

# دانشگاه شهید چمران اهواز

## موضوع:

تعمیم قضایای کوجیما-شور  
و تیوپلیتز روی فضاهاى فرشت

پایان نامه کارشناسی ارشد

نویسنده: عبدالحمید فطانت

اسفند: ۷۳

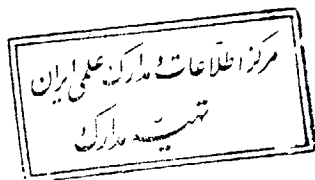
تقدیم به دخترم صدف

۳۹۹

با تشکر از دکتر بدیع الزمان که مشوق و  
راهنمای بنده بوده و سایر اساتید گروه ریاضی  
دانشگاه شهید چمران بویژه دکتر کرم زاده  
که با روش عالمانه خود این گروه را هدایت  
می کند.

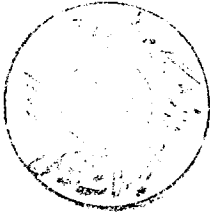
تمامی مقاله توسط نگارنده بوسیله کلمه  
پرداز **WRITE FOR WINDOWS** به کمک  
**EQUATION EDITOR WINDOWS** تایپ  
شده است.

۱۳۷۴ / ۱۶ / ۲۶



## فهرست

صفحه ۱	مقدمه
	فصل ۱
صفحه ۲	فضاهای خطی
صفحه ۴	پایه هامل و زیر فضا
صفحه ۸	فضاهای توپولوژیکی
صفحه ۱۲	فضاهای خطی توپولوژیکی
صفحه ۱۶	انواع فضاهای خطی توپولوژیکی
	فصل ۲
صفحه ۱۷	بررسی قضایای مهم روی فضاهای فرشت
صفحه ۳۳	فضاهای تابعی
	فصل ۳
صفحه ۳۸	مقدمه
صفحه ۳۹	قضایای جمعپذیری روی فضاهای فرشت
صفحه ۴۸	خواص جبری ماتریسهای پایستار
صفحه ۵۵	مراجع



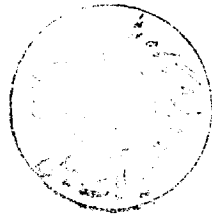
## مقدمه

جلسه ۶

مفهوم جمعپذیری دنباله های عددی بوسیله ماتریسهای نامتناهی بخوبی شناخته شده است. دو قضیه اصلی در این مبحث عبارتند از کوچیما-شوروتیولیتز (سیلورمن)، که اولی در مورد حفظ همگرایی و دیگری در مورد حد و حفظ همگرایی بحث و نتیجه گیری می کنند. اثباتهای ساده ای از این دو قضیه به روش آنالیز تابعی در کتاب باناخ [2] وجود دارد. این مفاهیم بوسیله راینسون [15] و ملوین-ملوین [11] به دنباله ها در فضاهای باناخ بسط و تشریح گردیده اند. همچنین اثباتهایی به صورت آنالیز تابعی از نتایج آنها بوسیله زلر [20] و لورتس [10] و مک فیل [13] ارائه شده است. این نتایج توسط مادوکس [12] روی بسیاری از فضاهای خطی توپولوژیکی بسط و توضیح داده شده اند. ما در این بحث، دو قضیه فوق الذکر را در فضاهای فرشت بسط و تشریح می کنیم.

برای رسیدن به این هدف نیاز به مفاهیم و قضایای متعددی داریم که گام به گام در دو فصل ۱ و ۲ به آنها خواهیم پرداخت. در فصل ۱ فضاهای خطی و فضاهای توپولوژیکی و همینطور فضاهای خطی توپولوژیکی و نیز مفاهیم و گزاره های مورد نیاز در ارتباط با آنها را تشریح و اثبات می کنیم.

در فصل ۲ به قضایای مشهوری در مورد فضاهای موضعاً محدب نظر خواهیم افکند و همچنین قضایای مشهور نرم پذیری کولموگورف و باناخ-اشتینهاوس و قضیه کاتاگوری و بسیاری از قضایای مورد نیاز دیگر را مطالعه و مورد بحث قرار خواهیم داد. بالاخره در فصل ۳ آمادگی خواهیم داشت که قضایای کوچیما-شوروتیولیتز را در مورد فضاهای فرشت بسط و گسترش دهیم و در نهایت به گزاره ای در مورد ساختار کلاس ماتریسهای نیمه-پایینی توجه خواهیم نمود و خواهیم دید که این ساختار یک اجبر باناخ می باشد.



# فصل ۱

## فضاهای خطی

### تعریف ۱-۱:

یک فضای خطی حقیقی (مختلط) که گاهاً فضای برداری و یا فضای خطی روی میدان حقیقی (مختلط) نامیده می شود عبارت است از یک مجموعه‌ها تهی  $E$  و دو عملگر بنام جمع و ضرب اسکالر.

جمع عملگری است که آنرا با  $+$  نشان می دهیم و دارای خواص ذیل است:  
(الف)

$$\forall x, y \in E: x + y \in E$$

(ب) جمع جابجایی است، یعنی:

$$\forall x, y \in E: x + y = y + x$$

(پ) جمع شرکت پذیر است، یعنی:

$$\forall x, y, z \in E: (x + y) + z = x + (y + z)$$

(ت) عنصر یکتایی که آنرا با  $e$  نمایش می دهیم، در  $E$  وجود دارد بطوریکه:

$$\forall x \in E: x + e = x$$

(ث) برای هر  $x$  در  $E$  عنصری یکتا که آنرا با  $-x$  نمایش می دهیم

وجود دارد بطوریکه:

$$x + (-x) = 0$$

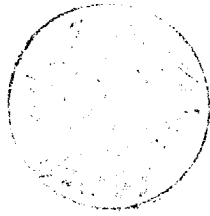
ضرب عملگری است که آنرا با  $\cdot$  نمایش می دهیم و خواص ذیل را داراست:

(ج) برای هر  $a$  حقیقی (مختلط) و هر  $x$  در  $E$ ، داریم:

$$a \cdot x \in E$$

(چ) ضرب نسبت به جمع اعداد حقیقی (مختلط) توزیع پذیر است، یعنی:

$$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$$



که  $b, a$  حقیقی (مختلط) و  $x$  عنصری دلخواه از  $E$  است.  
(ح) ضرب شرکت پذیر است، یعنی:

$$(a.b).x = a.(b.x)$$

که  $b, a$  حقیقی (مختلط) و  $x$  عنصری دلخواه از  $E$  است.

$$1.x = x \quad \text{خ) برای هر } x \text{ در } E \text{ داریم:}$$

مرسوم است که بدون اینکه به عملگرها اشاره گردد به طور ساده، فضای خطی  $E$  گفته می شود. به عناصر  $E$  بردار نام می نهیم و همینطور عناصر میدان حقیقی (مختلط) به اسکالر مرسومند. دو فضای خطی  $F, E$  را یکی گوئیم هر گاه که  $E=F$  و عملگرهای جمع و ضرب نیز یکی باشند.

## مثال ۱:

فرض کنیم که  $[a, b]$  یک بازه بسته از اعداد حقیقی باشند و  $x$  یک تابع حقیقی روی  $[a, b]$  باشد که مقدار آن را در نقطه  $s$  متعلق به  $[a, b]$  را با  $x(s)$  نمایش میدهیم و  $C[a, b]$  مجموعه همه این قبیل توابع باشد.  $x_1 + x_2$  و  $\alpha x$  بطور طبیعی تعریف شده باشند، یعنی:

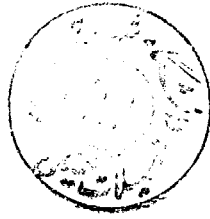
$$(a x)(s) = a (x(s)), \quad (x_1 + x_2)(s) = x_1(s) + x_2(s)$$

در این صورت  $C[a, b]$  یک فضای خطی حقیقی خواهد بود.

## مثال ۲:

فرض کنیم که  $x$  یک تابع مختلط از متغیر حقیقی  $s$  باشد که مشتق آن از هر مرتبه ای وجود داشته باشد، در این صورت کلاس همه این قبیل توابع یک فضای خطی خواهد بود.





## پایه هامل و زیر فضا

### تعریف ۱-۲:

یک زیر مجموعه  $A$  از فضای خطی  $E$  مستقل خطی است، هر گاه:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \Leftrightarrow \forall i: a_i = 0$$

$$\forall i = 1, \dots, n: x_i \in A, \forall i, j: x_i \neq x_j$$

یک زیر مجموعه  $B$  از  $E$  یک پایه هامل است اگر و فقط اگر هر عنصر غیر صفر  $E$  را بتوان به طریق یکتایی از عناصر متمایز  $B$  با ضرایب غیر صفر نمایش داد. یک پایه هامل لزوماً مستقل خطی است و قضیه ای که متعاقباً خواهد آمد، نشان می دهد که هر مجموعه مستقل خطی می تواند بگونه ای توسعه یابد که یک پایه هامل را بدست دهد.

### قضیه ۱-۱:

فرض کنیم که  $E$  یک فضای خطی باشد:

الف) هر زیر مجموعه مستقل خطی  $E$  مشمول در یک زیر مجموعه مستقل خطی ماگزیمال است.

ب) هر زیر مجموعه مستقل خطی ماگزیمال  $E$  یک پایه هامل است و بالعکس.

ج) هر دو پایه هامل دارای یک عدد اصلی می باشند.

### اثبات:

الف) اولین گزاره فوراً از لم زورن نتیجه می شود. فرض کنیم  $P$  کلاس همه زیرمجموعه های مستقل خطی  $E$  باشد و فرض کنیم که  $P$  بوسیله  $C$  جزئاً مرتب شده باشد. طبق فرض  $P$  غیر تهی است و اگر  $Q$  یک زنجیر در  $P$  باشد، زیرمجموعه ای از  $E$  که از اجتماع همه



زیرمجموعه های  $E$  در  $Q$  بدست می آید، متعلق به  $P$  است و یک کراال بالا برای  $Q$  خواهد بود. لذا طبق لم زورن  $P$  می بایست دارای یک عنصر ماگزیمال مانند  $H$  داشته باشد و از آنجا هر زیر مجموعه مستقل خطی مشمول در  $H$  است.

ب) اگر  $H$  زیر مجموعه مستقل خطی ماگزیمال  $E$  باشد، آنگاه  $H$  یک پایه هامل برای  $E$  خواهد بود زیرا در غیر این صورت  $x$  ای در  $E$  وجود دارد که  $H, x$  زیرمجموعه مستقل خطی  $E$  است و این با تعریف  $H$  مغایرت دارد بنابراین  $H$  یک پایه هامل برای  $E$  است. بالعکس، اگر  $H$  یک پایه هامل باشد که ماگزیمال نباشد آنگاه طبق تعریف  $H$ ، مستقل خطی است و بنابراین با توجه به (الف)  $H$  مشمول در یک زیر مجموعه مستقل خطی ماگزیمال  $E$  مانند  $T$  است. در اینصورت  $T$  شامل  $x$  ای است که ترکیب خطی از عناصر  $H$  نیست و این با تعریف  $H$  مغایرت دارد و لذا  $H$  زیر مجموعه مستقل خطی ماگزیمال  $E$  است.

ج) ابتدا فرض می کنیم که  $B$  یک پایه هامل متناهی برای  $E$  و  $A$  یک مجموعه مستقل خطی دلخواه باشد. بوسیله روند جایگذاری عنصر به عنصر می توان نشان داد که تعداد زیادی از عناصر  $A$  به  $B$  تعلق دارند.

در ابتدا اگر  $x_1$  در  $A$  دلخواه باشد، آنگاه ترکیب خطی از عناصر  $B$  است و از اینرو بعضی از اعضای  $B$  ترکیب خطی از  $x_1$  و دیگر عناصر  $B$  هستند و بنابراین  $x_1$  همراه  $B$  با یک عنصر حذف شده یک پایه هامل را تشکیل می دهند. اگر این روند را ادامه دهیم، در مرحله  $m$  مشاهده می کنیم که  $x_m$  از  $A$  ترکیب خطی از  $x_1, \dots, x_{m-1}$  و عناصری از  $B$  می باشند که حذف نشده اند و  $x_m$  ترکیب خطی از  $x_1, \dots, x_{m-1}$  نیست و بنابراین عضوی از  $B$  باقی می ماند که می تواند با  $x_m$  جابجا شود و یک پایه هامل را بدست دهد. در این حالت واضح است که  $A$  شامل حداکثر بسیاری از اعضای  $B$  است. آنگاه در حالتی که همه اعضای  $B$  حذف گردند هیچ عنصری از  $A$  برای انتخاب باقی نمی ماند زیرا در غیر اینصورت این عنصر ترکیب خطی از دیگر عناصر  $A$  خواهد بود که با تعریف  $A$  مغایر است و بنابراین اثبات در این حالات تمام است.

اکنون اثبات (ج) را برای حالتی که پایه هامل نامتناهی باشد، تعمیم می دهیم. فرض می کنیم که  $C, B$  دو پایه هامل نامتناهی برای  $E$  باشند. برای هر  $x$  در  $B$  فرض می کنیم که  $F(x)$

زیر مجموعه متناهی از  $C$  باشد بطوریکه  $x$  ترکیب خطی با ضرایب غیر صفر از اعضای  $F(x)$  باشد. چون ترکیبات خطی متناهی از اعضای  $\{F(x): x \in B\}$  شامل همه اعضای  $B$  می باشند و چون این عناصر از  $C, B$  اختیار شده اند، لذا داریم که  $C = \{F(x): x \in B\}$ . فرض کنیم که  $k(A)$  عدد اصلی مجموعه دلخواه  $A$  باشد، بنابراین:

$$k(A) = k(\cup\{F(x): x \in B\}) \leq \aleph_0. k(B) = k(B).$$

زیرا که  $B$  مجموعه ای نامتناهی است. استدلال مشابهی نشان می دهد که  $k(B) < k(C)$  و بنا براین  $k(B) = k(C)$  و اثبات در اینجا کامل می شود.  $\square$

### تعریف ۱-۳:

بعد یک فضای خطی عبارت است از عدد اصلی یک پایه هامل برای آن فضا.

### تعریف ۱-۴:

یک فضای خطی  $F$  یک زیر فضای خطی از فضای خطی  $E$  است اگر و فقط اگر  $F$  زیر مجموعه  $E$  باشد و  $E, F$  دارای میدان اسکالر  $K$  باشند و دو عملگر جمع و ضرب اسکالر در  $F$  منطبق با عملگرهای متناظر در  $E$  باشند.

### تعریف ۱-۵:

اگر  $A$  یک زیر مجموعه دلخواه از  $E$  باشد، آنگاه مجموعه همه ترکیبات خطی از اعضای  $A$  یک زیر فضای خطی  $E$  است، که توسیع خطی  $A$  یا زیر فضای تولید شده بوسیله  $A$  نامیده می شود.

### تعریف ۱-۶:

اگر  $A, B$  زیر مجموعه های  $E$  باشند، آنگاه:

$$A + B = \{x + y: x \in A, y \in B\}$$

و اگر  $x$  عنصری دلخواه از  $E$  باشد آنگاه  $\{x\} + A$  را بصورت  $x + A$  نمایش می دهیم و آنرا انتقال  $A$  بوسیله  $x$  می نامیم. اگر  $a$  یک اسکالر باشد آنگاه:

$$aA = \{ax : x \in A\}$$

و A. (-1) را با A- نمایش می دهیم . یک مجموعه به شکل  $x+F$  را که F یک زیر فضای خطی از E است را یک مانیفولد خطی یا یک سطح می نامیم.

### تعریف ۷-۱:

دو زیر فضای خطی  $G, F$  از E را مکمل گوئیم هر گاه هر عنصر E را بتوان فقط و فقط به یک طریق بصورت مجموع یک عنصر F و یک عنصر G نمایش داد.

### تعریف ۸-۱:

فرض کنیم  $F, E$  دو فضای خطی روی یک میدان اسکالر باشند و فرض کنیم که T نگاشتی از E به F باشد. T را خطی گوئیم اگر برای همه  $x, y$  در E و همه اسکالرهایی  $a, b$  داشته باشیم:

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y).$$

یک نگاشت خطی یک به یک و بر و از E به F را یک ایزومورفیسم خطی از E به F گوئیم. یک فانکشنال خطی روی یک فضای خطی E یک تابع خطی با مقادیر در میدان اسکالر است.

## فضاهای توپولوژیکی

در این بخش، توپولوژی برای یک مجموعه  $X$  و مفاهیم در ارتباط با آن که در ادامه بحث مورد نیاز است را مورد تدقیق قرار می دهیم.

یک توپولوژی برای یک مجموعه  $X$  عبارت است از خانواده  $\Omega$  از زیر مجموعه های  $X$  که مجموعه های باز نامیده می شوند و دارای خواص ذیل هستند:

الف)  $\phi$  و  $X$  به  $\Omega$  تعلق دارند.

ب) اجتماع هر تعداد دلخواه از مجموعه های باز، باز است.

ج) اشتراک تعداد متناهی از مجموعه های باز، باز است.

**توجه:**

اگر چند توپولوژی برای  $X$  تعریف شده باشد، آنگاه اعضای  $\Omega$  را بازهای مرتبط با  $\Omega$  یا  $\Omega$ -باز می نامیم و مجموعه  $X$  با توپولوژی  $\Omega$  را با  $(X, \Omega)$  نمایش می دهیم.

### تعریف ۱-۹:

الف)  $A$  زیر مجموعه  $X$  را، بسته گوئیم اگر و فقط اگر  $X-A$  باز باشد.

ب) مقطع همه مجموعه های بسته شامل  $A$  یک مجموعه بسته است که آنرا بستار  $A$  گوئیم و آنرا با  $A^-$  نمایش می دهیم.

پ) یک زیر مجموعه  $B$  از  $A$  را که بستار آن شامل  $A$  است، چگال در  $A$  گوئیم.

ت) اجتماع همه مجموعه های باز مشمول در  $A$  یک مجموعه باز است که درون  $A$  نامیده می شود و آنرا با  $A^i$  یا  $\text{int } A$  نمایش می دهیم.

ث) یک مجموعه  $U$  یک همسایگی  $x$  است اگر و فقط اگر  $x$  درون  $U$  باشد.

ج) سیستم همسایگی های  $X$  عبارت است از خانواده  $V_x$  ها که هر  $V_x$  یک همسایگی از  $x$  است. یک زیر خانواده  $B$  از  $V_x$  ها که هر همسایگی  $x$  شامل یک عنصر  $B$  است، یک پایه برای سیستم همسایگی  $x$  نامیده می شود.

ج) یک فضای توپولوژیکی هاسدورف است اگر برای هر دو عنصر متمایز  $y, x$ ، دو همسایگی مجزای  $V_y, V_x$  بترتیب برای  $y, x$  وجود داشته باشد.

ح) یک فضای توپولوژیکی منظم است اگر برای هر  $x$ ، خانواده همسایگی های بسته  $x$ ، یک پایه برای سیستم همسایگی های  $x$  باشد.

خ) یک فضای توپولوژیکی جدایی پذیر است اگر دارای یک زیر مجموعه چگال شمارش پذیر باشد.

د) یک فضای توپولوژیکی فشرده است اگر دارای خاصیت برل - لیگ باشد، یعنی اینکه هر پوشش از مجموعه های باز دارای یک پوشش متناهی باشد.

### تعریف ۱-۱۰:

اگر  $Y, X$  دو فضای توپولوژیکی باشند، آنگاه  $Y$  زیر فضای توپولوژیکی  $X$  است اگر فقط اگر  $Y$  زیر مجموعه  $X$  باشد و مجموعه های باز در  $Y$ ، مقطع  $Y$  با یک زیر مجموعه باز  $X$  باشند. ب) اگر  $Z$  زیر مجموعه  $X$  باشد، توپولوژی القا شده توسط  $Z$ ، عبارت است از خانواده همه زیر مجموعه های  $U$  از  $Z$  بطوریکه یک زیر مجموعه باز  $V$  از  $X$  موجود باشد و  $U = Z \cap V$  و توجه می کنیم که  $Z$  یک زیر فضای توپولوژیکی  $X$  است.

### تعریف ۱-۱۱:

فرض کنیم که  $(X, \Omega)$  و  $(Y, \Psi)$  دو فضای توپولوژیکی باشند و  $F$  یک نگاشت از  $X$  به  $Y$  باشد،  $F$  را در  $X$  پیوسته گوئیم اگر فقط اگر تصویر معکوس هر  $\Omega$  - همسایگی  $F(x)$  یک  $\Psi$  - همسایگی  $x$  باشد و نگاشت  $F$  را روی  $X$  پیوسته گوئیم اگر و فقط اگر  $F$  در هر نقطه  $x$  متعلق به  $X$  پیوسته باشد. بالاخره نگاشت  $F$  یک همیومورفیسم است اگر و فقط اگر روی  $X$  پیوسته باشد و این نگاشت یک به یک و تصویر معکوس آن یعنی  $F^{-1}$  نیز روی  $F(x)$  پیوسته باشد. تعریفی که در زیر می آید در ادامه بحث مفید و مورد نیاز است:

### تعریف ۱-۱۲:

یک رابطه  $R$  روی یک مجموعه  $A$  مستقیم (DIRECT) است اگر:  
الف)  $R$  روی  $A$  انعکاسی باشد.  
ب)  $R$  روی  $A$  متعدی باشد.  
ج) برای هر  $\beta, \alpha$  متعلق به  $A$  یک عنصر  $\lambda$  متعلق به  $A$  باشد بطوریکه:

$$\square \lambda R \beta \text{ و } \lambda R \alpha$$

### تعریف ۱-۱۳:

یک شبکه عبارت است از یک جفت  $(X, R)$  بطوریکه  $X$  یک تابع باشد و  $R$  روی دامنه  $X$  مستقیم باشد. بطور کلی مجموعه  $\{X_\alpha, \alpha \in A, R\}$  یا بطور ساده  $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$  را یک شبکه گوئیم هر گاه  $X$  یک تابع باشد که دامنه آن شامل  $A$  است و  $R$  روی  $A$  مستقیم است. شبکه  $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$  سرانجام در مجموعه  $B$  است اگر و فقط اگر برای هر  $\alpha$  در  $A$  داشته باشیم:  $x_\beta \in A$  و  $x_\beta R \alpha$ .

یک شبکه در یک فضای توپولوژیکی همگرا به یک نقطه است اگر و فقط اگر شبکه سرانجام در هر همسایگی آن نقطه باشد. و  $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$  همگرا به  $y$  در  $X$  باشد آنگاه آنرا با  $x_\alpha \rightarrow y$  یا  $y = \lim x_\alpha$  نمایش می دهیم. همینطوریک نقطه، نقطه انباشتگی یک شبکه است اگر و فقط اگر آن شبکه سرانجام در متمم هر همسایگی آن نقطه نباشد. هر گاه در شبکه  $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$ ،  $A$  را مجموعه اعداد صحیح مثبت با ترتیب معمولی در نظر بگیریم آنگاه به آن دنباله گوئیم.

### تعریف ۱-۱۴:

یک شبه متریک روی یک مجموعه  $X$  یک تابع نامنفی  $d$  است اگر دارای خواص ذیل باشد:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X: d(x, y) &= d(y, x) & (i) \\ \forall x \in X: d(x, x) &= 0 & (ii) \\ \forall x, y, z \in X: d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) & (iii) \end{aligned}$$

یک متریک روی  $X$  یک شبه متریک  $d$  است بطوریکه اگر  $d(x, y) = 0$  آنگاه  $x = y$ .

### تعریف ۱-۱۵:

یک مجموعه  $X$  با یک شبه متریک (متریک)  $d$  یک فضای شبه متریک (متریک) نامیده می شود. در یک فضای متریک (متریک) یک گوی باز به مرکز  $x$  و به شعاع  $r$  عبارت است از همه  $y$  ها  $d(x, y) < r$ .

همینطوریک گوی باز به مرکز  $x$  و به شعاع  $r$  عبارت است از:

$$\{y: y \in X, d(x, y) \leq r\}$$

هر شبه متریک (متریک)  $d$  روی  $X$  یک توپولوژی را روی  $X$  به گونه زیر بوجود می آورد: