دانشگاه شهید چمران اهواز

موضوع:

تعمیم قضایای کوجیما-شور
و تیوپلیتز روی فضاهای فرشت

پایان نامه کارشناسی ارشد

نگارش: عبدالحمید فطانت

اسفند: ۷۳

تقدیم به دخترم صدف

با تشکر از دکتر بدیع الزمان که مشوق و راهنمای بنده بوده و سایر اساتید گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران بویژه دکتر کرم زاده که با روش عالمانه خود این گروه را هدایت می کند.

تمامی مقاله توسط نگارنده بوسیله کلمه
پردازWRITE FOR WINDOWS به کمک
EQUATION EDITOR WINDOWS تایپ
شده است.

فهرست

مقدمه

جلسه ۵:

مفهوم جمعپذیری دنباله های عددی بوسیله ماتریسهای نامتناهی بخوبی شناخته شده است. دو قضیه اصلی در این مبحث عبارتند از *کوجیما-شورروتیوپلیتز(سیلورمن)*، که اولی در مورد حفظ همگرایی و دیگری در مورد حدوحفظ همگرایی بحث و نتیجه گیری می کنند.

اثباتهای ساده ای از این دو قضیه به روش آنالیز تابعی در کتاب باناخ [2] وجود دارد .این مفاهیم بوسیله رابینسون[15]وملوین-ملوین [11] به دنباله ها در فضاهای باناخ بسط و تشریح گردیده اند. همچنین اثباتها یی به صورت آنالیز تابعی از نتایج آنها بوسیله زلر[20] و لورنتس[10] و مک فیل[13] ارائه شده است . این نتایج توسط مادوکس[12] روی بسیاری از فضاهای خطی توپولوژیکی بسط و توضیح داده شده اند. ما در این بحث، دو قضیه فوق الذکر را در فضاهای*فرشت* بسط و تشریح می کنیم.

برای رسیدن به این هدف نیاز به مفاهیم و قضایای متعددی داریم که گام به گام در دو فصل ۱و۲ به آنها خواهیم پرداخت.در فصل ۱ فضاهای خطی و فضاهای توپولوژیکی و همینطور فضاهای خطی توپولوژیکی و نیز مفاهیم و گزاره های مورد نیاز در ارتباط با آنها را تشریح و اثبات می کنیم .

در فصل ۲ به قضایای مشهوری در مورد فضاهای موضعاً محدب نظر خواهیم افکند و همچنین قضایای مشهور نرم پذیری کولموگورف و باناخ-اشتینهاوس و قضیه کاتاگوری و بسیاری از قضایای مورد نیاز دیگر را مطالعه ومورد بحث قرار خواهیم داد. بالاخره در فصل ۳ آمادگی خواهیم ~~خواهیم~~ داشت که قضایای *کوجیما-شورروتیوپلیتز*را درمورد فضاهای فرشت بسط و گسترش دهیم و در نهایت به گزاره ای در مورد ساختار کلاس ماتریسهای نیمه-پایینی توجه خواهیم نمود و خواهیم دید که این ساختار یک جبر باناخ می باشد.

فصل ۱

فضاهای خطی

تعریف ۱-۱:

یک فضای خطی حقیقی (مختلط) که گاهاً فضای برداری و یا فضای خطی روی میدان حقیقی (مختلط) نامیده می شود عبارت است از یک مجموعها تهی E و دو عملگر بنام جمع و ضرب اسکالر.

جمع عملگری است که آنرا با + نشان می دهیم و دارای خواص ذیل است:

الف)

$$\forall x, y \in E : x + y \in E$$

ب) جمع جابجایی است ، یعنی:

$$\forall x, y \in E : x + y = y + x$$

پ) جمع شرکت پذیر است ، یعنی:

$$\forall x, y, z \in E: (x + y) + z = x + (y + z)$$

ت)عنصر یکتایی که آنرا با e نمایش می دهیم ،در E وجود دارد بطوریکه:

$$\forall x \in E: x + e = x$$

ث)برای هر x در E عنصری یکتا که آنرا با x- نمایش می دهیم وجوددارد بطوریکه:

$$x+(-x)=0$$

ضرب عملگری است که آنرا با . نمایش می دهیم و خواص ذیل را دارااست:

ج)برای هر a حقیقی (مختنط) و هر xدرE ، داریم:

$$a.x \in E$$

چ) ضرب نسبت به جمع اعداد حقیقی(مختلط) توزیعپذر است،یعنی:

$$(a+b).x=a.x+b.x$$

که b,a حقیقی(مختلط) و x عنصری دلخواه از E است.
ح)ضرب شرکت پذیر است ، یعنی:

$$(a.b).x=a.(b.x)$$

که b,a حقیقی(مختلط) و x عنصری دلخواه از E است.
خ)برای هر x در E داریم: $1.x=x$

مرسوم است که بدون اینکه به عملگرها اشاره گردد به طور ساده ،فضای خطی E گفته می شود.به عناصر E بردار نام می نهیم و همینطور عناصر میدان حقیقی (مختلط)به اسکالر موسومند.دو فضای خطی F,E را یکی گوییم هر گاه که E=F و عملگرهای جمع و ضرب نیز یکی باشند.

مثال ۱:

فرض کنیم که [a,b] یک بازه بسته از اعداد حقیقی باشند و x یک تابع حقیقی روی [a,b]باشد که مقدار آن را در نقطه s متعلق به [a,b] رابا x(s) نمایش میدهیم و C[a,b]مجموعه همه این قبیل توابع باشد . x_1+x_2 و αx بطور طبیعی تعریف شده باشند،یعنی:

$$(a\,x)(s) = a\,(x(s))\ ,\ (x_1 + x_2)(s) = x_1(s) + x_2(s)$$

در این صورت C[a,b] یک فضای خطی حقیقی خواهد بود.

مثال ۲:

فرض کنیم که x یک تابع مختلط از متغیر حقیقی s باشد که مشتق آن از هر مرتبه ای وجود داشته باشد ، در این صورت کلاس همه این قبیل توابع یک فضای خطی خواهد بود.

پایه هامل و زیر فضا

تعریف ۱-۲:

یک زیر مجموعه A از فضای خطی E مستقل خطی است، هر گاه:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \Leftrightarrow \forall i : a_i = 0$$

$$.\forall i = 1,\ldots,n : x_i \in A, \forall i,j : x_i \neq x_j$$

یک زیر مجموعه B از E یک پایه هامل است اگر و فقط اگر هر عنصر غیر صفر Eرا بتوان به طریق یکتایی از عناصر متمایز B با ضرایب غیر صفر نمایش داد.یک پایه هامل لزوماً مستقل خطی است و قضیه ای که متعاقباًخواهد آمد ، نشان می دهد که هر مجموعه مستقل خطی می تواند بگونه ای توسعه یابد که یک پایه هامل را بدست دهد.

قضیه ۱-۱:

فرض کنیم که E یک فضای خطی باشد:

الف) هر زیر مجموعه مستقل خطی E مشمول در یک زیر مجموعه مستقل خطی ماگزیمال است.

ب)هر زیر مجموعه مستقل خطی ماگزیمال E یک پایه هامل است و بالعکس.

ج) هر دو پایه هامل دارای یک عدد اصلی می باشند.

اثبات:

الف)ولین گزاره فوراً از لم زورن نتیجه می شود .فرض کنیم P کلاس همه زیرمجموعه های مستقل خطی E باشد و و فرض کنیم که P بوسیله $\subset$ جزئاً مرتب شده باشد.طبق فرضP غیر تهی است و اگر Q یک زنجیر در P باشد ، زیرمجموعه ای از E که از اجتماع همه

زیرمجموعه های E در Q بدست می آید، متعلق به P است و یک کران بالا برای Q خواهد بود. لذا طبق لم زورن P می بایست دارای یک عنصر ماگزیمال مانند H داشته باشد .و از آنجا هر زیر مجموعه مستقل خطی مشمول در H است.

ب) اگر H زیر مجموعه مستقل خطی ماگزیمال E باشد، آنگاه H یک پایه هامل برای E خواهد بود زیرا در غیر این صورت x ای در E وجود دارد که H,x زیرمجموعه مستقل خطی E است و این با تعریف H مغایرت دارد بنابراین H یک پایه هامل برای E است.

بالعکس، اگر H یک پایه هامل باشد که ماگزیمال نباشد آنگاه طبق تعریف ،H مستقل خطی است و بنابراین با توجه به (الف) H مشمول در یک زیر مجموعه مستقل خطی ماگزیمال E مانند T است .در اینصورت T شامل x ای است که ترکیب خطی از عناصر H نیست واین با تعریف H مغایرت دارد و لذا H زیر مجموعه مستقل خطی ماگزیمال E است.

ج) ابتدا فرض می کنیم که B یک پایه هامل متناهی برای E و A یک مجموعه مستقل خطی دلخواه باشد . بوسیله روند جایگذاری عنصر به عنصر می توان نشان داد که تعداد زیادی از عناصر A به B تعلق دارند.

در ابتدا اگر x_1 در A دلخواه باشد، آنگاه ترکیب خطی ازعناصر B است واز اینرو بعضی از اعضای B ترکیب خطی از x_1 و دیگرعناصر B هستندو بنابراین x_1 همراه B با یک عنصر حذف شده یک پایه هامل را تشکیل می دهند.اگر این روند را ادامه دهیم ،در مرحله r-ام مشاهده می کنیم که x_r از A ترکیب خطی از $x_1,...,x_{r-1}$ و عناصری از B می باشند که حذف نشده اند و x_r ترکیب خطی از $x_1,...,x_{r-1}$ نیست و بنابراین عضوی از B باقی می ماند که می تواندبا x_r جابجا شودو یک پایه هامل را بدست دهد. در این حالت واضح است که A شامل حداکثر بسیاری از اعضای B است . آنگاه در حالتی که همه اعضای B حذف گردند هیچ عنصری از A برای انتخاب باقی نمی ماند زیرا درغیر اینصورت این عنصرترکیب خطی از دیگر عناصر A خواهد بود که با تعریف A مغایر است وبنابراین اثبات در این حالات تمام است.

اکنون اثبات (ج) را برای حالتی که پایه هامل نامتناهی باشد،تعمیم می دهیم .فرض می کنیم که C,B دو پایه هامل نامتناهی برای E باشند . برای هر x در B فرض می کنیم که F(x)

زیر مجموعه متناهی از C باشد بطوریکه x ترکیب خطی با ضرایب غیر صفر ازاعضای F(x)
باشد.چون ترکیبات خطی متناهی از اعضای U{F(x):x ε B} شامل همه اعضای B می باشند
و چون این عناصر از C,B اختیارشده اند ، لذا داریم که C={ F(x):x ε B}. فرض کنیم که
k(A) عدد اصلی مجموعه دلخواه A باشد ، بنابراین:

$$k(A) = k(\cup\{F(x):x \in B\}) \leq \aleph_0 . k(B) = k(B).$$

زیرا که B مجموعه ای نامتناهی است . استدلال مشابهی نشان می دهد که k(B)<k(C)
و بنا براین k(B)=k(C) و اثبات در اینجا کامل می شود.□

تعریف ۱–۳:

بعد یک فضای خطی عبارت است از عدد اصلی یک پایه هامل برای آن فضا.

تعریف ۱–٤:

یک فضای خطی F یک زیر فضای خطی از فضای خطی E است اگروفقط اگر Fزیر
مجموعه E باشد و E,F دارای میدان اسکالر K باشندودو عملگر جمع و ضرب اسکالر در
F منطبق با عملگرهای متناظر در Eباشند.

تعریف ۱–۵:

اگر Aیک زیر مجموعه دلخواه از E باشد ،آنگاه مجموعه همه ترکیبات خطی از اعضای A
یک زیر فضای خطی E است .که توسیع خطی A یازیر فضای تولید شده بوسیله A نامیده می
شود.

تعریف ۱–٦:

اگر B,A زیر مجموعه های E باشند ،آنگاه:

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

و اگر x عنصری دلخواه از E باشد آنگاه{x}+A را بصورتx+A نمایش می دهیم و آنرا
انتقال A بوسیله x می نامیم.اگر a یک اسکالر باشد آنگاه:

$$aA = \{ax : x \in A\}$$

و$(-1).A$ را با $-A$ نمایش می دهیم . یک مجموعه به شکل $x+F$ را که F یک زیر فضای خطی از E است را یک مانیفلد خطی یا یک سطح می نامیم.

تعریف ۱–۷:

دو زیر فضای خطی G,F از E را مکمل گوییم هر گاه هر عنصر E را بتوان فقط وفقط به یک طریق بصورت مجموع یک عنصر F و یک عنصر G نمایش داد.

تعریف ۱–۸:

فرض کنیم F,E دو فضای خطی روی یک میدان اسکالر باشند و فرض کنیم که T نگاشتی از E به F باشد.T را خطی گوییم اگر برای همه y,x در E و همه اسکالرهای b,a داشته باشیم:

$$T(ax+by) = aT(x) + bT(y).$$

یک نگاشت خطی یک به یک و برو از E به F را یک ایزومورفیسم خطی از E به F گوییم.
یک فانکشنال خطی روی یک فضای خطی E یک تابع خطی با مقادیر در میدان اسکالر است.

فضاهای توپولوژیکی

در این بخش ، توپولوژی برای یک مجموعه X و مفاهیم در ارتباط با آن که درادامه بحث مورد نیاز است را مورد تدقیق قرار می دهیم.

یک توپولوژی برای یک مجموعه X عبارت است از خانواده Ω از زیر مجموعه هایx که مجموعه های باز نامیده می شوند و دارای خواص ذیل هستند:

الف) ϕ و X به Ω تعلق دارند.

ب)اجتماع هر تعداد دلخواه از مجموعه های باز ،باز است.

ج)اشتراک تعداد متناهی از مجموعه های باز ،باز است.

توجه:

اگر چند توپولوژی برای X تعریف شده باشد،آنگاه اعضای Ω را بازهای مرتبط با Ω یا Ω-باز می نامیم و مجموعه X باتوپولوژی Ω را با (X,Ω) نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۹:

الف)A زیر مجموعه Xرا ، بسته گوییم اگر و فقط اگر X-A باز باشد.

ب) مقطع همه مجموعه های بسته شامل A یک مجموعه بسته است که آنرا بستار A گوییم و آنرا با $\bar{A}$ نمایش می دهیم .

پ)یک زیر مجموعه Bاز A را که بستار آن شامل A است،چگال در A گوییم.

ت)اجتماع همه مجموعه های باز مشمول در A یک مجموعه باز است که درون Aنامیده می شود و آنرا با A^i یا int A نمایش کی دهیم.

ث) یک مجموعه U یک همسایگی xاست اگر و فقط اگر x درون U باشد.

ج)سیستم همسایگی های x عبارت است از خانواده V_x ها که هر V_x یک همسایگی از x است. یک زیر خانواده B از V_x ها که هر همسایگی x شامل یک عنصر B است ،یک پایه برای سیستم همسایگی x نامیده می شود.

ج)یک فضای توپولوژیکی هاسدورف است اگر برای هر دو عنصر متمایز y,x ،دو همسایگی مجزای V_y,V_x بترتیب برای y,x وجود داشته باشد.

ح)یک فضای توپولوژیکی منظم است اگر برای هر x،خانواده همسایگی های بسته x،یک پایه برای سیستم همسا یگی های x باشد.

خ)یک فضای توپولوژیکی جدایی پذیر است اگر دارای یک زیر مجموعه چگال شمارش پذیرباشد.

د)یک فضای توپولوژیکی فشرده است اگر دارای خاصیت برل – لبگ باشد ، یعنی اینکه هر پوشش از مجموعه های باز دارای یک پوشش متناهی باشد.

تعریف ۱-۱۰:

اگر Y,X دوفضای توپولوژیکی باشند،آنگاه Y زیر فضای توپولوژیکی X است اگر وفقط اگر Y زیر مجموعه Xباشد و مجموعه های باز در Y ،مقطع Y با یک زیر مجموعه باز X باشند.

ب)اگر Z زیر مجموعه X باشد، توپولوژی القا شده توسط Z ، عبارت است از خانواده همه زیر مجموعه های U از Z بطوریکه یک زیر مجموعه باز Vاز Xموجود باشد و $U=Z\cap V$ و توجه می کنیم که Z یک زیر فضای توپولوژیکی Xاست.

تعریف ۱-۱۱:

فرض کنیم که (X,Ω) و (Y,Ψ) دو فضای توپولوژیکی باشند و F یک نگاشت از Xبه Y باشد، F را درx پیوسته گوییم اگر وفقط اگر تصویر معکوس هر Ω –همسایگی F(x) یکΨ– همسایگی x باشد و نگاشت F را روی X پیوسته گوییم اگر و فقط اگرFدر هر نقطه x متعلق به X پیوسته باشد.بالاخره نگاشت F یک همیومورفیسم است اگر و فقط اگر روی X پیوسته باشد و این نگاشت یک به یک و تصویر معکوس آن یعنی F^{-1} نیز روی F(x) پیوسته باشد.

تعریفی که در زیر می اید در ادامه بحث مفید و مورد نیاز است:

تعریف ۱-۱۲:

یک رابطه R روی یک مجموعه A مستقیم (DIRECT) است اگر:

الف)R روی A انعکاسی باشد.

ب)R روی A متعدی باشد.

ج)برای هر β,α متعلق به A یک عنصر λمتعلق به A باشد بطوریکه:

$\lambda R \alpha$ و $\beta R \lambda$□

تعریف ۱–۱۳:

یک شبکه عبارت است از یک جفت(x,R) بطوریکه x یک تابع باشد و R روی دامنهx مستقیم باشد. بطور کلی مجموعه $\{x_\alpha, \alpha\varepsilon A, R\}$ یا بطور ساده $\{x_\alpha\ \alpha\varepsilon A\}$ را یک شبکه گوییم هر گاه x یک تابع باشد که دامنه آن شامل A است و R رویA مستقیم است.

شبکه $\{x_\alpha\ \alpha\varepsilon A\}$ *سرانجام*در مجموعه B است اگر و فقط اگر برای هرα در Aداشته باشیم:$x_\beta\varepsilon A$ وقتیکه$\alpha\ R\ \beta$.

یک شبکه در یک فضای توپولوژیکی همگرا به یک نقطه است اگر و فقط اگر شبکه سرانجام در هر همسایگی آن نقطه باشد.وقتیکه شبکه $\{x_\alpha\ \alpha\varepsilon A\}$ همگرا به y در X باشد آنگاه آنرا با $x_\alpha \mapsto y$ و یا $y=\lim x_\alpha$ نمایش می دهیم .همینطوریک نقطه ،نقطه انباشتگی یک شبکه است اگر و فقط اگرآن شبکه سرانجام در متمم هر همسایگی آن نقطه نباشد.

هر گاه در شبکه $\{x_\alpha\ \alpha\varepsilon A\}$، A را مجموعه اعداد صحیح مثبت با ترتیب معمولی در نظر بگیریم آنگاه به آن دنباله گوییم.

تعریف ۱–۱٤:

یک شبه متریک روی یک مجموعه X یک تابع نامنفی d است اگر دارای خواص ذیل باشد:

i) $\forall x, y \in X: d(x,y) = d(y,x)$

ii) $\forall x \in X: d(x.x) = 0$

iii) $\forall x,y,z \in X: d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

یک متریک روی X یک شبه متریک d است بطوریکه اگر$d(x,y)=0$ آنگاه $x=y$.

تعریف ۱–۱۵:

یک مجموعه X با یک شبه متریک(متریک) d یک فضای شبه متریک(متریک)نامیده می شود.در یک فضای متریک(متریک) یک گوی باز به مرکز x و به شعاع r عبارت است ازهمه y ها ی $d(x,y)<r$.

همینطوریک گوی باز به مرکز x و به شعاع r عبارت است از:

$$\{y : y \in X, d(x,y) \leq r\}$$

هر شبه متریک(متریک)d روی X یک توپولوژی را روی X به گونه زیر بوجود می آورد: