به نام دادار خردورز.
می‌خوانیمش که از تاریکی‌های پندار برونمان آرد.
به روشنایی فهم بزرگیمان بخشد.
درب های رحمتش را برویمان بگشاید.
و گنجینه‌های دانشش را فرا رویمان بگسترانند.

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد

ریاضی محض (شاخهٔ آنالیز)

عنوان

یکریختی‌های دنباله‌ای بین اثرهای جبرهای فون نویمان و $C(X, I)$

استاد راهنما

دکتر حکیمه ماهیار

تدوین

فاطمه امیرفتحی

بهمن ماه ۱۳۸۶

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....
واحد ....

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد

جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه‌ی خانم فاطمه امیرفتحی دانشجوی دوره‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی محض تحت عنوان:

یکریختی‌های دنباله‌ای بین اثرهای جبرهای فون نویمان و $C(X,I)$

در روز سه‌شنبه مورخ ۸۶/۱۱/۹ در دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه‌ی آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمره‌ی این آزمون نوزده تمام (۱۹/-) می‌باشد.

۱ـ عالی ☑
۲ـ بسیار خوب ☐
۳ـ خوب ☐
۴ـ قابل قبول ☐
۵ـ غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر حکیمه ماهیار	دکتر مسعود امینی	دکتر علیرضا مدقالچی

جواد لاآلی
رئیس دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تهران، خیابان طالقانی بین بهار وشریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن ۷۷۵۰۷۷۷۲-۵ فاکس ۷۶۲۹۸۸

تقدیم

به خانواده ام.

سپاس

سپاس و ستایش خدای را که در تمام مراحل زندگی‌ام حامی و یاور من بوده است.

تقدیر و تشکر از تک تک اعضای خانواده‌ام به ویژه پدرم به پاس زحمات بی‌دریغش و مادرم به خاطر دعاهای نجیبانه‌اش و از کلیهٔ معلمان و اساتید ارجمندم از دبستان تا دانشگاه به نیکی یاد نموده و از آنها کمال تقدیر و تشکر را دارم. به ویژه از استاد بزرگوار و مهربانم سرکار خانم دکتر ماهیار و همچنین از جناب آقای دکتر مدقالچی و جناب آقای دکتر امینی به خاطر قبول داوری این پایان‌نامه بسیار سپاس گذارم.

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر واحددار باشد. عضو مثبت کمتر یا مساوی واحد $\mathcal{A}$ را اثر $\mathcal{A}$ گوییم. مجموعهٔ همهٔ اثرها در $\mathcal{A}$ را با نماد $E(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم. ضرب دنباله‌ای $\circ$ روی $E(\mathcal{A})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \circ B = A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}, \qquad (A, B \in E(\mathcal{A})).$$

فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو C^*- جبر واحددار باشند. نگاشت دوسویی $\phi : E(\mathcal{A}) \longrightarrow E(\mathcal{B})$ را یکریختی دنباله‌ای گوییم هرگاه برای هر $A, B \in E(\mathcal{A})$، $\phi(A \circ B) = \phi(A) \circ \phi(B)$.

در این پایان‌نامه ساختار همهٔ یکریختی‌های دنباله‌ای بین مجموعه‌های اثرهای جبرهای فون نویمان را بررسی می‌کنیم. در واقع نشان داده می‌شود که برای هر دو جبر فون نویمان $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ و هر یکریختی دنباله‌ای $\phi : E(\mathcal{A}) \longrightarrow E(\mathcal{B})$، تجزیه‌های مستقیم

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_3, \qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2 \oplus \mathcal{B}_3$$

در کاتگوری جبرهای فون نویمان و نگاشت‌های دوسویی

$$\phi_1 : E(\mathcal{A}_1) \longrightarrow E(\mathcal{B}_1), \qquad \Phi_2 : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_2, \qquad \Phi_3 : \mathcal{A}_3 \longrightarrow \mathcal{B}_3$$

وجود دارند به طوری که

(الف) $\mathcal{A}_1$ و $\mathcal{B}_1$ جبرهای فون نویمان تعویض‌پذیر هستند و جبرهای $\mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_3$ و $\mathcal{B}_2 \oplus \mathcal{B}_3$ جمعوند مستقیم تعویض‌پذیر ندارند.

(ب) ϕ_1 نگاشت دوسویی ضربی است، Φ_2 یک *- یکریختی است، Φ_3 یک *- پادیکریختی است و $\phi = \phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \Phi_3$ روی $E(\mathcal{A})$ برقرار است.

اگر اسکالر $\lambda \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi(\lambda I_A) = \lambda I_B$ و یا اگر $\mathcal{A}$ دارای جمعوند مستقیم تعویض‌پذیر نباشد، در این صورت یکریختی دنباله‌ای ϕ بین اثرها به حاصلجمع مستقیم یک *- یکریختی و یک *- پادیکریختی بین زیرجبرهای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ توسیع می‌یابد.

سپس در مورد نگاشت‌های دوسویی ضربی روی مجموعهٔ اثرهای جبرهای فون نویمان تعویض‌پذیر یا کلی‌تر، روی مجموعهٔ اثرهای C^*- جبرهای تعویض‌پذیر و واحددار بحث خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: جبر فون نویمان، اثر، ضرب دنباله‌ای، یکریختی دنباله‌ای، جردن *- یکریختی، E- یکریختی، حافظ، نگاشت ضربی، مجموعهٔ باز ماکسیمال.

رده‌بندی موضوعی ریاضی: 46L60, 47B49, 46J10, 46E05.

مقدمه

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر وا حددار باشد. عضو مثبت کمتر یا مساوی واحد $\mathcal{A}$ را اثر $\mathcal{A}$ گوییم. مجموعهٔ همهٔ اثرها در $\mathcal{A}$ را با نماد $E(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم. اگر $\mathcal{A}$ مساوی $B(H)$، جبر همهٔ عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط H باشد، اثرهای متناظر یعنی عملگرهای (خطی کراندار) مثبت روی H که عملگر همانی I_H از آنها بزرگتر است، اثرهای فضای هیلبرت نامیده می‌شوند و با $E(H)$ نمایش داده می‌شوند.

اثرها نقش بسیار مهمی در برخی قسمت‌های مکانیک کوانتوم ایفا می‌کنند، مثلاً در نظریهٔ اندازه‌گیری کوانتومی [۳]. معمولاً مجموعهٔ اثرها یعنی $E(H)$ را به برخی اعمال جبری مجهز می‌کنند تا بتوانند ساختاری جبری روی آنها به دست بیاورند. در اینجا ساختاری را در نظر می‌گیریم که ضرب دنباله‌ای نامیده می‌شود. مفهوم ضرب دنباله‌ای اخیراً توسط گادر[1] و نگی[2] در [۱۰] معرفی شده است. اگر A و B دو اثر باشند، در این صورت ضرب دنباله‌ای آنها یعنی $A \circ B$ به عنوان یک اثر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \circ B = A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}, \qquad (A, B \in E(\mathcal{A})).$$

برای مفاهیم کلی دربارهٔ اثرها می‌توان به کتاب [۷] مراجعه کرد و برای مشاهدهٔ برخی ویژگی‌های جالب این عمل روی $E(H)$ (H فضای هیلبرت است) نظیر شرکت‌پذیری و تعویض‌پذیری می‌توان به مقالهٔ [۱۰] مراجعه کرد. با توجه به ساختار جبری که روی اثرها معرفی شد (ضرب دنباله‌ای) می‌توان خودریختی‌های متناظر را که خودریختی‌های دنباله‌ای نامیده می‌شوند، معرفی کرد و ساختارهای ممکن آنها را بررسی کرد. در حالت کلی برای دو C^*- جبر واحددار $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$، نگاشت دوسویی $\phi : E(\mathcal{A}) \longrightarrow E(\mathcal{B})$ را یکریختی دنباله‌ای گوییم هرگاه برای هر $A, B \in E(\mathcal{A})$، $\phi(A \circ B) = \phi(A) \circ \phi(B)$.

مسئلهٔ مربوط به مجموعهٔ اثرهای فضای هیلبرت، $E(H)$ اخیراً حل شده است. در واقع گادر و گریچی[3] در مقالهٔ [۹؛ قضیهٔ ۱]. با استفاده از نتیجه‌های به دست آمده توسط مولنار[4] [۱۶؛ قضیهٔ ۳] نتیجه گرفته‌اند که خودریختی‌های دنباله‌ای $E(H)$ با فرض $\dim H \geq ۳$، دقیقاً تبدیلات ϕ به صورت

$$\phi(A) = UAU^* \qquad (A \in E(H))$$

هستند که در آن U عملگر یکانی یا عملگر پادیکانی روی فضای هیلبرت H است. مولنار با استفاده از حافظ‌ها روی اثرهای فضای هیلبرت همین نتیجه را وقتی که $\dim H = ۲$ به دست آورده است [۱۷؛ نتیجهٔ ۷]. پس از توصیف خودریختی‌های دنباله‌ای مجموعهٔ اثرهای فضای هیلبرت طبیعی است که این سؤال برای اثرهای جبرهای فون نویمان مورد بررسی قرار گیرد. در مقالهٔ [۱۹؛ قضیهٔ ۳] ثابت شده است که اگر $\mathcal{A}$ یک فاکتور فون

1) Gudder 2) Negy 3) Greechie 4) Molnar

نویمان باشد که از نوع I_1 و I_2 نیست، در این صورت هر یکریختی دنباله‌ای روی $E(\mathcal{A})$ به یک *- خودریختی یا به یک *- پاد خودریختی روی $\mathcal{A}$ توسیع می‌یابد. در مقالهٔ [۱۸]،

L. Molnar, Sequential isomorphisms between the sets of von Neumann algebra effects, Acta Sci. Math. (Szeged) 69 (2003), 755-772.

که قسمت عمدهٔ این پایان‌نامه از آن گرفته می‌شود، فراتر رفته و به مسئله جواب کامل داده شده است، یعنی ساختار همهٔ یکریختی‌های دنباله‌ای بین مجموعه‌های اثرهای جبرهای فون نویمان در حالت کلی و بدون هیچ محدودیتی روی جبرهای مورد بحث توصیف شده‌اند. در واقع ثابت شده است که

برای هر دو جبر فون نویمان $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ و هر یکریختی دنباله‌ای $\phi : E(\mathcal{A}) \longrightarrow E(\mathcal{B})$، تجزیه‌های مستقیم

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_3, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2 \oplus \mathcal{B}_3$$

در کاتگوری جبرهای فون نویمان و نگاشت‌های دوسویی

$$\phi_1 : E(\mathcal{A}_1) \longrightarrow E(\mathcal{B}_1), \quad \Phi_2 : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_2, \quad \Phi_3 : \mathcal{A}_3 \longrightarrow \mathcal{B}_3$$

وجود دارند به طوری که

(الف) $\mathcal{A}_1$ و $\mathcal{B}_1$ جبرهای فون نویمان تعویض‌پذیر هستند و جبرهای $\mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_3$ و $\mathcal{B}_2 \oplus \mathcal{B}_3$ جمعوند مستقیم تعویض‌پذیر ندارند.

(ب) ϕ_1 نگاشت دوسویی ضربی است، Φ_2 یک * - یکریختی است، Φ_3 یک *- پادیکریختی است و $\phi = \phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \Phi_3$ روی $E(\mathcal{A})$ برقرار است.

در مورد *- یکریختی‌ها و *- پادیکریختی‌های جبری اطلاعات زیادی در دسترس است. به عنوان مثال، صورت کلی آنها در بسیاری از حالت‌های خاص شناخته شده است. در عوض، در مورد نگاشت‌های دوسویی ضربی بین مجموعه‌های اثرهای جبرهای فون نویمان تعویض‌پذیر اطلاعات زیادی وجود ندارد و یا به طور کلی در مورد نگاشت‌های دوسویی ضربی بین مجموعه‌های اثرهای C^*- جبرهای واحددار تعویض‌پذیر مطالب زیادی در دسترس نیست. در مقالهٔ [۱۵]،

J. Marovt, Multiplicative bijections of $C(X, I)$, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2005), 1065-1075.

سعی شده است این خلأ پرگردد. در واقع ساختار این تبدیلات را مشخص کرده است. با توجه به اینکه هر C^*- جبر تعویض‌پذیر واحددار با جبر تمام توابع مختلط پیوسته روی فضای هاسدورف و فشرده یکریخت است، اگر $C(X)$ جبر تمام توابع مختلط پیوسته روی فضای هاسدورف و فشردهٔ X باشد اثرهای آن، مجموعهٔ توابع

مثبت کوچکتر از ۱ است. پس کافی است ساختمان تمام توابع پیوسته را که از X به بازهٔ واحد I هستند در نظر بگیریم که با $C(X,I)$ نمایش می‌دهیم. مقالهٔ [۱۵] صورت کلی تمام نگاشت‌های دوسویی ضربی روی $C(X,I)$ را وقتی که X فضای هاسدورف فشرده و شمارش‌پذیر اول است، توصیف می‌کند.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است.

در فصل اول برخی از تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی مانند فضاهای توپولوژیک، C^*- جبرها، اعضای مثبت C^*- جبرها، فضای هیلبرت، جبرهای فون نویمان و تعریف‌ها و قضیه‌هایی را که در فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند می‌آوریم.

در فصل دوم که برگرفته از مقالهٔ [۱۸] می‌باشد به تعریف مفاهیمی چون اثر، ضرب دنباله‌ای، یکریختی دنباله‌ای، *- یکریختی، *- پادیکریختی و جردن *- یکریختی خواهیم پرداخت. در این فصل ثابت می‌شود که حاصلجمع مستقیم یکریختی‌های دنباله‌ای، حاصلجمع مستقیم یک *- یکریختی و یک *- پادیکریختی، یکریختی دنباله‌ای است.

در فصل سوم نیز که برگرفته از مقالهٔ [۱۸] می‌باشد ثابت می‌شود که یکریختی دنباله‌ای ϕ بین مجموعه‌های اثرهای جبرهای فون نویمان ترتیب و تعامد بین تصویرها، تصویرهای آبلی، هم‌ارزی بین آنها، تعویض‌پذیری بین اثرها را در هر دو سو حفظ می‌کند و کاملاً متعامد جمعی است. همچنین در این فصل ثابت می‌شود یکریختی دنباله‌ای ϕ بین مجموعه‌های اثرهای جبرهای فون نویمان از نوع I_n که $n \geq ۲$ و بدون جمعوند مستقیم از نوع I یک E- یکریختی است و قضیهٔ اصلی مقاله را نتیجه خواهیم گرفت.

در فصل چهارم که برگرفته از مقالهٔ [۱۵] می‌باشد صورت کلی نگاشت‌های دوسویی ضربی روی $C(X,I)$، مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته از X به I، را وقتی که X هاسدورف فشرده و شمارش‌پذیر اول است مشخص می‌کنیم. در واقع ثابت می‌شود که

اگر X فضایی هاسدورف و فشرده باشد که در اصل اول شمارش‌پذیری صدق می‌کند، $I = [۰, ۱]$ و $C(X,I)$ مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته از X به I باشد و نگاشت $\varphi : C(X,I) \longrightarrow C(X,I)$ دوسویی ضربی باشد، آنگاه همسانریختی $\mu : X \longrightarrow X$ و نگاشت پیوستهٔ $k : X \longrightarrow (۰, \infty)$ وجود دارند به طوری که برای هر $x \in X$ و هر $f \in C(X,I)$، $\varphi(f)(x) = f(\mu(x))^{k(x)}$.

فصل اول

تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی

در این فصل که شامل پنج بخش است، مفاهیمی چون فضاهای توپولوژیک، C^*- جبرها، اعضای مثبت C^*- جبرها، فضای هیلبرت و جبرهای فون نویمان را تعریف می‌کنیم و قضیه‌هایی را عنوان می‌کنیم که در فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند.

۱.۱ فضاهای توپولوژیک و اندازه‌پذیر

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک مجموعه و τ یک توپولوژی روی X باشد. گردایهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X یک پایه برای فضای توپولوژیک (X, τ) تشکیل می‌دهد هرگاه

(الف) برای هر $x \in X$، $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in B$.

(ب) برای هر $x \in X$ اگر $x \in B_1 \cap B_2$ که $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$، $B_3 \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in B_3$ و $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

۲.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$. گردایه‌ای از همسایگی‌های نقطهٔ x را پایه در x گوییم هرگاه هر همسایگی از x شامل عضوی از این گردایه باشد.

۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم X در اصل اول شمارش‌پذیری صدق می‌کند هرگاه هر نقطهٔ X شامل پایه‌ای شمارا باشد.

۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X فضای توپولوژیک باشد. در این صورت

(الف) فضای X را هاسدورف گوییم هرگاه به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز $x_1, x_2 \in X$، همسایگی‌های U_1 و U_2 در X به ترتیب از x_1 و x_2 وجود داشته باشند به طوری که $U_1 \cap U_2 = \phi$.

(ب) فضای X را نرمال گوییم هرگاه مجموعه‌های تک نقطه‌ای در آن بسته باشند و به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ بسته و جدا از هم A و B در X، زیرمجموعه‌های باز و جدا از هم U و V در X موجود باشند به طوری که $A \subset U$ و $B \subset V$.

۵.۱.۱ قضیه [۲۰؛۴.۲.۴]. هر فضای هاسدورف و فشرده، نرمال است.

۶.۱.۱ قضیه [۲۰؛۴.۲.۱]. فرض کنیم X فضای توپولوژیک باشد و مجموعه‌های تک نقطه‌ای در X بسته باشند. در این صورت X نرمال است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ بستهٔ A از X و هر مجموعهٔ باز U شامل A، مجموعهٔ باز V شامل A وجود داشته باشد به طوری که $\overline{V} \subset U$.

۷.۱.۱ لم اوریسون [۲۰؛۴.۳.۱]. فرض کنیم X یک فضای نرمال باشد، A و B زیرمجموعه‌های بسته و جدا از هم در X باشند و $[a, b]$ بازهٔ بسته‌ای در خط حقیقی باشد. در این صورت تابعی پیوسته مانند $f : X \longrightarrow [a, b]$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in A$، $f(x) = a$ و برای هر $x \in B$، $f(x) = b$.

۸.۱.۱ قضیه [۲۰؛۳.۵.۳]. هر زیرمجموعهٔ فشرده از یک فضای هاسدورف، بسته است.

۹.۱.۱ قضیه توسیع تیتسه[1] [۲۰؛۴.۳.۲]. فرض کنیم X فضایی نرمال و A زیرمجموعه‌ای بسته از X باشد. در این صورت

(الف) هر نگاشت پیوسته از A به بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ از $\mathbb{R}$ را می‌توان به نگاشتی پیوسته از X به $[a, b]$ توسیع داد.

(ب) هر نگاشت پیوسته از A به اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را می‌توان به نگاشتی پیوسته از X به $\mathbb{R}$ توسیع داد.

۱۰.۱.۱ قضیه [۲۰؛۳.۵.۶]. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت دوسویی پیوسته باشد. اگر X فضایی فشرده و Y فضایی هاسدورف باشد آنگاه نگاشت f همسانریختی است.

۱۱.۱.۱ قضیه [۱۳؛۳.۴.۳]. فرض کنیم X و Y فضاهای هاسدورف و فشرده باشند. در این صورت نگاشت $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ یکریختی پوشا است به طوری که برای هر $f, g \in C(X)$، $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ اگر و تنها اگر همسانریختی $\mu : Y \longrightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $f \in C(X)$، $\varphi(f) = f \circ \mu$.

1) Tietze extention theorem

۱۲.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان اسکالر F و τ یک توپولوژی روی X باشد. گوییم (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک است هرگاه هر مجموعهٔ یکانی در X بسته باشد و اعمال جمع و ضرب اسکالر در X پیوسته باشند.

حال اگر X در نقطهٔ صفر دارای پایهٔ موضعی محدب باشد در این صورت توپولوژی X را موضعاً محدب گوییم. به عنوان مثال هر فضای نرم‌دار یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب است.

۱۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X فضای برداری توپولوژیک و M زیرفضای بستهٔ X باشد. اگر زیرفضای بسته‌ای مانند N از X موجود باشد به طوری که

$$X = M + N, \qquad M \cap N = \{0\},$$

در این صورت گوییم M در X متمم دارد و N را متمم آن می‌نامیم. در این حالت X را حاصلجمع مستقیم M و N می‌نامیم و می‌نویسیم $X = M \oplus N$.

۱۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم J یک مجموعه باشد. در این صورت رابطهٔ $\leq$ روی J را رابطهٔ ترتیب جزیی گوییم هرگاه برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in J$،

(الف) $\alpha \leq \alpha$.

(ب) اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$، آنگاه $\alpha = \beta$.

(ج) اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$، آنگاه $\alpha \leq \gamma$.

۱۵.۱.۱ تعریف. فرض کنیم J مجموعه باشد. گوییم J مجموعه‌ای جهت‌دار است هرگاه دارای رابطهٔ ترتیب جزیی باشد و برای هر دو عضو $\alpha, \beta \in J$ عضو $\gamma \in J$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

۱۶.۱.۱ مثال. فرض کنیم S مجموعه‌ای دلخواه باشد. در این صورت گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های غیرتهی و متناهی S با رابطهٔ شمول (یعنی برای هر دو زیرمجموعهٔ غیرتهی و متناهی A و B از S، $A \leq B$ اگر $A \subseteq B$) یک مجموعهٔ جهت‌دار است.

۱۷.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X فضای توپولوژیک باشد. یک تور در X تابعی مانند f از یک مجموعهٔ جهت‌دار J به X است. اگر $\alpha \in J$ آنگاه $f(\alpha)$ را با x_α نشان می‌دهیم. بنابراین تور f را با نماد $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$، یا اگر مجموعهٔ اندیس گذار مشخص باشد با نماد (x_α) نشان می‌دهیم.

گوییم تور (x_α) همگرا به نقطهٔ $x \in X$ است و می‌نویسیم $x_\alpha \longrightarrow x$ (با نماد $x = \lim_\alpha x_\alpha$ نیز نشان می‌دهیم) هرگاه برای هر همسایگی U از x، $\alpha_\circ \in J$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\alpha \geq \alpha_\circ$، $x_\alpha \in U$.

۱۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X فضای برداری توپولوژیک و $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ گردایه‌ای از اعضای X باشد. گوییم $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ به نقطهٔ $x \in X$ جمع‌پذیر است هرگاه تور $\{s_F = \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\}_F$ که در آن $F \subseteq J$ مجموعه‌ای غیرتهی و متناهی است به x همگرا باشد و در این صورت می‌نویسیم $x = \sum_{\alpha\in J} x_\alpha$.

۱۹.۱.۱ قضیه [۸؛۲.۱۰]. فرض کنیم X فضای اندازه‌پذیر و تابع $f : X \longrightarrow [\circ, \infty)$ اندازه‌پذیر باشد. در این صورت دنبالهٔ (s_n) از توابع ساده وجود دارد به طوری که $\circ \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$، برای هر $x \in X$، $s_n(x) \longrightarrow f(x)$ وقتی $n \longrightarrow \infty$ و $s_n \longrightarrow f$ به طور یکنواخت روی هر مجموعه‌ای که f کراندار است وقتی $n \longrightarrow \infty$.

۲.۱ جبرهای باناخ

۱.۲.۱ تعریف. جبر مختلط $\mathcal{A}$، فضای برداری روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است به طوری که یک ضرب در آن تعریف شده باشد که به‌ازای هر $x, y, z \in \mathcal{A}$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$ در ویژگی‌های زیر صدق کند:

(الف) $x(yz) = (xy)z$،

(ب) $x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$،

(ج) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

توجه: اگر میدان اسکالر حقیقی باشد، $\mathcal{A}$ را جبر حقیقی گوییم.

۲.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر مختلط و C زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت مجموعهٔ همهٔ اعضای $\mathcal{A}$ را که با اعضای C تعویض می‌شوند تعویضگر C گوییم و با نماد C' نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که C' زیرجبر $\mathcal{A}$ است. تعویضگر دوگان C را با C'' نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $C'' = (C')'$.

۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر مختلط باشد و $\|\cdot\|$ نرمی روی $\mathcal{A}$ باشد به طوری که $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ فضای باناخ باشد و برای هر $x, y \in \mathcal{A}$، $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ در این صورت $\mathcal{A}$ را یک جبر باناخ می‌گوییم. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را واحددار می‌گوییم هرگاه دارای عضو یکتای $e \in \mathcal{A}$ باشد به طوری که برای هر $x \in \mathcal{A}$، $xe = ex = x$.

جبر باناخ $\mathcal{A}$ را تعویض‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in \mathcal{A}$، $xy = yx$.

قرارداد. در این بخش عضو واحد جبر باناخ $\mathcal{A}$ را با $e_{\mathcal{A}}$ نشان می‌دهیم.

۴.۲.۱ **مثال.** فرض کنیم X فضایی هاسدورف و فشرده باشد. در این صورت $C(X)$ با اعمال جمع و ضرب معمولی توابع و با نرم سوپرمم یک جبر باناخ تعویض‌پذیر واحددار است. برای هر تابع $f \in C(X)$ نرم سوپرمم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_X = \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

۵.۲.۱ **تعریف.** فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ واحددار باشد و $x \in \mathcal{A}$. طیف x $(\operatorname{Sp} x)$ و **شعاع طیفی** x $(\rho(x))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(الف) $\operatorname{Sp} x = \{\lambda \in \mathbb{C} :$ در $\mathcal{A}$ وارون‌پذیر نیست $x - \lambda e_{\mathcal{A}}\}$ ،

(ب) $\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{Sp} x\}$،

(ج) رادیکال $\mathcal{A}$ را اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال چپ $\mathcal{A}$ یا اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال راست $\mathcal{A}$ تعریف می‌کنیم و با $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم. در صورتی که $\mathcal{A}$ تعویض‌پذیر باشد رادیکال $\mathcal{A}$ اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال $\mathcal{A}$ تعریف می‌شود،

(د) $\mathcal{A}$ را نیم ساده گوییم هرگاه $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$.

۶.۲.۱ **قضیه [۲۲؛۱۰.۷].** فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ واحددار باشد و $x \in \mathcal{A}$ به طوری که $\|x\| < 1$. در این صورت $e_{\mathcal{A}} - x$ وارون‌پذیر است.

۷.۲.۱ **قضیه [۲۲؛۱۰.۱۳].** فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ واحددار باشد و $x \in \mathcal{A}$. در این صورت $\operatorname{Sp} x$ زیرمجموعه‌ای فشرده و غیرتهی از $\mathbb{C}$ است.

۸.۲.۱ **لم.** فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ واحددار باشد و $x \in \mathcal{A}$. در این صورت برای هر $\lambda \in \operatorname{Sp} x$، $|\lambda| \leq \|x\|$.

برهان. فرض کنیم $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ و $\lambda \in \operatorname{Sp} x$. اگر $\|x\| < |\lambda|$ آنگاه $\|\frac{1}{\lambda}x\| < 1$ پس بنابه قضیهٔ ۶.۲.۱، $e_{\mathcal{A}} - \frac{1}{\lambda}x$ و در نتیجه $\lambda e_{\mathcal{A}} - x$ در $\mathcal{A}$ وارون‌پذیر است لذا $\lambda \notin \operatorname{Sp} x$ و این یک تناقض است.□

۹.۲.۱ **تعریف.** فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند. عملگر خطی $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را همریختی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathcal{A}$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

۱۰.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ باشد. مجموعهٔ تمام همریختی‌های مختلط ناصفر (تابعک‌های خطی و ضربی مختلط ناصفر) روی $\mathcal{A}$ را با $m(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم. لذا اگر $\varphi \in m(\mathcal{A})$ آنگاه $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابعک خطی ناصفر است و برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داریم $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

باید توجه کرد که تمام تابعک‌های خطی ضربی روی جبرهای باناخ پیوسته (کراندار) هستند و در حقیقت ثابت می‌شود که برای هر $\varphi \in m(\mathcal{A})$، $\|\varphi\| \leq ۱$ و در صورتی که $\mathcal{A}$ واحددار باشد آنگاه $\varphi(e_{\mathcal{A}}) = ۱$ و اگر $\|e_{\mathcal{A}}\| = ۱$ آنگاه $\|\varphi\| = ۱$.

۱۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ تعویض‌پذیر باشد. برای هر $x \in \mathcal{A}$ تابع مختلط $\hat{x}$ روی $m(\mathcal{A})$ را چنین تعریف می‌کنیم $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ برای هر $\varphi \in m(\mathcal{A})$. قرار می‌دهیم $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{x} : x \in \mathcal{A}\}$ در این صورت نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ از $\mathcal{A}$ به روی $\hat{\mathcal{A}}$ را تبدیل گلفاند گوییم.

توپولوژی تولید شده توسط $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{x} : x \in \mathcal{A}\}$ روی $m(\mathcal{A})$ را توپولوژی گلفاند روی $m(\mathcal{A})$ گوییم. در حقیقت توپولوژی گلفاند روی $m(\mathcal{A})$ عبارت است از ضعیف‌ترین توپولوژی که نسبت به آن هر $\hat{x}$ پیوسته است. بدین ترتیب V یک همسایگی $\psi \in m(\mathcal{A})$ با توپولوژی گلفاند است هرگاه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{A}$ و اعداد حقیقی مثبت $\{r_i\}_{i=1}^{n}$ موجود باشند به طوری که $\bigcap_{i=1}^{n}\{\varphi \in m(\mathcal{A}) : |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| < r_i\} \subseteq V$.

با توجه به اینکه $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}^*$ (خانوادهٔ تمام تابعک‌های خطی و پیوسته روی $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{A}^*$ نشان می‌دهیم) می‌توان گفت توپولوژی گلفاند تحدید توپولوژی ضعیف ستارهٔ $\mathcal{A}^*$ روی $m(\mathcal{A})$ است. بدین علت به توپولوژی گلفاند روی $m(\mathcal{A})$ توپولوژی ضعیف ستاره نیز می‌گویند. $m(\mathcal{A})$ را همراه با توپولوژی گلفاند (ضعیف ستاره) فضای ایده‌آل ماکسیمال $\mathcal{A}$ می‌نامند.

۱۲.۲.۱ قضیهٔ گلفاند[1] [۹.۱۱.۲؛۳]. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ تعویض‌پذیر واحددار و $m(\mathcal{A})$ فضای ایده‌آل ماکسیمال $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت

(الف) $m(\mathcal{A})$ با توپولوژی گلفاند یک فضای هاسدورف و فشرده است.

(ب) تبدیل گلفاند یک همریختی پیوسته و پوشا از $\mathcal{A}$ به زیرجبر $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{x} : x \in \mathcal{A}\}$ از $C(m(\mathcal{A}))$ است که هستهٔ آن $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ است. این نگاشت یکریختی است اگر وتنها اگر $\mathcal{A}$ نیم ساده باشد.

(ج) برای هر $x \in \mathcal{A}$ برد $\hat{x}$ برابر با طیف x است و $\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|$ که در آن $\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{\varphi \in m(\mathcal{A})} |\hat{x}(\varphi)|$.

۱۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر مختلط باشد. نگاشت $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ با ضابطهٔ $x \mapsto x^*$ را یک برگشت روی $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$ در ویژگی‌های زیر صدق کند:

1) Gelfand

(الف) $(x+y)^* = x^* + y^*$.

(ب) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$.

(ج) $(xy)^* = y^* x^*$.

(د) $(x^*)^* = x$.

در این صورت زوج $(\mathcal{A}, *)$ را یک $*$- جبر گوییم.

۱۴.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک $*$- جبر باشد و $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. تعریف می‌کنیم $\mathcal{B}^* = \{a^* : a \in \mathcal{B}\}$ و گوییم $\mathcal{B}$ خودالحاق است هرگاه $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$.

اگر $\mathcal{B}$ زیرجبر خودالحاق $\mathcal{A}$ باشد آنگاه $\mathcal{B}$ را $*$- زیرجبر $\mathcal{A}$ نامیم.

۱۵.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ با برگشت $*$ باشد و $x \in \mathcal{A}$. در این صورت

(الف) x را خودالحاق گوییم هرگاه $x = x^*$،

(ب) x را نرمال گوییم هرگاه $xx^* = x^*x$،

(ج) اگر $\mathcal{A}$ واحددار نیز باشد آنگاه x را یکانی گوییم هرگاه $xx^* = x^*x = e_{\mathcal{A}}$.

مجموعهٔ تمام اعضای خودالحاق $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{A}_s$ نشان می‌دهیم.

۱۶.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک $*$- جبر باشد و $x \in \mathcal{A}$. در این صورت

(الف) گوییم x تصویر است هرگاه x خودالحاق و خودتوان باشد یعنی $x = x^* = x^۲$. مجموعهٔ همهٔ تصویرها در $\mathcal{A}$ را با نماد $P(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم.

(ب) گوییم x در مرکز $\mathcal{A}$ است (x در $\mathcal{A}$ مرکزی است) هرگاه برای هر $y \in \mathcal{A}$، $xy = yx$. مرکز $\mathcal{A}$ را با نماد $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

۱۷.۲.۱ قضیه [۶.۱.۱؛ ۱]. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ با برگشت $*$ باشد و $x \in \mathcal{A}$. در این صورت

(الف) $x + x^*$، $i(x - x^*)$، xx^* و x^*x خودالحاق هستند.

(ب) x دارای نمایش یکتای $x = h + ik$ است که در آن h, k خودالحاق هستند، در واقع $h = \frac{x + x^*}{۲}$ و $k = \frac{x - x^*}{۲i}$. به h قسمت حقیقی x گویند و با $\operatorname{Re} x$ نمایش می‌دهند و به k قسمت موهومی x گویند و با نماد $\operatorname{Im} x$ نمایش می‌دهند.

(ج) اگر $\mathcal{A}$ واحددار باشد آنگاه $e_{\mathcal{A}}$ خودالحاق است یعنی $e^*_{\mathcal{A}} = e_{\mathcal{A}}$.

۱۸.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ جبر باناخ با برگشت $*$ باشد به طوری که برای هر $x \in \mathcal{A}$، $\|x^*x\| = \|x\|^۲$ در این صورت $\mathcal{A}$ را C^*- جبر گوییم.

۱۹.۲.۱ مثال. فرض کنیم X فضایی هاسدورف و فشرده باشد. نگاشت $* : C(X) \longrightarrow C(X)$ را با ضابطهٔ $f \mapsto \overline{f}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $C(X)$ یک C^*ـ جبر است.

۲۰.۲.۱ مثال (الف). فرض کنیم S یک مجموعه باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع مختلط مقدار کراندار روی S را با $l^\infty(S)$ نشان می‌دهیم. S با اعمال جمع و ضرب معمولی توابع و نرم سوپرمم یک جبر باناخ واحددار است.

حال نگاشت $* : l^\infty(S) \longrightarrow l^\infty(S)$ را با ضابطهٔ $f \mapsto \overline{f}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $l^\infty(S)$ یک C^*ـ جبر است.

(ب) فرض کنیم X فضای اندازه‌پذیر باشد. در این صورت $B_\infty(X)$، مجموعهٔ همهٔ توابع مختلط مقدار کراندار اندازه‌پذیر روی X یک $*$ـ زیرجبر بستهٔ $l^\infty(X)$ است. در نتیجه $B_\infty(X)$ یک C^*ـ جبر واحددار است.

۲۱.۲.۱ تعریف [ص ۱۲؛۷]. فرض کنیم $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. در این صورت حاصلضرب مستقیم این خانواده که آن را با $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ نمایش می‌دهیم عبارت است از مجموعهٔ همهٔ توابع مانند f از Λ به $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ به طوری که برای هر $\lambda \in \Lambda$ ، $f(\lambda) \in A_\lambda$. اگر $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ آنگاه آن را با نماد $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ که برای هر $\lambda \in \Lambda$، $a_\lambda \in A_\lambda$ نمایش می‌دهیم.

اگر Λ متناهی باشد آنگاه $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ همان حاصلضرب دکارتی است.

۲۲.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از C^*ـ جبرهای واحددار باشد. حاصلجمع مستقیم $A = \oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_\lambda A_\lambda : \|(a_\lambda)_\lambda\| = \sup_\lambda \|a_\lambda\| < \infty\}$$

اگر Λ متناهی باشد مثلاً $\Lambda = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ که $n \in \mathbb{N}$ در این صورت $\prod_{\lambda=1}^{n} A_\lambda$ با $\oplus_{\lambda=1}^{n} A_\lambda$ یکی است و هر دو را با $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ نمایش می‌دهیم.

۲۳.۲.۱ لم. فرض کنیم $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از C^*ـ جبرهای واحددار باشد. در این صورت $\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ با اعمال جمع، ضرب، ضرب اسکالر و برگشت روی $\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ که برای هر دو عضو $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \oplus A_\lambda$

و هر $\mu \in \mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند C^*ـ جبر واحددار است.

$$(a_\lambda)_\lambda + (b_\lambda)_\lambda = (a_\lambda + b_\lambda)_\lambda$$

$$\mu(a_\lambda)_\lambda = (\mu a_\lambda)_\lambda$$

$$(a_\lambda)(b_\lambda) = (a_\lambda b_\lambda)$$

$$(a_\lambda)^* = (a_\lambda^*)$$

۲۴.۲.۱ قضیه [۱.۲. ۶؛ ۱]. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*ـ جبر واحددار باشد. در این صورت

(الف) برای هر $x \in \mathcal{A}$، $\|x\| = \|x^*\|$،

(ب) اگر $x \in \mathcal{A}$ خودالحاق باشد آنگاه $\mathrm{Sp}\, x \subseteq \mathbb{R}$،

(ج) برای هر $x \in \mathcal{A}$، $\|xx^*\| = \|x\|^۲$.

۲۵.۲.۱ قضیهٔ گلفاند نیمارک[1][۶.۲.۶؛۱]. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*ـ جبر تعویض‌پذیر واحددار باشد. در این صورت $\mathcal{A}$ به طور طولپا (نگاشت طولپا، نگاشتی است که فاصله‌ها را حفظ کند) با $C(m(\mathcal{A}))$ یکریخت است.

۲۶.۲.۱ نتیجه. هر C^*ـ جبر تعویض‌پذیر واحددار با جبر همهٔ توابع مختلط مقدار پیوسته روی یک فضای هاسدورف و فشردهٔ X یکریخت است.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*ـ جبر تعویض‌پذیر واحددار باشد. در این صورت بنابر قضیهٔ گلفاند $m(\mathcal{A})$ با توپولوژی گلفاند فضایی هاسدورف و فشرده است. از طرفی بنابر قضیهٔ گلفاند ـ نیمارک $\mathcal{A}$ با $C(m(\mathcal{A}))$، جبر همهٔ توابع مختلط مقدار پیوسته روی $m(\mathcal{A})$ یکریخت است. قرار می‌دهیم $X = m(\mathcal{A})$. $\square$

۳.۱ اعضای مثبت C^*ـ جبرها

۱.۳.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*ـ جبر واحددار باشد و $x \in \mathcal{A}$. گوییم x مثبت است و با نماد $x \geq ۰$ نشان می‌دهیم هرگاه x خودالحاق باشد و $\mathrm{Sp}\, x \subseteq \mathbb{R}^{\geq ۰}$. مجموعهٔ اعضای مثبت $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{A}^+$ نمایش می‌دهیم.

و در حالت خاص داریم:

1) Gelfand-Naimark