دانشگاه سیستان وبلوچستان

پایان نامه‌کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان :

مسئله برنامه ریزی خطی فازی با توابع عضویت نمایی، تک وچند هدفه

استاد راهنما:

دکتر حسن میش مست نهی

تحقیق و نگارش :

زهرا شهرکی

بهمن ۹۰

چکیده

در این پایان نامه مسئله برنامه ریزی خطی فازی با توابع عضویت نمایی، تک و چند هدفه مورد بررسی قرار گرفته است. در ابتدا مقدمه ای از مفاهیم فازی، برنامه ریزی خطی فازی و برنامه ریزی چند هدفه بیان شده است. بعد از معرفی برخی از روشهای حل مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفه، مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفه فازی با استفاده از توابع عضویت نمایی توضیح داده شده است و در انتها مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفه تماماً فازی و روش حل آن ارائه شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱ – ۱ مقدمه

ناتوانی مجموعه های کلاسیک در بیان کمیتها و مفاهیم نادقیق همچون کوچکی، بزرگی، ارزانی، گرانی، جوانی، پیری و ... که در هر سیستم دارای معنی خاصی هستند باعث شد تا نظریه مجموعه های فازی قدم به میدان بگذارد. نظریه مجموعه فازی را پروفسور لطفی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ ارائه نمود. بدین ترتیب تئوری مجموعه فازی را که از مفاهیم اساسی مجموعه فازی و توابع عضویت استفاده میکند ابداع کرد [۱۸]. این نظریه از زمان ارائه تا کنون گسترش یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه های مختلف پیدا کرده است.

در مسائل تصمیم گیری فازی مفهوم بیشینه سازی تصمیم توسط بلمن [۱] و زاده [۲] ارائه شد[۱]. سپس زیمرمن [۳] یک روش فازی برای مسائل برنامه ریزی خطی چند هدفه را مطرح کرد[۱۵]. او همچنین روابط بین دوگان در برنامه ریزی خطی فازی را مورد مطالعه قرار داد. مسائل برنامه ریزی خطی فازی با ضرایب فازی توسط نگویتا [۴] قالب بندی شد.

در فصل حاضر تعاریف و مفاهیم مقدماتی نظریهٔ مجموعه های فازی [۱۶]، برنامه ریزی خطی فازی و برنامه ریزی خطی چند هدفه و برخی روشهای حل آن مطرح و بررسی می شوند.

۱ – ۲ مفاهیم فازی

در این بخش برخی از تعاریف و مفاهیم و عملیات اساسی در مجموعه های فازی را که دربخش های بعد مورد استفاده واقع می شوند، بطور خلاصه بیان می کنیم [۸]:

تعریف ۱ – ۱: اگر $\widetilde{A}$ یک مجموعه فازی در X با تابع عضویت $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ و $\alpha \in [۰, ۱]$ زیر مجموعه اعضایی از x که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ حداقل به بزرگی α است، $\alpha-$ برش $\widetilde{A}$ گویند و با نماد $\widetilde{A}_\alpha$ نمایش می دهند.

$$\widetilde{A}_\alpha = \{x \in X |\ \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

[۱] Bellman
[۲] Zadeh
[۳] Zimmermann
[۴] Negoita

در بعضی مواقع از $\alpha-$ برش قوی استفاده می شود که با نماد $\widetilde{A}_{\overline{\alpha}}$ نشان می دهند و به این صورت تعریف می شود:

$$\widetilde{A}_{\overline{\alpha}} = \{x \in X | \mu_{\widetilde{A}}(x) > \alpha\}.$$

واضح است که اصل زیر برای $\alpha-$ برش ها صادق است.

$$\alpha_۱ \geq \alpha_۲ \Longleftrightarrow A_{\alpha_۱} \subseteq A_{\alpha_۲}$$

تعریف ۱—۲: مجموعه فازی $\widetilde{A}$ درR^n یک مجموعه فازی محدب گوییم هرگاه به ازای هر $\alpha \in (۰, ۱]$، $\alpha-$ برشهای آن مجموعه هایی محدب باشند.

۱—۳ سه اصل مهم

تعریف ۱— ۳ (اصل تجزیه): هر مجموعه فازی مانند $\widetilde{A}$ را می توان به صورت زیر بر حسب $\alpha-$ برش های آن نمایش داد.

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [۰,۱]} \alpha.\widetilde{A}_\alpha$$

تعریف ۱— ۴ (اصل تحدب): مجموعه فازی $\widetilde{A}$ در $\Re^n$ یک مجموعه فازی محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و $\gamma \in [۰, ۱]$ داریم که :

$$\mu_{\widetilde{A}}(\gamma x_۱ + (۱ - \gamma)x_۲) \geq min\{\mu_{\widetilde{A}}(x_۱), \mu_{\widetilde{A}}(x_۲)\}$$

تعریف ۱— ۵ (اصل گسترش): اگر f تابعی از X به Y باشد و $\widetilde{A}$ یک مجموعه فازی روی X، در این صورت $\widetilde{B} = f(\widetilde{A})$ یک مجموعه فازی روی Y است که تابع عضویت آن به این صورت می باشد:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-۱}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-۱}(y) \neq \emptyset \\ ۰ & f^{-۱}(y) = \emptyset \end{cases}$$

۱ــ۴ اعداد فازی

یکی از کاربردهای اصل گسترش، تعمیم عملگرهای جبری معمولی مانند جمع و ضرب برای اعداد فازی است. در این قسمت ابتدا تعریفی از عدد فازی ارائه شده و سپس با استفاده از اصل گسترش عملگرهای جبری را برای این اعداد به دست می آوریم.

تعریف ۱ــ ٦: یک مجموعه فازی $\widetilde{N}$ از $\Re$ را یک عدد فازی گوییم، اگر:

۱) محدب باشد.

۲) $\widetilde{N}(x)$ نرمال و تک نمایی باشد یعنی دقیقاً یک $x_\circ \in \Re$ وجود داشته باشد که ۱ $= \widetilde{N}(x_\circ)$.

۳) $\widetilde{N}(x)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد.

مجموعه تمام اعداد فازی را با $F(\Re)$ نشان می دهیم.

۱ــ۴ــ۱ اعمال روی اعداد فازی

اگر $\Re \to \Re \times \Re : *$ یک عملگردوتایی باشد و$\widetilde{M}$ ، $\widetilde{N}$ دو عدد فازی، در این صورت به کمک اصل گسترش $\widetilde{M} \otimes \widetilde{N}$ را به صورت زیر می توان بدست آورد:

$$(\tilde{M} \otimes \tilde{N})(z) = \sup_{z=x*y} \min\{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(y)\}$$

اعمال روی اعداد فازی به صورت زیر هستند.

۱. جمع دو عدد فازی $\widetilde{N}$ و $\widetilde{M}$:

$$\mu_{\tilde{M}+\tilde{N}}(z) = \sup_{z=x+y} \{\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{N}}(y)\} = \sup_{x\in R} \min\{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(z-x)\}$$

۲. تفریق دو عدد فازی $\widetilde{N}$ و $\widetilde{M}$:

$$\mu_{\tilde{M}-\tilde{N}}(z) = \sup_{z=x-y} \{\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{N}}(y)\} = \sup_{x\in R} \min\{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(x-z)\}$$

۳. ضرب دو عدد فازی $\widetilde{N}$ و $\widetilde{M}$:

$$\mu_{\tilde M \times \tilde N}(z) \;=\; \sup_{z=x.y}\{\,\mu_{\tilde M}(x)\;\wedge\;\mu_{\tilde N}(y)\} = \sup_{x\in R}\,\min\{\,\mu_{\tilde M}(x)\,,\,\mu_{\tilde N}(\frac{z}{x})\}\;,\;\; z\neq ۰$$

۴. تقسیم دو عدد فازی $\tilde N$ و $\widetilde M$:

$$\mu_{\tilde M \div \tilde N}(z) \;=\; \sup_{z=\frac{x}{y}}\{\,\mu_{\tilde M}(x)\;\wedge\;\mu_{\tilde N}(y)\} = \sup_{x\in R}\,\min\{\,\mu_{\tilde M}(x)\,,\,\mu_{\tilde N}(\frac{x}{z})\}\;,\;\; z\neq ۰$$

۱—۴—۲ اعداد فازی $L-R$:

عدد فازی $\tilde A$، یک عدد فازی $(L-R)$ گوئیم در صورتیکه تابع عضویت آن بصورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde A}(x) \;=\; \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & x\le m, \quad \alpha > ۰ \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & x\ge m, \quad \beta > ۰ \end{cases}$$

(۱) $L(x)=L(-x)$

(۲) $L(۰)=۱$

(۳) $L(x)$ تابع ناصعودی روی $[۰,\infty)$ است.

(۴) $R(x)$ تابع نزولی روی $[۰,\infty)$ می باشد.

وعدد فازی $(L-R)$، $\tilde A$ را بصورت زیر نشان می دهیم:

$$\tilde A \;=\; (m,\,\alpha,\,\beta)_{LR}$$

بعضی توابع L و R بصورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} L(x) &= \max(۰,\quad ۱-|x|^p)\,,\quad p>۰ \\ L(x) &= \exp(-|x|^p)\quad\quad ,\quad p>۰ \\ L(x) &= \tfrac{۱}{۱-|x|^p}\quad\quad\quad ,\; p>۰ \\ R(x) &= ۱-L(x) \end{aligned}$$

۱—۴—۳ اعداد فازی مثلثی $(T.F.N)$

در این قسمت دسته خاصی از اعداد فازی، که کاربرد فراوانی دارند را تحت عنوان اعداد فازی مثلثی $(T.F.N)$[۵]، معرفی می کنیم. یک عدد مثلثی $\widetilde{A}$ به صورت $\widetilde{A}=(a,b,c)$ نمایش داده می شود که a,b,c اعداد حقیقی می باشند.

تابع عضویت عدد مثلثی $\widetilde{A}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & a\leq x\leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b\leq x\leq c \\ 0 & x>c \end{cases}$$

α — برش اعداد فازی مثلثی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall\,\alpha\in[0,\ 1],\ \ A_\alpha=[\,a^{(\alpha)},\,c^{(\alpha)}]=[(b-a)\alpha+b,\ \ -(c-b)\alpha+c]$$

تعریف ۱—۷ : عدد فازی مثلثی $\widetilde{A}=(a,b,c)$ رامثبت گویند اگر وفقط اگر $a\geq 0$.

تعریف ۱—۸ : دو عدد فازی مثلثی $\widetilde{A}=(a,b,c)$ و $\widetilde{B}=(e,f,g)$ مساوی با هم هستند اگر و فقط اگر $c=g, b=f, a=e$.

۱—۴—۴ عملگرهای جبری تعمیم یافته بر روی اعداد فازی مثلثی

اگر $\widetilde{A}=(a,b,c)$ و $\widetilde{B}=(e,f,g)$ دو عدد فازی مثلثی باشند. در این صورت عملیات جبری تعمیم یافته روی A و B عبارتند از:

$$\begin{aligned} &(i)\ \widetilde{A}\oplus\widetilde{B}=(a,b,c)\oplus(e,f,g)=(a+e,b+f,c+g),\\ &(ii)\ -\widetilde{A}=-(a,b,c)=(-c,-b,-a),\\ &(iii)\ \widetilde{A}\ominus\widetilde{B}=(a,b,c)\ominus(e,f,g)=(a-g,b-f,c-e), \end{aligned}$$

$$iv)\ A\ \otimes B\ \approx\begin{cases} (ae,\,bf,\,gc), & a\geq 0,\\ (ag,\,bf,\,cg), & a<0,\ c\geq 0,\\ (ag,\,bf,\,ce), & c<0. \end{cases}$$

[۵] Triangular Fuzzy Number

۱−۴−۵ اعداد فازی ذوزنقه ای $(Tr.F.N)$

در این قسمت دسته مهم دیگری از اعداد فازی به نام اعداد ذوزنقه ای $(Tr.F.N)$[۶] معرفی می گردد. عدد فازی ذوزنقه ای A را با چهار تائی $A = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$ نشان می دهیم. $\alpha-$ برش آن به صورت زیر نوشته می شود.

$$\forall\,\alpha \in [0,\ 1],\ \ A_\alpha = [(a^{(2)} - a^{(1)})\alpha + a^{(1)},\ -(a^{(4)} - a^{(3)})\alpha + a^{(4)}].$$

و تابع عضویت یک $(Tr.F.N)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a^{(1)}}{a^{(2)}-a^{(1)}} & a^{(1)} \le x \le a^{(2)} \\ 1 & a^{(2)} \le x \le a^{(3)} \\ \frac{a^{(4)}-x}{a^{(4)}-a^{(3)}} & a^{(3)} \le x \le a^{(4)} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

۱−۵ روش تابع (شاخص) مرتب کننده

یکی از متداول ترین روشها برای مقایسه اعداد فازی استفاده از توابع مرتب کننده است [۱۰]. فرض کنید $F(\Re)$ مجموعه همه اعداد فازی در $\Re$ باشد و $A, B \in F(\Re)$، در این روش یک تابع مناسب $R : F(\Re) \to \Re$ معرفی می کنیم که به هر عدد فازی یک عدد حقیقی نسبت می دهد. R را تابع مرتب کننده یا شاخص مرتب کننده می نامیم و $R(A) \ge R(B)$ را معادل با $A \underset{R}{\ge} B$ تعریف می کنیم. (یعنی $A \ge B$ نسبت به تابع مرتب کننده R). در واقع تابع مرتب کننده به هر عدد فازی یک عدد حقیقی نسبت می دهد که در عمل برای مقایسه اعداد فازی، به جای اعداد فازی از اعداد حقیقی مربوطه استفاده می کنیم. ترتیب در $F(\Re)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$A \underset{R}{\ge} B$ اگر و تنها اگر $R(A) \ge R(B)$

$A \underset{R}{>} B$ اگر و تنها اگر $R(A) > R(B)$

$A \underset{R}{=} B$ اگر و تنها اگر $R(A) = R(B)$

[۶] $TrapezoidalFuzzyNumber$

به علاوه $A \underset{R}{\le} B$ اگر و تنها اگر $B \underset{R}{\ge} A$

در مسائل مربوط به برنامه ریزی خطی فازی اغلب توجه مان را روی توابع مرتب کننده جلب می کنیم.

تعریف ۱— ۹: R را یک تابع مرتب کننده خطی گویند هرگاه به ازای هر $A, B \in F(\Re)$ و هر $K \in \Re$ داشته باشیم:

$$R(KA + B) = KR(A) + R(B)$$

۱—۶ تصمیم فازی

تصمیم فازی توسط بلمن و زاده (۱۹۷۰) مطرح گردید [۱]. آنها در باره سه مفهوم اساسی هدف فازی، قیود فازی و تصمیم فازی که در تصمیم گیری از اهمیت ویژه برخوردارند بحث نموده اند [۱۷].

فرض کنید X مجموعه ای از جوابهای مسئله تصمیم گیری باشد. هدف فازی G، مجموعه فازی روی X می باشد که با تابع عضویت $\mu_G : X \to [0, 1]$ مشخص می شود.

قید فازی C، مجموعه فازی روی X است که با تابع عضویت $\mu_C : X \to [0, 1]$ مشخص می شود.

با استفاده از دو مفهوم هدف فازی و قیود فازی که هم زمان برآورد شوند، بلمن و زاده تصمیم فازی D که نتیجه از اشتراک هدف فازی G و قید C است را تعریف نموده اند. $G \cap C$ که با تابع عضویت زیر مشخص می شود. در این صورت تابع عضویت تصمیم فازی D یعنی $\mu_D(x)$ به صورت زیر است:

$$\mu_D(x) = min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}$$

حال تصمیم بهینه متناظر با بیشینه سازی $\mu_D(x)$ روی X نتیجه می شود. یعنی

$$\mu_D(x^*) = \max_{x \in X} \ \mu_D(x) = \max_{x \in X} \ \{\min(\mu_G(x), \ \mu_C(x))\}$$

در حالت کلی تصمیم فازی D که محصول k هدف فازی $G_1, ..., G_k$ و m قید فازی $C_1, ..., C_m$ می باشد، به صورت زیر تعریف می شود.

$$D = G_1 \cap ... \cap G_k \cap C_1 \cap ... \cap C_m$$

و در این حالت تصمیم بهین متناظر با بیشینه سازی مینیمم توابع عضویت اهداف و محدودیت های فازی نتیجه می شود، به عبارت دیگر

$$\mu_D(x^*) = \underset{x\in X}{Max}\, \mu_D(x) = \underset{x\in X}{Max}\{Min(\mu_{G_1}(x), ..., \mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x), ..., \mu_{C_m}(x))\}$$

در رابطه فوق اهداف G_i و قیود فازی C_i از اهمیت مساوی برخوردارند.

وقتیکه قیود و اهداف فازی از اهمیت مساوی برخوردار نباشند، تصمیم فازی محدب به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\begin{aligned}
&\mu_D^{co}(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu_{C_j}(x)\\
&\sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1\\
&\alpha_i,\ \beta_j \geq 0
\end{aligned}$$

که ضرایب وزن بیانگر اهمیت نسبی اهداف و قیود فازی می باشند. همچنین با توجه به اهداف و قیود بالا تصمیم فازی حاصل ضرب به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_D^{pr}(x) = \left(\prod_{i=1}^{k} \mu_{G_i}(x)\right)\left(\prod_{j=1}^{m} \mu_{C_j}(x)\right)$$

برای تصمیم فازی محدب و یا حاصل ضرب، مشابهاً تصمیم بهین به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}
&\mu_D^{co}(x^*) = \max_{x\in X} \{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu_{C_j}(x)\}\\
&\mu_D^{pr}(x^*) = \max_{x\in X} \{ (\prod_{i=1}^{k} \mu_{G_i}(x)) \times (\prod_{j=1}^{n} \mu_{C_j}(x))\}
\end{aligned}$$

باید توجه داشت که رابطه زیر برای تصمیم فازی رابطه برقرار است [۱]:

$$\mu_D^{pr}(x) \leq \mu_D(x) \leq \mu_D^{Co}(x)$$

۱—۷ برنامه ریزی خطی فازی

برنامه ریزی خطی، یکی از ابزارهای سازنده تصمیم گیری برای حل مسائل دنیای واقعی است. از آن جا که گاهی در این گونه مسائل با ابهام هایی مواجه هستیم، برای حل آنها به برنامه ریزی فازی پرداخته می شود.

ابهام در مسائل برنامه ریزی ریاضی شامل ابهام در سطح برآورده شدن تابع هدف و قیود است که ($Vagueness$) و ابهام در مقدار ضرایب و پارامترهای مسئله که آنرا با ($Ambiguity$) نمایش می دهند، براساس این ابهام ها سه دسته بندی زیر را برای مسائل برنامه ریزی نادقیق بیان می شود:

۱ — مسئله برنامه ریزی ریاضی دارای ابهام در سطح برآورده شدن آرمان (تابع هدف یا قید).

۲— مسئله برنامه ریزی ریاضی دارای ابهام در پارامترها و ضرایب مسئله.

۳— مسئله برنامه ریزی ریاضی که هر دو نوع ابهام را داشته باشد.

۱—۷—۱ برنامه ریزی خطی انعطاف پذیر

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{Max}\,(\underset{\sim}{Min}) \quad Z = cx \\ &s.t. \qquad Ax \precsim b, \\ &\qquad\qquad x \geq \circ. \end{aligned}$$

نماد $\sim$ به معنای ابهام در سطح برآورده شدن تابع هدف و نامساوی های قیود را نمایش می دهد.

در این نوع از بیشینه سازی (کمینه سازی) با در نظر گرفتن یک سطح انتظار $z_\circ$ برای تابع هدف Z، تصمیم گیرنده به دنبال این است که مقدار تابع هدف $Z = cx$ از مقدار انتظار $z_\circ$ بیشتر (کمتر) شود. در این حالت یک آستانه تحمل $d_\circ$ نیز پذیرفتنی خواهد بود.

به عبارت دیگر تابع هدف

$$\underset{\sim}{Min}\, Z = \mathbf{cx}$$

را می توان با نا مساوی $\precsim$ به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{cx} \precsim z_\circ$$

به این ترتیب مدل مسئله برنامه ریزی خطی فازی فوق به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} cx &\precsim z_\circ \\ Ax &\precsim b, \\ x &\geq \circ. \end{aligned}$$

مشابهاً برای هر یک از قیود نیز یک تابع عضویتی که نمایش ابهام در هر یک از نامساوی ها را نمایش می دهد می توان معرفی کرد:

$$(Ax)_i \precsim b_i \quad (i = ۱, ۲, ..., m)$$

حال با در نظر گرفتن ماتریس جدید B

$$B = \begin{pmatrix} c \\ A \end{pmatrix}$$
$$b' = \begin{pmatrix} z_\circ \\ b \end{pmatrix}$$

دستگاه نا معادلات انعطاف پذیر بالا به فرم زیر خلاصه می شود:

$$\begin{aligned} Bx &\precsim b' \\ x &\geq \circ. \end{aligned}$$

و تابع عضویت برای قید i ام نامساوی انعطاف پذیر بالا $(i = \circ, ۱, ۲, ..., m)$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} {b_i}' = b_i & i = ۱, ۲, ..., m \\ {b_\circ}' = z_\circ & i = \circ \end{cases}$$

توجه کنید که ضابطه تابع عضویت فوق:

$$\underset{i=0,1,2,...,m}{\mu_i((Bx)_i)} = \begin{cases} 1 & (Bx)_i \leq b_i' \\ 1 - \frac{(Bx)_i - b_i'}{d_i} & b_i' \leq (Bx)_i \leq b_i' + d_i \\ 0 & (Bx)_i \geq b_i' + d_i \end{cases}$$

چون تابع عضویت محدودیت i ام در مسئله فوق به صورت $(i = 0, 1, 2, ..., m)\mu_i((Bx)_i)$ است. لذا بر اساس تصمیم بلمن – زاده، تصمیم فازی معادل محدودیت های فوق از حل مسئله زیر بدست می آید.

$$\mu_D(x^*) = \underset{0 \leq x \in R}{Maximize} \quad \underset{i=0,1,2,...,m}{Min} \quad \{\mu_i((Bx)_i)\}$$

$$= \underset{x \geq 0}{Maximize} \quad \underset{i=0,1,2,...,m}{Min} \quad \{1 - \frac{(Bx)_i - b_i'}{d_i}\}$$

$$= \underset{x \geq 0}{Maximize} \quad \underset{i=0,1,2,...,m}{Min} \quad \{1 - \frac{(Bx)_i}{d_i} + \frac{b_i'}{d_i}\}$$

اگر $\frac{(Bx)_i}{d_i} = (B'x)_i$ و $\frac{b_i'}{d_i} = b''_i$ قرار دهیم.

داریم که :

$$\mu_D(x^*) = \underset{x \geq 0}{Maximize} \quad \underset{i=0,1,2,...,m}{Min} \{1 + b_i'' - (B'x)_i\}$$

با انتخاب $\lambda = \underset{i=0,1,...,m}{Min} \; 1 + b''_i - (B'x)_i$ به عنوان یک قید جدید فرم غیر خطی فوق به صورت یک برنامه ریزی خطی معمولی تبدیل می شود. که معادل است با:

$$\lambda \leq 1 + b_i'' - (B'x)_i \; , \qquad i = 1, 2, ..., m$$

و لذا مسئله برنامه ریزی خطی فوق به فرم برنامه ریزی خطی زیر تبدیل می شود [۳].

$$\begin{aligned} & Maximize \quad \lambda \\ & \quad s.t. \qquad \lambda \leq 1 + b_i'' - (B'x)_i \qquad i = 0, 1, 2, ..., m \\ & \qquad\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

۱—۷—۲ برنامه ریزی امکانی

مدل

$$\begin{aligned} Maximize \quad & \tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i \qquad i = 0, 1, 2, ..., m \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, ..., n \end{aligned} \qquad (1-1)$$

که یک مسئله برنامه ریزی خطی فازی است که در آن ضرایب مسئله اعداد فازی هستند را در نظر بگیرید. می توان ثابت کرد که جواب بهین مسئله برنامه ریزی خطی (۱—۱) با جواب بهین مسئله برنامه ریزی معمولی زیر معادل است:

$$\begin{aligned} Maximize \quad & \tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n} F(\tilde{c}_j)\, x_j \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} F(\tilde{a}_{ij})\, x_j \leq F(\tilde{b}_i) \qquad i = 0, 1, 2, ..., m \\ & x_j \geq 0 \qquad , \quad j = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

که در آن F یک تابع مرتب کننده خطی است.

لازم به ذکر است که روش حل دیگری نیز برای برنامه ریزی خطی فازی با ابهام در پارامترها با استفاده از درجات لزوم و امکان وجود دارد که می توان به [۱۲] مراجعه کرد.

۱—۷—۳ برنامه ریزی سخت

نوع سوم برنامه ریزی ریاضی فازی، برنامه ریزی سخت است که در آن هر دونوع ابهام در سطح برآورده شدن تابع هدف وقیود، همچنین پارامترهاوجود دارد که مدل این نوع برنامه ریزی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \widetilde{Maximize} \quad (\widetilde{Minimize}) \quad & \tilde{Z} = \tilde{c}x \\ s.t. \quad & \tilde{A}x \precsim \tilde{b}, \\ & x \geq 0 . \end{aligned}$$

که برای حل آن از ترکیب دو روش قبل استفاده می شود.

۱—۸ برنامه ریزی خطی چند هدفه

مسئله تصمیم گیری با چند هدف و یا به عبارتی مسئله بهینه سازی برداری اولین بار توسط کان— تاکر [۷] در سال ۱۹۵۱ عنوان شد، به علت کاربرد فراوان در علوم مدیریت و صنایع توسط محققان وپژوهشگران مورد توجه خاصی قرار گرفت. در سال ۱۹۶۱، چارنز[۸] و کوپر[۹] برای اولین بار جزئیات مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفه $(MOLP)$ را بیان کردند و دانشمندان دیگر مانند بلمن، زاده و غیره نیز در این زمینه به تحقیق پرداختند.

فرم کلی یک مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفه $(MOLP)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&Min \;\; z_1(x)=c_1x\\
&Min \;\; z_2(x)=c_2x\\
&\quad\vdots\\
&Min \;\; z_k(x)=c_kx\\
&\;s.t. \;\; Ax\leq b,\\
&\qquad\; x\geq 0.
\end{aligned}\qquad (2-1)$$

که در آن $c_i=(c_{i1},c_{i2},...,c_{in}), i=1,2,...,k$ و A یک ماتریس $m\times n$.

بعضی اوقات بطور خلاصه مسئله مدل (۱—۲) را به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$\begin{aligned}
&Min \;\; Z(x)=\;Cx\\
&S.t.\\
&\quad x\in X=\{x\in R^n \;|\; Ax\leq b,\quad x\geq 0\}
\end{aligned}$$

که $C=(c_1,c_2,...,c_k)^T$ ماتریس $k\times n$ و $Z(x)=(z_1(x),z_2(x),...,z_k(x))^T=(c_1x,...,c_kx)^T$.

بعضی مواقع برای این گونه مسائل جواب بهین کامل یا ایده ال به صورت زیر موجود است.

تعریف ۱— ۱۰(جواب بهین کامل): $x^*\in X$ را جواب بهین کامل یا ایده ال مسئله چند هدفه (۱—۲) گوییم، اگر

---

[۷] Kuhn, H.W, Tucker

[۸] Charnes

[۹] Cooper