را ببینید. ■

فصل ۲

گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های جابه‌جایی

انسانهای باهوش مسائل را حل می‌کنند، نوابغ آنها را اثبات می‌کنند .

آلبرت انیشتین [۱]

در این فصل گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های جابه‌جایی را معرفی کرده و به بررسی گراف مقسوم‌علیه‌های صفر، چندین حلقهٔ جابه‌جایی می‌پردازیم. هم‌چنین در این فصل با ارائهٔ قضایای پایه و اساسی در این مقوله با ویژگی‌ها و خواص این گراف بیشتر آشنا می‌شویم و رابطهٔ این گراف را با ویژگی‌های جبری حلقه بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲—۱ مفاهیمی در نظریهٔ گراف

از آنجا که برخی از مفاهیم مقدماتی در نظریهٔ گراف ازاساسی‌ترین ابزار لازم در بررسی ساختار گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های جابه‌جایی می‌باشند، لذا در این بخش مختصراً به بیان مفاهیم و

[۱] Albert Einshtein