بسم الله الرحمن الرحيم

١٠٣٩٢٨

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

کتابخانه مرکزی
دانشگاه محقق اردبیلی
بخش خدمات فنی

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

عنوان :

# حل عددی معادلات گرما شامل INTERFACE

استاد راهنما :

آقای دکتر عبدا... برهانی فر

اساتید مشاور :

آقایان دکتر کاظم قنبری و دکتر محمد باقر مقیمی

۱۳۸۷/۳/۰۷

پژوهشگر:

آقای رضا اباذری

اردیبهشت ۱۳۸۶

مرکزی دانشگاه محقق اردبیلی
شماره ثبت : ۵۹۸۸۲
تاریخ : ۸۶/۷/۱۷

دانشگاه محقق اردبیلی ۱۳۵۷

معاونت آموزشی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

بسمه تعالی

تاریخ : .......

شماره : .......

پیوست : .......

**فرم شماره پنج**

## صورتجلسه دفاع از پایان نامه

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی آقای رضا اباذری دانشجوی رشته ریاضی کاربردی ورودی بهمن۸۳ تحت عنوان: (حل عددی معادله خطی گرما شامل سطوح مشترک) به ارزش شش واحد درساعت ۱۴ روز پنجشنبه مورخ ۸۶/۳/۱۷ در محل آمفی تئاتر دانشکده علوم برگزار می شود

با حضور اعضای محترم هیات داوران متشکل از :

| سمت | نام و نام خانوادگی | امضاء |
|---|---|---|
| ۱ – استاد (ان) راهنما | دکتر عبداله برهانی فر | |
| ۲ – استاد (ان) مشاور | دکتر کاظم قنبری<br>دکترمحمد باقرمقیمی | |
| ۳ – عضو هیات داوران (داخل) | دکترداودخجسته | |
| ٤ – عضو هیات داوران (خارج) | دکترمحمد یعقوب رحیمی اردبیلی | |
| ٥ – نمایندە تحصیلات تکمیلی | دکترغلامحسن ایمانزاده | |

تشکیل گردید و ضمن ارزیابی با درجه عالی مورد تائید قرار گرفت.

# قدردانی

در این‌جا لازم است از کلیه‌ی افرادی که مرا در انجام این پروژه کمک نموده‌اند، خصوصاً استاد گرامی آقای دکتر عبدا... برهانی فر که در تمام مراحل انجام این پروژه با مساعدت‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغ خود مرا یاری کردند، تشکر کنم. همچنین از آقایان دکتر محمد باقر مقیمی و دکتر کاظم قنبری نیز بخاطر مشاوره هایی که در تدوین بهتر این پایان نامه ارائه نمودند، کمال تشکر را دارم. همچنین از آقای دکتر Zhilin Li[۱] بخاطر راهنمایی هایی که در رابطه با برنامه نویسی به زبان MATLAB این پایان نامه ارائه نمودند، نیز نهایت تشکررا دارم.

[۱] North Carolina State University, Raleigh

## چکیده

مسائل Inrterface وقتی ظاهر می شوند که دو ماده متفاوت با هم در تماس باشند ، مانند آب و نفت ، و یا دو مادهٔ یکسان با خاصیت اضافی متفاوت ، مانند آب و یخ . اغلب مدل ریاضی اینگونه مسائل به صورت معادلهٔ دیفرانسیل معمولی یا معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی ظاهر می شود ، که پارامتر های آن در محل تماس دارای ناپیوستگی هایی می باشد و جملهٔ نیروی این معادلات اغلب منفرد می باشند . به علت همین نا منظمی پارامترها ، جواب حاصل از این گونه معادلات دارای ناهمواریهایی در طول Interface می باشد . و به علت ناهمواری در جواب ، بسیاری از روشهای عددی کلاسیک برای حل این گونه مسائل با شکست مواجه می شوند . زیرا که دیگر نمی توان از بسط تیلور ، برای بررسی خطای روش عددی بکار رفته ، استفاده کرد . برای حل این مشکل از روش Immersed Interface Method ، یا بطور خلاصه IIM استفاده خواهیم کرد .

این پایان نامه بر اساس مقاله [۱۲] تنظیم شده است . در فصل اول ، به بحث فیزیکی معادلهٔ گرما می پردازیم و همچنین ، مقدماتی را خواهیم آورد که در فصلهای بعدی مورد نیاز است . در فصل دوم ، حل تحلیلی معادلهٔ گرمای یک و دو بعدی را بررسی خواهیم کرد . در فصل سوم ، روشهای تفاضلات متناهی کلاسیک را برای حل معادلهٔ گرما بررسی خواهیم کرد . در فصل چهارم ، روش IIM بر مبنای کرانک — نیکلسون را برای حل معادلهٔ گرمای یک بعدی با Interface ثابت و متحرک را بررسی می کنیم و در نهایت در فصل پنجم همین روش را برای معادلهٔ گرمای دو بعدی با Interface ثابت بررسی می کنیم .

# فهرست مندرجات

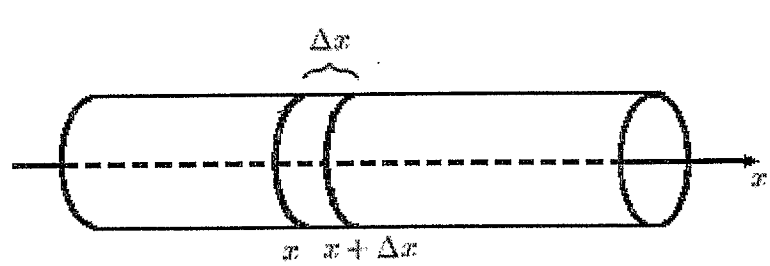
# فصل ۱

# معادله گرما

## ۱.۱ معادله گرما

بسیاری از مسائل فیزیکی بیش از یک متغیر مستقل دارند و لذا مدل های ریاضی آنها به جای معادلات دیفرانسیل معمولی ، مشتمل بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند . در این فصل یکی از معادلات با مشتقات جزئی مهم موسوم به معادلهٔ انتقال حرارت یا معادلهٔ گرما را به تفصیل بررسی می کنیم .

معادلهٔ دیفرانسیلی می یابیم که متناظر انتقال حرارت در جامدات است . در حالت انتقال حرارت ، تجربه نشان داده است که اگر دو صفحه موازی با مساحت یکسان $A$ و دماهای ثابت و متفاوت $T_۱$ و $T_۲$ که به فاصله $d$ قرار گرفته باشند ، مقداری گرما در هر واحد زمانی از صفحه گرمتر به صفحه سردتر انتقال می یابد .




شکل ۱.۱. میله ای که حرارت داده می شود .

بعلاوه با تخمین بسیار خوب این گرما با مساحت $A$ و تفاضل دما $|T_۱ - T_۲|$ نسبت مستقیم و با فاصله $d$ نسبت عکس

دارد ، لذا

$$\text{مقدار گرما در هر واحد زمان} = kA\frac{|T_۱ - T_۲|}{d} \,, \qquad (۱)$$

که در آن $k$ ثابت مثبت تناسب است وقابلیت **رسانایی گرمایی**[۱] نامیده می شود و به جنس دو صفحه بستگی دارد . معادله‌ی (۱) یک معادله بر اساس شواهد تجربی است و یک معادله‌ی نظری نیست و نتیجه‌ی حاصل ، با آزمایش دقیق امتحان می شود .

اکنون یک میله‌ی راست با مقطع عرضی یکنواخت و همگن در نظر بگیرید و فرض کنید میله روی محور $x$ ها قرار دارد . فرض می کنیم جوانب میله کاملاً عایق بندی شده اند و بنابراین گرمایی از آنها مبادله نمی شود . همچنین فرض می کنیم که گرمای $u$ تنها به مکان $x$ و زمان $t$ بستگی دارد و نه به مؤلفه های $y$ و $z$ . به بیان دیگر فرض می کنیم که دما در هر مقطع عرضی میله ثابت است . این فرض وقتی که مؤلفه های $y$ و $z$ میله نسبت به طول $x$ بسیار کوچک باشند ، بسیار رضایت بخش است .

معادله‌ی دیفرانسیل متناظر گرما در میله با استفاده از اصل بقاء انرژی بدست می آید که می گوید مقدار گرمایی که به یک قسمت میله وارد می شود به اضافه‌ی مقدار گرمایی که در آن قسمت تولید می شود برابر است با مقدار گرمایی که از آن خارج شده به اضافه‌ی مقدار گرمایی که در آن قسمت ذخیره میَ شود . این اصل برای وقتی که عبارت « میزان در واحد زمانی» بجای «مقدار» قرار گیرد نیز مسلماً بر قرار است .

فرض کنید $q(x,t)$ میزان گرمای جاری شده در نقطه $x$ و زمان $t$ باشد . دیمانسیون $q$ عبارت است از $[q]=\frac{H}{tL^۲}$[۲] و $q$ را مثبت می گیریم هر گاه گرما به راست جاری شود . میزان گرمایی که به قسمت کوچکی از میله که بین مقاطع عرضی $x$ و $x+\Delta x$ در $x$ وارد می شود عبارت است از $Aq(x,t)$ ، که در آن $A$ مساحت مقطع عرضی است . و میزان گرمایی که در آن مقطع از $x+\Delta x$ خارج می شود عبارتست از $Aq(x+\Delta x,t)$ . میزان گرمایی که در داخل مقطع ذخیره می شود با میزان تغییر دمای $u(x,t)$ متناسب است . لذا اگر $\rho$ چگالی و $c$ گرمای ویژه فلز در واحد جرم (گنجایش گرمایی) باشد ؛ $[c]=\frac{H}{mT}$ ، می توانیم میزان گرمای ذخیره شده در مقطع را با

$$\rho cA\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \,.$$

تخمین بزنیم .

در برخی حالات ممکن است گرما در داخل میله تولید شود ، مثلاً در اثر مقاومت در برابر عبور جریان الکتریکی ، یا در اثر فعل و انفعالات شیمیایی . اگر میزان گرمای تولید شده در واحد حجم برابر $r$ باشد ؛ $[r]=\frac{H}{tL^۳}$ ، آنگاه میزان گرمای تولید شده در مقطع برابر $A\Delta xr$ است . (توجه کنید $r$ ممکن اَست به $x$ و $t$ و حتّی $u$ بستگی داشته باشد ).

---

[۱] Thermal conductivity

[۲] کروشه را برای نمادگذاری دیمانسیون بکار می بریم ، حرارت $=H$ ، زمان $=t$ ، گرما $=T$ ، طول $=L$ ، جرم $=M$ ، ...

اکنون با بکار بردن اصل بقاء انرژی برای مقطع فوق داریم

$$Aq(x,t) + A\Delta x r = Aq(x+\Delta x, t) + A\Delta x \rho c \frac{\partial y}{\partial t},$$

در نتیجه

$$\frac{q(x,t) - q(x+\Delta x, t)}{\Delta x} + r = \rho c \frac{\partial u}{\partial t},$$

حال اگر $\Delta x \to 0$ خواهیم داشت

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{q(x,t) - q(x+\Delta x, t)}{\Delta x} = -\frac{\partial q}{\partial x}(x,t),$$

و بنابر این

$$-\frac{\partial q}{\partial x} + r = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (۲)$$

هنوز کار به اتمام نرسیده ، زیرا معادله‌ی فوق شامل دو متغیر وابسته $u$ و $q$ است . باید رابطه دیگری بین $q$ و $u$ بیابیم . این رابطه بصورت زیر حاصل می شود : طبق قانون خنک سازی نیوتن ، میزان گرمای جاری شده از مقطع $x$ و $x+\Delta x$ در $x$ برابر است با

$$-kA\frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x},$$

که با حدگیری وقتی $\Delta x \to 0$ میزان حرارت جاری شده ، $q(x,t)$ ، بدست می آید

$$\begin{aligned} q(x,t) &= -kA \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}, \\ &= -kA\frac{\partial u}{\partial x}(x,t). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x},$$

این مطلب را قانون فوریه برای انتقال حرارت گویند . در واقع این قانون می گوید میزان گرمای جاری شده با گرادیان دما متناسب است . هرگاه میله یکنواخت و همگن نباشد ثابت تناسب $k$ ممکن است به $x$ و $t$ بستگی داشته باشد . اکنون با جایگذاری قانون فوریه در معادله (۲) ، که از اصل بقاء انرژی بدست آمده ، داریم

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + r = \rho c \frac{\partial u}{\partial t},$$

توجه کنید $k$ ، $\rho$ و $c$ ممکن است همگی تابع باشند . اما اگر مستقل از $x$ ، $t$ و $u$ باشند می توان نوشت

$$\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}+\frac{r}{k}=\frac{\rho c}{k}\frac{\partial u}{\partial t},$$

قرار می دهیم ، $a^{2}=\frac{k}{\rho c}$ . این کمیت را قابلیت انتشار گرمایی گویند . لذا معادلهٔ گرما عبارتست از

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^{2}\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}+a^{2}\frac{r}{k}. \qquad (۳)$$

در صورتی که هیچگونه گرمایی در داخل میله تولید نشود داریم $r=\circ$ . لذا معادله‌ی گرمای همگن یک بعدی به صورت زیر حاصل می شود

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^{2}\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}. \qquad (۴)$$

برای تعیین دمای $u(x,t)$ میله ، از معادله‌ی گرما باید وضعیت دو سر میله مشخص باشد ، یعنی باید شرایط مرزی روی معادله وجود داشته باشد . اگر دمای ابتدای میله ، برابر مقدار معین $\phi(x)$ باشد ، شرایط مرزی متناظر آن عبارت است از

$$u(\circ,t)=\phi(t), \qquad t\geq\circ.$$

به همین نحو ، در صورتی که دمای انتهای میله برابر $\psi(x)$ باشد ، آنگاه شرط مرزی متناظر آن عبارت است از

$$u(l,t)=\psi(t), \qquad t\geq\circ.$$

چنانچه ابتدای میله عایق بندی شده باشد ، آنگاه شدت هدایت گرما یعنی $-kAu_x(x,t)$ از ابتدای میله صفر است و لذا در این حالت شرط مرزی متناظر عبارت است از

$$u_x(\circ,t)=\circ, \qquad t>\circ.$$

به همین ترتیب ، در صورتی که انتهای میله عایق بندی شده باشد ، آنگاه شرط مرزی متناظر آن عبارت است از

$$u_x(l,t)=\circ, \qquad t>\circ.$$

اگر ابتدای میله عایق بندی نشده و همچنین در دمای خاصی نیز نگهداری نشود ، آنگاه ابتدای میله با محیط اطراف تبادل حرارتی دارد و لذا قانون خنک سازی نیوتن بر قرار است . طبق این قانون ، شدت هدایت گرما در واحد سطح از بین دو مرز ، متناسب با اختلاف دماهای بین دو مرز و محیط اطراف است . لذا در این حالت

$$-kAu_x(\circ,t)=C[T_\circ-u(\circ,t)], \qquad t>\circ,$$

که در آن $C$ یک عدد ثابت مثبت و $T_\circ$ دمای محیط اطراف است . در حالتی که $T_\circ = \circ$ می توان نوشت

$$u_x(\circ, t) - hu(\circ, t) = \circ, \qquad t > \circ,$$

که در آن $h = \frac{C}{kA}$ . به همین نحو ، اگر قانون خنک سازی نیوتن در انتهای میله برقرار باشد

$$-kAu_x(l, t) = C[u(l, t) - T_\circ], \qquad t > \circ.$$

و اگر $T_\circ = \circ$ می توان نوشت

$$u_x(l, t) + hu(l, t) = \circ.$$

همواره می توان با یک تبدیل ، مساله را به حالت $T_\circ = \circ$ تحویل کرد . در هر حالت باید توزیع دمای اولیه را در طول میله بدانیم . این مطلب متناظر با شرط اولیه زیر است

$$u(x, \circ) = f(x), \qquad \circ < x < l.$$

که در آن $f$ تابع مشخصی است .

### ۱.۱.۱ مقدار اولیه و شرایط مرزی

معادله گرمای یک بعدی زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^{۲} \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}, \qquad x \in I = (\circ, l)\ ,\ t \geq \circ. \tag{۵}$$

برای بدست آوردن‌جواب هم به شرایط اولیه و هم شرایط مرزی نیاز است. شرایط اولیه برای معادله (۵) بصورت $u(x, \circ) = g(x)$ در نظر گرفته می شود ، که آن راگرمای اولیه نیز می گویند. اما شرایط مرزی معادله گرما ، با توجه به خاصیت های فیزیکی آن ، به چهار صورت زیر است :

۱) دیرکله [۳] : در این شرط مرزی $I = (\circ, l)$ و $u(\circ, t) = A_\circ,\ u(l, t) = A_l$ می باشد. به عبارت دیگر مقدار گرما در دو انتهای جسم معلوم باشد .

۲) نیومن [۴]: در این شرط مرزی نیز $I = (\circ, l)$ و $u_x(\circ, t) = B_\circ,\ u_x(l, t) = B_l$ می باشد. به عبارت دیگر سرعت انتشار گرما در دو انتهای جسم معلوم باشد .

---

[۳] Dirichlet
[۴] Neumann

۳) رابین[۵]: در این شرط مرزی نیز $I=(\circ,l)$ و $u_x(l,t)-a_l u(l,t)=C_l$ و $u_x(\circ,t)-a_\circ u(\circ,t)=C_\circ$ می باشد.

۴) تناوبی : در این شرط مرزی نیز $I=(-l,l)$ و $u_x(-l,t)=u_x(l,t)$ و $u(-l,t)=u(l,t)$ می باشد.

اگر $A$ و $B$ و $C_\circ$ و $C_l$ برابر صفر باشند، آنگاه شرایط مرزی (۱)،(۲)،(۳)،(۴) را همگن گویند، در غیر اینصورت ناهمگن خواهد بود.

## ۲.۱ فرم کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی دو بعدی

یک معادله متشکل از دو یا چند متغیر مستقل همراه با مشتقات نسبی یک یا چند متغیر وابسته نسبت به متغیر های مستقل ، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی نامیده می شود . مرتبه یک معادله دیفرانسیل ، برابر با بالاترین مرتبه مشتقی است که در معادله ظاهر می شود .

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی دو بعدی به صورت زیر است

$$L[u]=A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-H(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=\circ. \qquad (٦)$$

هرگاه $A$ و $B$ و $C$ ، توابعی از متغیر های تنها $x$ و $y$ باشند ، آنگاه معادله (٦) را شبه خطی[٦] گویند . هرگاه $A$ و $B$ و $C$ ، توابعی از متغیر های $x$ و $y$ و $u$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشند آنگاه معادله (٦) را تقریبا خطی[۷] گویند . هرگاه $A$ و $B$ و $C$ توابعی از $x$ و $y$ و $H$ نیز یک تابع خطی از $x$ ، $y$ ، $u$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشد آنگاه معادله (٦) را خطی گویند .

بنابراین فرم کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی دو بعدی خطی بصورت زیر است

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u+G(x,y)=\circ. \qquad (۷)$$

اگر $G=\circ$ ، آنگاه معادله دیفرانسیل فوق را همگن گویند ، در غیر اینصورت نا همگن خواهد بود . جواب عمومی معادله (٦) یا (۷) بصورت

$$u=u(x,y)\ ,$$

است که آنرا رویه انتگرال گویند و مشخص کننده یک رویه در فضای $(x,y,u)$ است . اگر روی رویه انتگرال ، منحنی هایی موجود باشند که‌در آنها روابط $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ناپیوسته یا نامعلوم باشند ، آنگاه این منحنی‌ها را منحنی های

---
[۵] Robin
[٦] Semilinear
[۷] Quasilinear

مشخصه گویند . فرض کنید که جواب (۷) شامل منحنی $\Gamma$ باشد که معادلات پارامتری آن بصورت زیر است

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad u = u(s). \tag{۸}$$

فرض می کنیم که در هر نقطه $(x,y,u)$ از منحنی $\Gamma$ ، مشتقات نسبی $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ معلوم باشند ، بنابراین ، به ازای هر نقطه $(x,y,u)$ واقع در روی منحنی $\Gamma$ ، داریم $u = u(x,y)$ و

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}\,. \tag{۹}$$

با قرار دادن $\frac{\partial u}{\partial x} = p = p(x,y)$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = q = q(x,y)$ داریم

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{ds}, \quad \frac{dq}{ds} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{ds}. \tag{۱۰}$$

با در نظر گرفتن این حقیقت که در معادلات (٦) و (۱۰) ، مقادیر $A$ ، $B$ ، $C$ ، $H$ ، $\frac{dx}{ds}$ ، $\frac{dy}{ds}$ ، $P$ ، $q$ ، $\frac{dp}{ds}$ و $\frac{dq}{ds}$ در هر نقطه از $\Gamma$ معلوم هستند ، این سه معادله را می توان به عنوان سه معادله همزمان برای مقادیر نا معلوم $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ و $\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$ در هر نقطه از $\Gamma$ ، تلقی کرد

$$\begin{cases} A\frac{\partial p}{\partial x} + B\frac{\partial p}{\partial y} + C\frac{\partial q}{\partial y} & = H(x,y,u,p,q), \\ \frac{dx}{ds}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial p}{\partial y} & = \frac{dp}{ds}, \\ \qquad \frac{dx}{ds}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial q}{\partial y} & = \frac{dq}{ds}. \end{cases} \tag{۱۱}$$

توجه کنید که $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ و $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y}$ و... .

دستگاه (۱۱) دارای جواب یکتا است هرگاه دترمینان زیر مخالف صفر باشد

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & ۰ \\ ۰ & \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} \neq ۰, \tag{۱۲}$$

درنتیجه برای بدست آوردن منحنی های مشخصه ، بایستی دترمینان فوق را برابر صفر قرار دهیم ، پس از ساده سازی خواهیم داشت

$$A(\frac{dy}{ds})^۲ - B\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + C(\frac{dx}{ds})^۲ = ۰,$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در عبارت $(\frac{ds}{dx})^۲$ خواهیم داشت

$$A(\frac{dy}{dx})^۲ - B\frac{dy}{dx} + C = ۰. \tag{۱۳}$$

رابطه فوق یک چند جمله ای درجه دو است و جواب آن بصورت زیر است

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۲A}(B \pm \sqrt{B^۲ - ۴AC}). \tag{۱۴}$$

معادله (۱۴) را می توان بصورت دو معادله جدا شده نوشت

$$\begin{aligned} ۲A\,dy - (B + \sqrt{B^۲ - ۴AC})dx &= ۰, \\ ۲A\,dy - (B - \sqrt{B^۲ - ۴AC})dx &= ۰, \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

با توجه به اینکه معادلات فوق ، معادلات دیفرانسیل مرتبه اول هستند ، پس جواب معادلات فوق بصورت زیر است

$$\phi_۱(x,y) = c_۱, \qquad \phi_۲(x,y) = c_۲.$$

که در آن $c_۱$ و $c_۲$ ثابت های دلخواه اند ، این منحنی ها را ، منحنی های مشخصه گویند .

## ۳.۱ دسته بندی معادلات دیفرانسیل

دسته بندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی دو بعدی ، بر اساس امکان تبدیل معادله (۷) با یک تغییر متغیر خاص به یک صورت استاندارد یا کانونیک در یک نقطه می باشد . فرض کنیم که $(x_۰, y_۰)$ یک نقطه از دامنه معادله (۷) باشد . در این صورت ، اگر عبارت

$$B^۲(x_۰, y_۰) - ۴A(x_۰, y_۰)C(x_۰, y_۰)\ ,$$

به ترتیب مثبت ، صفر یا منفی باشد معادله (۷) هذلولوی ، سهموی یا بیضوی در نقطه $(x_۰, y_۰)$ خواهد بود . اگر به ازای کلیه نقاط یک دامنه عبارت $B^۲ - ۴AC$ همواره مثبت ، صفر یا منفی باشد ، آنگاه معادله (۷) را به ترتیب هذلولوی ، سهموی یا بیضوی در آن دامنه گویند . اگر دو متغیر مستقل داشته باشیم همیشه می توان تبدیلی یافت که معادله (۷) رابه صورت استاندارد یا کانونیک در دامنه معلوم ، تبدیل کند . اما ، در مورد چندین متغیر مستقل ، در حالت کلی پیدا کردن چنین تبدیلی ممکن نیست . برای اینکه معادله (۷) را به صورت استاندارد در آوریم ، متغیرهای مستقل را تغییر می دهیم . فرض می کنیم متغیرهای جدید بصورت زیر باشند

$$\xi = \xi(x,y), \qquad \eta = \eta(x,y), \qquad (۱۶)$$

اگر $\xi$ و $\eta$ بطور پیوسته دوبار دیفرانسیل پذیر باشند و همچنین ژاکوبین

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}, \qquad (۱۷)$$

در ناحیه مورد نظر نا صفر باشد ، آنگاه $x$ و $y$ را می توان بطور یکتا از دستگاه (۱۷) پیدا کرد . فرض کنید که $x$ و $y$ توابعی $\xi$ و $\eta$ باشند که بطور پیوسته دوبار دیفرانسیل پذیرند ، آنگاه داریم

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^{۲} + ۲u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^{۲} + u_\eta \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^{۲} + ۲u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^{۲} + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},
\end{aligned}
\tag{۱۸}
$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله (۷) خواهیم داشت

$$
A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_\xi + E^* u_\eta + F^* u = G^*, \tag{۱۹}
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
A^* &= A\xi_x^{۲} + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^{۲},\\
B^* &= ۲A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + ۲C\xi_y\eta_y,\\
C^* &= A\eta_x^{۲} + B\eta_x\eta_y + C\eta_u^{۲},\\
D^* &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y,\\
E^* &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y,\\
F^* &= F,\\
G^* &= G.
\end{aligned}
\tag{۲۰}
$$

چون دسته بندی معادله(۱۹) فقط به ضرایب مشتقهای مرتبه دو بستگی دارد ، پس معادله (۱۹) را می توان به صورت زیر نوشت

$$
A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} = H^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{۲۱}
$$

تحت تبدیل (۱٦) ، تا زمانی که $J \neq ۰$ ، سرشت و طبیعت (نوع مقطع) معادله تغییر نمی کند ، زیرا با توجه به معادله (۷) و (۱۹) ، مبین این معادلات هم علامت هستند

$$
B^{*۲} - ۴A^*C^* = J\,(B^{۲} - ۴AC)\,.
$$

## ۴.۱ عملگر های تفاضلی

فرض کنید که $y(x)$ ، یک تابع پیوسته روی بازه مفروض $I$ باشد ، و این بازه را به صورت $x_i = ih$ ، افراز کرده باشیم . داریم

$$\begin{cases} \Delta y(x) = y(x+h) - y(x), & \text{عملگر تفاضلی پیشرو ,} \\ \nabla y(x) = y(x) - y(x-h), & \text{عملگر تفاضلی پسرو ,} \\ \delta y(x) = y(x+\frac{h}{۲}) - y(x-\frac{h}{۲}), & \text{عملگر تفاضلی مرکزی ,} \\ Dy(x) = \frac{\partial}{\partial x} y(x), & \text{عملگر دیفرانسیل .} \end{cases}$$

این روابط به صورت زیر به هم وابسته اند

| | $\Delta$ | $\nabla$ | $\delta$ | $hD$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | $۱$ | $(۱-\nabla)^{-۱} - ۱$ | $\frac{۱}{۲}\delta^{۲} + \delta\sqrt{(۱+\frac{\delta^{۲}}{۴})}$ | $e^{hD} - ۱$ |
| $\nabla$ | $۱ - (۱+\Delta)^{-۱}$ | $۱$ | $-\frac{۱}{۲}\delta^{۲} + \delta\sqrt{(۱+\frac{\delta^{۲}}{۴})}$ | $۱ - e^{-hD}$ |
| $\delta$ | $\Delta(۱+\Delta)^{-\frac{۱}{۲}}$ | $\nabla(۱-\nabla)^{-\frac{۱}{۲}}$ | $۱$ | $۲\sinh(\frac{hD}{۲})$ |
| $hD$ | $\log(۱+\Delta)$ | $-\log(۱-\nabla)$ | $۲\sinh^{-۱}(\frac{\delta}{۲})$ | $۱$ |

همچنین ، روابط زیر بر قرار است

$$\Delta^n y(x) = \sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} y(x+(n-k)h),$$

$$\nabla^n y(x) = \sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} y(x-kh),$$

$$\delta^{۲n} y(x) = \sum_{k=۰}^{۲n} (-۱)^k \frac{(۲n)!}{k!(۲n-k)!} y(x+(n-k)h).$$

## ۵.۱ تابع دلتای دیراک

### ۱.۵.۱ تابع هویساید

تابع هویساید[۸] یک تابع پله ای است که بصورت زیر تعریف می شود

$$H(x-c) = \begin{cases} ۰, & x < c, \\ ۱/۲, & x = c, \\ ۱, & x > c. \end{cases} \qquad (۲۲)$$

که در نقطهٔ $x = c$ ، مشتقپذیر نیست . توجه کنید که

$$H(x-c) + H(c-x) = ۱ \ .$$

### ۲.۵.۱ تابع دلتای دیراک

اگر از تابع هویساید مشتق بگیریم ، تابع دلتای دیراک[۹] حاصل می شود . تابع دلتای دیراک را با نماد $\delta$ نمایش می دهیم . این یک تابع نقطه ای است که بصورت زیر تعریف می شود

$$\delta(x-c) = \begin{cases} ۰, & x \neq c, \\ \infty, & x = c. \end{cases} \qquad (۲۳)$$

چون مشتق $H(x-c)$ نا معین است ، بنا بر این در حالت کلی ، $\delta(x-c)$ ، به معنی عام ، تابع نیست . تابع دلتای دیراک دارای خواص زیر است

$I$ . انتگرال تابع دلتای دیراک بصورت زیر تعریف می شود( خاصیت انتگرال )

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-c)dx = ۱.$$

$II$ . این تابع دارای خاصیت الک کردن [۱۰] است ، بدین ترتیب که بازای هر تابع $f(x)$ که در نقطه $x = c$ پیوسته است داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-c)dx = f(c).$$

---

[۸] Heaviside function
[۹] Dirac Delta function
[۱۰] Sifting Property