دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

نگاشت‌های خطی حافظ طیف موضعی

استاد راهنما

دکتر شیرین حجازیان

استاد مشاور

دکتر تکتم آقاسی زاده

پژوهشگر

مرضیه فلاح

خرداد ماه ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: فلاح　　　　نام: مرضیه

عنوان: نگاشت‌های خطی حافظ طیف موضعی

استاد راهنما: دکتر شیرین حجازیان
استاد مشاور: دکتر تکتم آقاسی زاده

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: ریاضی محض　　گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: فردوسی مشهد　　　　دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: خرداد ماه ۱۳۹۱　　تعداد صفحات: ۸۲

واژگان کلیدی: طیف موضعی، شعاع طیفی موضعی، شعاع طیفی موضعی داخلی، حافظ های خطی

چکیده

فرض کنیم $\mathcal{B}(X)$ جبر باناخ همه‌ی عملگرهای خطی کرانداررو ی یک فضای باناخ مختلط از بعد نامتناهی باشد. در این پایان نامه نگاشت‌های خطی پوشا و پیوسته روی $\mathcal{B}(X)$ که حافظ مقدارهای طیفی موضعی مختلف در یک بردار ناصفر هستند، را دسته بندی می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

در نظریه‌عملگرها، نگاشت‌های‌حافظ خاصیت‌های مختلف از اهمیت بسیاری برخوردارند. این مسائل تاریخچه‌ی نسبتاً طولانی دارند. اولین نتیجه به سال ۱۸۹۷ برمی‌گردد، هنگامی که فروبنیوس [۱] [۱۷] ساختار نگاشت‌های خطی حافظ دترمینان بین فضاهای ماتریسی را تشریح کرد. برای تقریباً چهل و پنج سال، به جز یکی دو نتیجه از پولیا [۲] [۳۳] و شور [۳] [۳۵] ، هیچ کار قابل توجه یا مستقیمی روی این مسائل انجام نشد.

این موضوع با کارهای موریتا [۴] [۳۰] و [۳۱] و هوا [۵] [۲۱] – [۲۳] و دیودونه [۶] [۱۵] ادامه یافت و از آن به بعد به‌خصوص در سه دهه‌ی اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفت.

یکی از مسائل مهم مطرح شده دراین زمینه مسأله‌ی زیر است که توسط کاپلانسکی [۷] [۲۴] مطرح شد.

آیا نگاشت‌های خطی یکدار حافظ معکوس‌پذیری بین دو جبر باناخ یکدار همریختی جردن هستند؟

واضح است که اگر نگاشتی حافظ معکوس‌پذیری ازدو جهت باشد، حافظ طیف خواهد بود. بنابراین در بسیاری از کارهای انجام شده مسأله‌ی نگاشت‌های حافظ طیف مورد بررسی قرار گرفت و دسته‌بندی های مختلفی از این نگاشتها ارائه شد. مثلاً بورهیم [۸] و رنسفورد [۹] در [۱۰] ثابت کردند تنها نگاشت جمعی روی $\mathcal{B}(X)$ که حافظ همه‌ی طیف های موضعی است، همانی است. همچنین توسیع این نتیجه

[۱] Frobenius
[۲] Polya
[۳] Schur
[۴] Morita
[۵] Hua
[۶] Dieudonne
[۷] Kaplansky
[۸] Bourhim
[۹] Ransford

به دو فضای باناخ متفاوت نیز بررسی شد. این نتیجه راه را برای مسأله‌ی دیگری باز می‌کند؛ یعنی دسته‌بندی نگاشت‌های جمعی یا خطی روی $\mathcal{B}(X)$ که حافظ مقدارهای طیفی موضعی خاصی در یک بردار ناصفر X هستند. یک حدس طبیعی آن است که اگر یک نگاشت خطی φ از $\mathcal{B}(X)$ به‌روی خودش یک مقدار طیفی موضعی را در یک بردار ناصفر ثابت $x_\circ \in X$ حفظ کند، آنگاه یک اسکالر $\alpha \neq \circ$ و یک عملگر معکوس‌پذیر $A \in \mathcal{B}(X)$ وجود دارد به طوری که

$$Ax_\circ = x_\circ \quad , \quad \varphi(T) = \alpha A T A^{-1} \quad (T \in \mathcal{B}(X)) \qquad (1)$$

این حدس در [۵، ۹، ۲۰] هنگامی که $X = \mathbb{C}^n$ یک فضای از بعد متناهی است و در [۱۱] زمانی که φ پیوسته است، در حالت خاص اثبات شده است ولی در حالت کلی هنوز اثباتی برای آن داده نشده است. در [۲۰]، گنزالز[10] و بختا[11] نگاشت‌های خطی روی جبر $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ را که حافظ طیف موضعی بیرونی در یک بردار ناصفر $x_\circ$ از $\mathbb{C}^n$ هستند، دسته‌بندی کردند. بورهیم و میلر[12] در [۹] این نتیجه را به این صورت توسیع دادند.

نگاشت خطی φ روی $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ شعاع طیفی موضعی بیرونی در بردار ناصفر $x_\circ \in \mathbb{C}^n$ را حفظ می‌کند اگر وتنها اگر صورت (۱) را داشته باشد.

در [۵]، نتیجه‌ی مشابهی در حالتی که یک نگاشت خطی روی $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ شعاع طیفی موضعی داخلی در یک بردار ناصفر $x_\circ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ را حفظ می‌کند بدست آمد. همچنین در [۱۱]، هردونتیجه‌ی اصلی از [۹، ۲۰] توسط براکیک[13] و مولر[14] به فضاهای باناخ از بعد نامتناهی توسیع داده شد؛ یعنی نگاشت‌های خطی پوشا و پیوسته روی $\mathcal{B}(X)$ که حافظ طیف موضعی و شعاع طیفی موضعی بیرونی در نقطه‌ی $X \ni x_\circ \neq \circ$ هستند، دسته‌بندی شدند.

مواردی که ذکر شد نمونه‌هایی از مهمترین مقالات ارائه شده در زمینه‌ی نگاشت‌های خطی حافظ طیف

[10] Gonzalez
[11] Mbekhta
[12] Miller
[13] Bracic
[14] Muller

موضعی بود. در این پایان نامه نگاشت‌های خطی پوشا از $\mathcal{B}(X)$ به $\mathcal{B}(Y)$ که حافظ طیف موضعی و شعاع‌های طیفی موضعی هستند را دسته‌بندی می‌کنیم.

عمده مطالب پایان نامه‌ی حاضر از مقاله‌ی

A. Bourhim, *Surjective linear maps preserving local spectra*, Linear Algebra and its Applications 432 (2010) 383–393

استخراج و در ۴ فصل نگاشته شده است.

فصل ۱ به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص یافته است که در سراسر این پایان نامه مورداستفاده قرار خواهد گرفت. در فصل ۲ به تعریف طیف موضعی و انواع شعاع طیفی موضعی و همچنین قضایای مربوط به آنها می‌پردازیم که اساس کار ما در فصل ۳ و ۴ هستند.

در فصل ۳ ابتدا چند لم بنیادین را بیان می‌کنیم که در اکثر قضایای این فصل و فصل ۴ مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین نتایج اصلی این فصل که در مورد نگاشت‌های خطی منقبض کننده و منبسط کننده‌ی طیف موضعی داخلی هستند، را بیان و سپس ثابت می‌کنیم.

در بخش اول فصل ۴ نشان می‌دهیم که نگاشت خطی $\varphi : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$، حافظ طیف موضعی در $0 \neq x_0 \in X$ است اگر و تنها اگر دوسویی $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ موجود باشد به طوری که $Ax_0 = y_0$ و برای هر $T \in \mathcal{B}(X)$، $\varphi(T) = ATA^{-1}$.

بالاخره در بخش دوم فصل ۴ دسته بندی کاملی از نگاشت‌های خطی پوشا روی $\mathcal{B}(X)$ که کراندار طیفی موضعی و از پایین کراندار طیفی موضعی در یک بردار ناصفر در X هستند را ارائه می‌دهیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای پیشنیاز

در این فصل به بیان تعاریف، قضایا و مفاهیم اولیه مورد استفاده در این پایان نامه می‌پردازیم. فرض بر این است که خواننده با فضای باناخ و جبر باناخ و خواص کلی آنها آشنایی دارد. مطالب این فصل اغلب از [۲]، [۱۲]، [۱۳]، [۲۵]، [۲۷]، [۳۴] و [۳۶] استخراج شده‌اند.

۱.۱ فضاهای باناخ و توابع تحلیلی برداری- مقدار

تعریف ۱.۱.۱. اگر X یک فضای باناخ باشد، فضای دوگان X را با X^* نمایش می‌دهیم. برای هر $T \in B(X)$، $T^* : X^* \longrightarrow X^*$ با ضابطه‌ی $T^*(f) = f \circ T$ را الحاق عملگر T گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$، $x \otimes f$ را روی فضای باناخ X، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(x \otimes f)(u) :=< u, f > x = f(u)x \qquad\qquad (u \in X)$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که این عملگر از رتبه‌ی یک است.

اکنون چند تعریف و قضیه مربوط به توابع تحلیلی برداری-مقدار را ارائه می‌دهیم، که برگرفته از مرجع [۲۵] است.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ مختلط باشد و فرض کنیم U یک مجموعه‌ی باز در $\mathbb{C}$ باشد. تابع $f : U \longrightarrow X$ را تحلیلی گوییم اگر برای هر $\varphi \in X^*$، $\varphi \circ f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ تحلیلی باشد.
توابع تحلیلی مشتق پذیر مختلط هستند و در این صورت برای $\lambda \in U$،

$$f^{'}(\lambda) := \lim_{\mu \to \lambda} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu}$$

در X موجود است و آن را مشتق f در λ می‌نامند.

برای $\lambda \in \mathbb{C}$ و $r \geqslant 0$ قرص بسته به شعاع r و مرکز λ را با نماد

$$\nabla(\lambda, r) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\lambda - \mu| \leqslant r\}$$

و قرص باز به شعاع r و مرکز λ را با نماد

$$V(\lambda, r) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\lambda - \mu| < r\}$$

نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۱.۱. *(سری توانی) هر تابع تحلیلی* $f : U \longrightarrow X$ *بی‌نهایت بار مشتق پذیر است و برای هر* $\lambda_\circ \in U$ *و هر* $r > \circ$ *با* $\nabla(\lambda_\circ, r) \subseteq U$*، نمایش زیر را می‌پذیرد*

$$f(\lambda) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(\lambda - \lambda_\circ)^n \qquad (\lambda \in \nabla(\lambda_\circ, r))$$

که در آن $a_n \in X$ *و در واقع برای هر* $n \in \mathbb{N}_\circ$، $a_n = \frac{f^{(n)}(\lambda_\circ)}{n!}$. *علاوه براین نمایش سری توانی* f *به طور مطلق همگرا و روی قرص* $\nabla(\lambda_\circ, r)$*، همگرای یکنواخت است.*

برعکس، برای $a_n \in X \quad (n = \circ, ۱, ۲, ۳, \ldots)$*، سری*

$$f(\lambda) := \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(\lambda - \lambda_\circ)^n$$

برای هر $\lambda \in V(\lambda_\circ, r)$*، همگرا است و تابع تحلیلی* $f : V(\lambda_\circ, r) \longrightarrow X$ *را تعریف می‌کند به طوری‌که* r*، شعاع همگرایی این سری و* $\frac{۱}{r} = \limsup_{n\to\infty} \| a_n \|^{\frac{۱}{n}}$ *می‌باشد.*

۲.۱ طیف و شعاع های طیفی

در سراسر این بخش $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار است. مجموعه‌ی عناصر معکوس پذیر $\mathcal{A}$ را با نماد $Inv(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم. همچنین از این به بعد $\mathbf{1}$، عنصر همانی هر جبر باناخ یکداراست.

تعریف ۱.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد و $a \in \mathcal{A}$، آنگاه طیف $\sigma(a)$ از a را به صورت

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\mathbf{1} - a \notin Inv(\mathcal{A})\}.$$

تعریف می‌کنیم. متمم این مجموعه نسبت به $\mathbb{C}$ را حلال a می‌نامیم و با نماد $\rho(a)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد. برای هر $a \in \mathcal{A}$، شعاع طیفی a را با $r(a)$ نمایش داده و به‌صورت

$$r(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

تعریف می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار روی $\mathbb{C}$ باشد و $a \in \mathcal{A}$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند*

آ) $(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1} \longmapsto \lambda$ *روی* $\sigma(a) \setminus \mathbb{C}$ *تحلیلی است؛*

ب) $\sigma(a)$ *فشرده و ناتهی است؛*

پ) $r(a) = \lim_{n\to\infty} \| a^n \|^{\frac{1}{n}}$.

برهان. [۲، قضیه‌ی ۸.۲.۳] □

قضیه ۴.۲.۱. *اگر b, a عناصری در جبر باناخ $\mathcal{A}$ باشند به طوری‌که $ab = ba$، آنگاه*

$$\sigma(a+b) \subseteq \sigma(a) + \sigma(b) \qquad , \qquad \sigma(ab) \subseteq \sigma(a)\sigma(b),$$

همچنین داریم

$$r(a+b) \leqslant r(a) + r(b) \qquad , \qquad r(ab) \leqslant r(a)r(b).$$

برهان. [۲، قضیه‌ی ۱۰.۲.۳] □

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد. برای هر $a \in \mathcal{A}$ که $\|a\| < 1$، عنصر $\mathbf{1} - a$ معکوس‌پذیر است و*

$$(\mathbf{1} - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k.$$

برهان. [۲، قضیه‌ی ۱.۲.۳] □

تذکر ۶.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. $\mathcal{B}(X)$ جبر باناخ عملگرهای خطی کراندار روی X را نشان می‌هد. می‌دانیم عملگر خطی $T : X \longrightarrow X$ معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر T یک‌به‌یک و پوشا باشد. بنابراین*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{یک به یک و پوشا نیست } T - \lambda\mathbf{1}\}.$$

اگر $T-\lambda\mathbf{1}$ یک به یک نباشد، آنگاه λ، مقدار ویژه‌ی T نامیده می‌شود. متناظر با این مقدار ویژه، $\ker(T-\lambda\mathbf{1})$، فضای ویژه و هر $0 \neq x \in \ker(T-\lambda\mathbf{1})$ یک بردار ویژه از T است که در رابطه‌ی $Tx=\lambda x$، صدق می‌کند.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم $T\in\mathcal{B}(X)$. در این صورت

$$\sigma_p(T) := \{\lambda\in\mathbb{C} : \ker(T-\lambda\mathbf{1}) \neq \{0\}\}$$

را طیف نقطه‌ای T می‌نامیم.

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنیم $T\in\mathcal{B}(X)$ یک عملگر فشرده باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند*

آ) *اگر X از بعد نامتناهی باشد، آنگاه $0\in\sigma(T)$؛*

ب) *اگر $\lambda\neq 0$ و $\lambda\in\sigma(T)$، آنگاه λ یک مقدار ویژه از T و T^* است.*

برهان. [۳۴، قضیه‌ی ۱۸.۴ و ۲۵.۴] □

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم $T\in\mathcal{B}(X)$. در این صورت طیف نقطه‌ای تقریبی T که بانماد $\sigma_{ap}(T)$، نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ی تمام $\lambda\in\mathbb{C}$ هایی است، که دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ موجود است به طوری‌که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\| x_n \| = 1$ و $\| (T-\lambda\mathbf{1})x_n \| \to 0$.

به‌وضوح، $\sigma_p(T)\subseteq\sigma_{ap}(T)$.

گزاره ۱۰.۲.۱. *برای هرعملگر $T\in\mathcal{B}(X)$ و هر $\lambda\in\mathbb{C}$، گزاره‌های زیر معادل هستند*

آ) $\lambda\notin\sigma_{ap}(T)$؛

ب) $\ker(T-\lambda\mathbf{1})=\{0\}$ و $(T-\lambda\mathbf{1})X$ *بسته است؛*

پ) $(T-\lambda\mathbf{1})$ *از پایین کراندار است؛ یعنی ثابت $c>0$ موجود است به طوری‌که برای هر $x\in X$،* $\| (T-\lambda\mathbf{1})x \| \geqslant c \| x \|$.

علاوه براین، $\sigma_{ap}(T)$ یک زیر مجموعه‌ی بسته از $\sigma(T)$ است که شامل $\partial\sigma(T)$ است. به‌خصوص، هنگامی که X غیر بدیهی است، $\sigma_{ap}(T)$ غیر خالی است.

برهان. [۲۵، گزاره‌ی ۳.۲.۱] □

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم $T \in \mathcal{B}(X)$. در این صورت

$$\sigma_{su}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda\mathbf{1})X \neq X\}.$$

را طیف پوشایی T می‌نامیم.

تذکر ۱۲.۲.۱. *با توجه به تعریف $\sigma_P(T)$ و $\sigma_{su}(T)$ و $\sigma(T)$ داریم*

$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_{su}(T).$$

مثال ۱۳.۲.۱. نگاشت T را روی فضای هیلبرت $l^2(\mathbb{Z})$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T(\cdots, a_{-1}, \hat{a}_0, a_1, \cdots) = (\cdots, \hat{a}_{-1}, a_0, a_1, \cdots)$$

که $\hat{}$ موقعیت جمله با اندیس صفر است. به سادگی می‌توان دید

$$T^*(\cdots, a_{-1}, \hat{a}_0, a_1, \cdots) = (\cdots, a_{-1}, a_0, \hat{a}_1, \cdots)$$

در نتیجه $TT^* = T^*T = \mathbf{1}$؛ یعنی T یک عملگر یکانی است. بنابراین

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \tag{1.1}$$

همچنین عملگر T یک به یک و پوشا است بنابراین $0 \notin \sigma(T)$. به‌علاوه T هیچ مقدار ویژه‌ای ندارد. زیرا اگر $\lambda \neq 0$ یک مقدار ویژه باشد، آنگاه x ای ناصفر در $l^2(\mathbb{Z})$ موجود است که $(T - \lambda\mathbf{1})(x) = 0$؛ در نتیجه اگر $x = (\cdots, a_{-1}, \hat{a}_0, a_1, \cdots)$، آنگاه برای هر $j \in \mathbb{Z}$ داریم $a_j = \lambda^{-j}a_0$. لذا سری $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda^{-j}|^2|a_0|^2 < \infty$، واگراست که متناقض با این است که $x \in l^2(\mathbb{Z})$. پس $\sigma_p(T) = \emptyset$. دراین صورت بنا به تذکر ۱۲.۲.۱، $\sigma(T) = \sigma_{su}(T)$. اما هر λ که $|\lambda| = 1$ یک مقدار ویژه‌ی تقریبی‌است.

زیرا اگر $x_n = \frac{۱}{\sqrt{n}}(\cdots, ۰, ۱, \lambda^{-۱}, \lambda^{-۲}, \cdots, \lambda^{۱-n}, ۰, \cdots)$، آنگاه برای هر n، $\|x_n\| = ۱$ و $\|T(x_n) - \lambda x_n\| = \sqrt{\frac{۲}{n}} \to ۰$ و این نشان می‌دهد که

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = ۱\}$$

گزاره ۱۴.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ از بعد بزرگتر از ۱ باشد. اگر $T = x \otimes f$ که $x \in X$ و $f \in X^*$، آنگاه*

آ) $r(T) = | < x, f > |$

ب) $\sigma(T) = \{۰, \lambda\}$، که $\lambda =< x, f >$.

برهان. آ) $(x \otimes f)(y) = f(y)x$ و در نتیجه برای هر $y \in X$، $(x \otimes f)^n(y) = f(y) < x, f >^{n-۱} x$. لذا $\|(x \otimes f)^n(y)\| = |f(y)|| < x, f > |^{n-۱}\|x\|$ و از اینجا $\|(x \otimes f)^n\| = \|f\|| < x, f > |^{n-۱}\|x\|$ و در نتیجه $\|(x \otimes f)^n\|^{\frac{۱}{n}} = \|f\|^{\frac{۱}{n}}| < x, f > |^{\frac{n-۱}{n}}\|x\|^{\frac{۱}{n}}$ و با فرض $n \to \infty$ نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود.

ب) چون T از رتبه‌ی یک است پس T پوشا نیست زیرا $\dim X > ۱$، بنابراین $۰ \in \sigma(T)$. از طرفی بنا به قسمت (آ) $\lambda \neq ۰$ در $\sigma(T)$ موجود است. پس بنا به قسمت (ب) قضیه‌ی ۸.۲.۱، λ یک مقدار ویژه از T است. بنابراین $۰ \neq y \in X$ موجود است که $(x \otimes f - \lambda \mathbf{1})(y) = f(y)x - \lambda y = ۰$؛ در نتیجه $y = \frac{۱}{\lambda}f(y)x$. بنابراین y متعلق به فضای تولید شده توسط x است. اگر $\lambda' \neq \lambda$ و $\lambda' \in \sigma(x \otimes f)$ آنگاه $y' \neq ۰$ ای در X موجود است که $(x \otimes f - \lambda' \mathbf{1})(y') = ۰$؛ در نتیجه y' متعلق به فضای تولید شده توسط x است؛ یعنی فضای ویژه‌ی این دو بردار ویژه‌ی مختلف یکسان است و این متناقض با این است که فضاهای ویژه‌ی دو مقدار ویژه‌ی مختلف مستقل خطی هستند. بنابراین $\lambda = \lambda'$. پس $\sigma(T) = \{۰, \lambda\}$. □

گزاره ۱۵.۲.۱. *برای هر عملگر $T \in \mathcal{B}(X)$، گزاره‌های زیر برقرارند*

آ) $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T^*)$؛

ب) $\sigma_{su}(T^*) = \sigma_{ap}(T)$؛

پ) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

برهان. [۲۵، گزاره‌ی ۱.۳.۱] □

تعریف ۱۶.۲.۱. اگر X یک فضای باناخ مختلط از بعد نامتناهی باشد و $\mathcal{B}(X)$ جبرباناخ عملگرهای کراندار روی X و $\mathcal{K}(X)$، ایده‌آل بسته‌ی همه‌ی عملگرهای فشرده روی X باشد.

$$\mathcal{C}(X) := \frac{\mathcal{B}(X)}{\mathcal{K}(X)}$$

را جبر کالکین روی X می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنیم $\pi : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ نگاشت متعارف خارج قسمت باشد و $T \in \mathcal{B}(X)$. طیف اساسی T که با نماد $\sigma_e(T)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از $\sigma(\pi(T))$؛ یعنی طیف تصویر T در جبر کالکین روی X. همچنین نرم اساسی T به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\parallel T \parallel_e = \parallel \pi(T) \parallel := dist(T, \mathcal{K}(X))$$

شعاع طیفی اساسی T نیز عبارت است از

$$r_e(T) := \lim_{n\to\infty} \parallel T^n \parallel_e^{\frac{1}{n}} = r(\pi(T)).$$

برای جزئیات بیشتر در مورد جبرهای کالکین [۳] را ملاحظه کنید.

۳.۱ ایده‌آل‌ها درجبرهای باناخ

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. در این صورت زیرفضای $\mathcal{I}$ از $\mathcal{A}$ را یک ایده‌آل چپ(ایده‌آل راست) می‌نامیم، هرگاه $\mathcal{A}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ $(\mathcal{I}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I})$. $\mathcal{I}$ را ایده‌آل گوییم هرگاه هم ایده‌آل راست و هم ایده‌آل چپ باشد.

تعریف ۲.۳.۱. ایده‌آل $\mathcal{I}$ از $\mathcal{A}$ را ایده‌آل سره گوییم، هرگاه $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$، یا به طور معادل $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \notin \mathcal{I}$.

تعریف ۳.۳.۱. ایده‌آل سره‌ی چپ (راست) $\mathcal{I}$ از $\mathcal{A}$ را ایده‌آل چپ (راست) بیشین گوییم، هرگاه هیچ ایده‌آل سره‌ی چپ (راست) دیگری در $\mathcal{A}$ شامل $\mathcal{I}$ نباشد. به عبارت دیگر اگر $\mathcal{J}$ ایده‌آلی چپ (راست) در $\mathcal{A}$ باشد به طوری که $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$، آنگاه $\mathcal{J} = \mathcal{I}$ یا $\mathcal{J} = \mathcal{A}$.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های بیشین چپ (یا راست) $\mathcal{A}$ را رادیکال $\mathcal{A}$ نامیم و آن را با $Rad\mathcal{A}$ نمایش می‌دهیم.
اگر $Rad\mathcal{A} = \{0\}$، آنگاه $\mathcal{A}$ را نیم ساده نامیم. تعریف‌های معادل دیگری برای رادیکال یک جبر باناخ وجود دارد. [۶] را ملاحظه کنید.

قضیه ۵.۳.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. دراین صورت $\mathcal{B}(X)$ نیم ساده است.*

برهان. [۲، قضیه‌ی ۴.۱.۳] □

قضیه ۶.۳.۱. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند*

آ) $a \in Rad\mathcal{A}$؛

ب) *ثابت $c > 0$ موجود است به طوری‌که برای هر x موجود در یک همسایگی a،* $r(x) \leqslant c \parallel x - a \parallel$.

برهان. [۲، قضیه‌ی ۱.۳.۵] □

۴.۱ همریختی و یکریختی‌ها روی جبرهای باناخ

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر و $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت φ را همریختی (پاد همریختی) نامیم، هرگاه

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)[\varphi(b)\varphi(a)] \qquad (a, b \in \mathcal{A})$$

توجه کنید که همریختی (پاد همریختی) $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک

آ) تکریختی (پاد تکریختی) نامیده می‌شود، اگر یک به یک باشد.

ب) برویختی (پاد برویختی) نامیده می‌شود، اگر پوشا باشد.

پ) یکریختی (پاد یکریختی) نامیده می‌شود، اگر یک به یک و پوشا باشد.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر و $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت φ را یک همریختی جردن نامیم هرگاه

$$\varphi(ab+ba) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a) \qquad (a, b \in \mathcal{A})$$

یا به طور معادل

$$\varphi(a^{2}) = (\varphi(a))^{2} \qquad (a \in \mathcal{A})$$

همچنین می‌توانیم تکریختی، بروریختی و یکریختی جردن را مانند قبل تعریف کنیم.

۵.۱ چند قضیه‌ی مهم در مبحث نگاشت‌های حافظ معکوس‌پذیری

در این بخش نگاشت‌های حافظ معکوس‌پذیری را تعریف کرده و برخی خواص اساسی آنها را بیان می‌کنیم. اثبات قضایای این بخش در مقاله‌ی [۳۶] موجود است.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر یکدار باشند. در این صورت نگاشت خطی $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را یکدار گوییم هرگاه $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. نگاشت φ را حافظ معکوس‌پذیری گوییم، اگر به ازای هر $a \in Inv(\mathcal{A})$ داشته باشیم $\varphi(a) \in Inv(\mathcal{B})$.

تذکر ۲.۵.۱. *با هر نگاشت خطی حافظ معکوس‌پذیری $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ می‌توان یک نگاشت یکدار ساخت. زیرا در این صورت $\varphi(\mathbf{1})$، معکوس‌پذیر است و لذا $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ با ضابطه‌ی $\psi(a) = \varphi(\mathbf{1})^{-1}\varphi(a)$ یک نگاشت خطی یکدارحافظ معکوس‌پذیری خواهد بود.*

گزاره ۳.۵.۱. *فرض کنیم $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ دو جبر یکدار باشند و نگاشت خطی یکدار $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$، حافظ معکوس‌پذیری باشد. در این صورت به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم*

$$\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a).$$

قضیه ۴.۵.۱. *فرض کنیم Y, X دو فضای باناخ روی میدان $\mathbb{C}$ و $\varphi : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ یک نگاشت خطی یک به یک و پوشا و یکدارباشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند*

آ) *φ حافظ معکوس‌پذیری است؛*

ب) *φ یک یکریختی جردن است؛*

پ) *φ یک یکریختی یا پاد یکریختی است؛*

ت) *یا X با Y یکریخت است و یکریختی $A : X \longrightarrow Y$ موجود است به طوری‌که برای هر $T \in \mathcal{B}(X)$، $\varphi(T) = ATA^{-1}$، یا Y با X^* یکریخت است و یکریختی $B : Y \longrightarrow X^*$ موجود است به طوری‌که برای هر $T \in \mathcal{B}(X)$، $\varphi(T) = B^{-1}T^*B$.*

برهان. [۳۶، قضیه‌ی ۱.۱] □

تعریف ۵.۵.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دوجبر یکدار باشند. در این صورت نگاشت خطی $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را حافظ طیف نامیم، هرگاه به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $\sigma(\varphi(a)) = \sigma(a)$.

توجه کنید که نگاشت خطی $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$، طیف را حفظ می‌کند اگر وتنها اگر معکوس‌پذیری را درهردو جهت حفظ کند. زیرا در این صورت به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، $a - \lambda\mathbf{1}$ معکوس‌پذیر است اگر وتنها اگر $\varphi(a) - \lambda\mathbf{1}$ معکوس‌پذیر باشد و لذا $\sigma(\varphi(a)) = \sigma(a)$.

مثال ۶.۵.۱. فرض کنیم $\varphi : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ با ضابطه‌ی $\varphi(T) = ATA^{-1} \quad (T \in \mathcal{B}(X))$ تعریف شود که $A : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی معکوس‌پذیر است. در این صورت داریم

$$T - \lambda\mathbf{1} = A^{-1}(ATA^{-1} - \lambda\mathbf{1})A;$$

در نتیجه $T - \lambda\mathbf{1}$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $ATA^{-1} - \lambda\mathbf{1}$ معکوس‌پذیر باشد. لذا داریم $\sigma(T) = \sigma(\varphi(T))$؛ یعنی φ حافظ طیف است. همچنین داریم $r(T) = r(\varphi(T))$.

قضیه ۷.۵.۱. *فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر از بعد نامتناهی باشد و $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. دراین صورت گزاره‌های زیر معادل هستند*

آ) *A فشرده است؛*

ب) *برای هر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، $\sigma(T + A) \cap \sigma(T)$ غیر تهی است.*

برهان. [۳۶، قضیه‌ی ۱.۵] □

تعریف ۸.۵.۱. نگاشت خطی $\varphi : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ را کراندار طیفی گوییم، هرگاه ثابت $M > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $T \in \mathcal{B}(X)$، $r(\varphi(T)) \leqslant Mr(T)$. در این صورت گوییم φ، شعاع طیفی را منقبض می‌کند.

نگاشت φ را از پایین کراندارطیفی گوییم، هرگاه ثابت $m > 0$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $T \in \mathcal{B}(X)$، $r(\varphi(T)) \geqslant mr(T)$. در این صورت گوییم φ، شعاع طیفی را منبسط می‌کند

و در حالتی که برای هر $T \in \mathcal{B}(X)$، $r(\varphi(T)) = r(T)$ باشد. نگاشت φ را حافظ شعاع طیفی گوییم.

فصل ۲
طیف موضعی و شمول‌های طیفی

این فصل در ۵ بخش تدوین گردیده است، که طی آن مقدمات وگزاره‌های لازم برای اثبات قضیه‌های فصل۳ و ۴، بیان شده است. البته بعضی ازگزاره‌ها و تعریف‌ها صرفاً برای یادگیری بیشتر نمادهای معرفی شده است. مطالب این فصل، برگرفته از مراجع [۲۵]، [۲۶] و [۲۹] هستند.

در سراسر این فصل X یک فضای باناخ و $\mathcal{B}(X)$ جبر باناخ عملگرهای خطی کراندار روی X است.