إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

مجتمع علوم پایه

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه

کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان:

توابع نوعی و کاربردشان در فضاهای باناخ مرتب

استاد راهنما:

دکتر حمید مظاهری تهرانی

استاد مشاور:

دکتر سید محمد مشتاقیون

پژوهش و نگارش:

حسن حُسنی

شهریور ۱۳۸۶

تقدیم به:

پدر و مادرم،

که همواره دلم را به نور امید زنده نگه داشتند.

تقدیر و تشکر

اول سپاس بیکران خدایی را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست.

سپس ازآقای دکتر حمید مظاهری تهرانی استاد راهنمایم که طی طریق این تحقیق، مرهون راهنمایی‌ها و شکیبایی‌های ایشان است، کمال تشکر وقدردانی را دارم.

ازآقای دکترسید محمد مشتاقیون استاد مشاورم و همچنین از داوران پایان‌نامه‌ام آقایان دکترسید محمد صادق مدرس مصدق و دکتر حمید رضا افشین که زحمت داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند، تشکر می‌کنم.

از آقای دکتر فرید(محمد) مالک قائینی نیز که همواره مشوق من در امر تحصیل بوده‌اند و در طول تحصیلات دانشگاهیم من را راهنمایی نموده‌اند، کمال تشکر را می‌نمایم.

از دوستان عزیز و گرانقدرم که خاطرات خوش و ارزنده‌ای از آنها به یادگار دارم، بسیار ممنونم.

در پایان از تنها سرمایه‌های زندگی‌ام، پدر و مادر عزیزم با تمام وجود قدردانی می‌کنم.

مدیریت تحصیلات تکمیلی	صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامــه تحصیلی آقای: حسن حسنی دانشجوی کارشناسی ارشد رشتــه/گرایش: ریاضی محض

تحت عنوان: توابع نوعی و کاربردشان در فضاهای باناخ مرتب

و تعداد واحد: ۶ واحد درتاریخ ۸۶/۶/۲۱ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۵ به حروف نوزده و نیم

و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	حمید مظاهری تهرانی	
استاد/ استادان مشاور:	سید محمد مشتاقیون	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	سید محمد صادق مدرس مصدق	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	حمید رضا افشین	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)
نام ونام خانوادگی: محمد کاظم توسلی
امضاء:

فهرست

فصل چهارم : توابع نوعی و بهترین تقریب به وسیله مجموعه‌های بالایی

چکیده

در این پایان‌نامه توابع نوعی را در یک رده از فضاهای باناخ مرتب، مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم که این توابع نسبت به مجموعه ویژه‌ای از توابع مقدماتی، محدب محض هستند. همچنین مشخصه‌هایی از مزدوج فنچل—موریا و مزدوج از نوع لائو را برای توابع نوعی به دست می‌آوریم. سپس شرایط لازم و کافی برای نقاط پاراتو مثبت—ضعیف از یک مجموعه بالایی بسته بر حسب جداسازی آنها از نقاط خارجی‌شان را ارائه می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل ضمن معرفی فضاهای باناخ مرتب، مقدماتی از نظریه تقریب و توابع نیم‌پیوسته بالایی و پایینی و مجموعه‌های بالایی و پایینی و قضایای مربوط به آنها را که در این پایان‌نامه به کار می‌رود بیان می‌کنیم. در این پایان‌نامه مفاهیم فضاهای متری، فضاهای نرمدار، فضاهای باناخ و مباحث مربوط به آنها دانسته فرض شده‌اند.

۱.۱ فضاهای باناخ مرتب

تعریف ۱.۱.۱.

فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی است. یک رابطه ترتیبی روی X که آن را معمولاً با $\leq$ نمایش می‌دهیم، رابطه‌ای روی X است که

۱) برای هر $x \in X$، $x \leq x$.

۲) برای هر $x, y \in X$، $(x \leq y,\, y \leq x) \Rightarrow x = y$.

۳) برای هر $x, y, z \in X$، $(x \leq y,\, y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

آنگاه X با رابطه $\leq$ یک مجموعه مرتب می‌نامیم و آن را با $(X, \leq)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱.

فرض کنیم $f : (X, \leq) \longrightarrow (Y, \leq)$ نگاشتی دلخواه است. آنگاه f را صعودی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$،

$$(x \leq y) \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

تعریف ۳.۱.۱.

زیرمجموعه A از مجموعه مرتب $(X, \leq)$ را از بالا کراندار(از پایین کراندار) گوییم هرگاه $x_\circ \in X$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $a \leq x_\circ$ $(a \geq x_\circ)$ و در این حالت

x_0 را یک کران بالای (کران پایین) A می‌نامیم. اگر A هم از بالا کراندار و هم از پایین کراندار باشد گوییم A کراندار است.

تعریف ۴.۱.۱.

فرض کنیم $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب و $A \subseteq X$ است. $x_0 \in X$ را کوچکترین کران بالا (بزرگترین کران پایین) برای A گوییم هرگاه

۱) x_0 یک کران بالا (کران پایین) برای A باشد.

۲) اگر $z \in X$ کران بالا (کران پایین) دیگری برای A باشد آنگاه $z \geq x_0$ ($z \leq x_0$).

در این صورت x_0 را سوپریمم (اینفیمم) A می‌نامیم و آن را با $\sup A$ ($\inf A$) نمایش می‌دهیم.

می‌دانیم که خط اعداد حقیقی با ترتیب معمولی یک مجموعه مرتب است. اکنون برخی نتایج مربوط به سوپریمم و اینفیمم زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

۱) u یک کران بالای زیرمجموعه غیرتهی S در $\mathbb{R}$، سوپریمم S است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک $s \in S$ موجود باشد به طوری که $u - \varepsilon < s$.

۲) u یک کران پایین زیرمجموعه غیرتهی S در $\mathbb{R}$، اینفیمم S است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک $s \in S$ موجود باشد به طوری که $s < u + \varepsilon$.

۳) (اصل کمال) هر زیرمجموعه غیرتهی از $\mathbb{R}$ که از بالا کراندار باشد دارای سوپریمم در $\mathbb{R}$ است.

۴) هر زیرمجموعه غیرتهی از $\mathbb{R}$ که از پایین کراندارباشد دارای اینفیمم در $\mathbb{R}$ است.

۵) فرض کنیم $S_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\}$. آنگاه $\inf S_1 = 0$ و اگر $S \subseteq \mathbb{R}$ غیرتهی و از

پایین کراندار باشد، آنگاه

$$\inf S = -\sup\{-s :\ s \in S\}.$$

۶) فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه غیرتهی از اعداد حقیقی است به طوری که $B \subseteq A$. در این صورت اگر A از بالا کراندار باشد، B نیز از بالا کراندار است و $\sup B \leq \sup A$. همچنین اگر A از پایین کراندار باشد، B نیز از پایین کراندار است و $\inf A \leq \inf B$.

۷) فرض کنیم S یک زیرمجموعه غیرتهی از $\mathbb{R}$ باشد که از بالا کراندار است و $a \in \mathbb{R}$. اگر مجموعه $a + S$ را به صورت $a + S := \{a + s :\ s \in S\}$ تعریف کنیم آنگاه

$$\sup(a + S) = a + \sup S.$$

و اگر S از پایین کراندار باشد آنگاه

$$\inf(a + S) = a + \inf S.$$

۸) فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه غیرتهی از اعداد حقیقی است و فرض کنیم

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

در این صورت، هرگاه A و B از بالا کراندار باشند، آنگاه $A + B$ نیز چنین است و داریم:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

همچنین هرگاه A و B از پایین کراندار باشند، آنگاه $A + B$ نیز چنین است و داریم:

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

۹) فرض کنیم S یک زیرمجموعه غیرتهی از $\mathbb{R}$، که از بالا کراندار و بسته است. آنگاه $\sup S \in S$.

تعریف ۱.۱.۵.

فضای برداری X روی میدان اعداد حقیقی، مجهز به رابطه ترتیبی $\leq$ را یک فضای برداری مرتب گوییم هرگاه

۱) برای هر $x,y,z \in X$، $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$،

۲) برای هر $x,y \in X$ و $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$، $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$.

مثال ۱.۱.۶.

فضای برداری $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. ترتیب روی $\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$(x \leq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i \ , \ \forall i = 1, 2 \ldots, n) \qquad (x,y \in \mathbb{R}^n).$$

در این صورت $(\mathbb{R}^n, \leq)$ یک فضای برداری مرتب است.

تعریف ۱.۱.۷.

فرض کنیم P یک زیرمجموعه ناتهی از یک فضای برداری حقیقی X، با خواص زیر باشد.

۱) $P + P \subseteq P$.

۲) برای هر $\lambda \in \mathbb{R}_+$، $\lambda P \subseteq P$.

۳) $P \cap (-P) = \{0\}$.

آنگاه P را یک مخروط می‌نامیم.

نکته ۱.۱.۸.

۱) فرض کنیم X یک فضای برداری مرتب است. آنگاه $P = \{x \in X : x \geq 0\}$، یک مخروط است.

۲) هر مخروط P در یک فضای برداری حقیقی X یک فضای برداری مرتب تولید

می‌کند یعنی

$$x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in P \qquad (x, y \in X).$$

این ترتیب را ترتیب القا شده به‌وسیله P می‌نامیم. بدیهی است که در این حالت $P = \{x \in X : x \geq \circ\}$. اعضای $P^* = P \setminus \{\circ\} = \{x \in X : x > \circ\}$، را مثبت گوییم و P را مخروط مثبت می‌گوییم. بنابراین برای هر دو عنصر $x, y \in X$، می‌گوییم x بزرگتر از y است و می‌نویسیم $y > x$ اگر $x - y \in P^*$.

مثال ۹.۱.۱.

خط اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری حقیقی با ترتیب معمولی دارای مخروط مثبت $\mathbb{R}_+$ است.

مثال ۱۰.۱.۱.

فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی است. فضای برداری $\mathbb{R}^X$ متشکل از همه توابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ترتیب معمولی دارای مخروط مثبت $\mathbb{R}_+^X = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) \geq \circ \quad \forall x \in X\}$، است.

تعریف ۱۱.۱.۱.

فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ است که با مخروط P مرتب شده است. آنگاه X را یک فضای باناخ مرتب گوییم هرگاه مخروط مثبت آن بسته باشد و نرم فضای باناخ مرتب را یکنواخت گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$،

$$(\circ \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|).$$

و نرم را نیم‌یکنواخت گوییم هرگاه $m \geq \circ$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$،

$$(\circ \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq m\|y\|).$$

و مخروط مثبت از X را نرمال گوییم هرگاه نرم آن نیم‌یکنواخت باشد.

مثال ۱.۱.۱۲.

خط اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یک فضای باناخ مرتب است که دارای نرم $\|x\| = |x|$ و مخروط مثبت نرمال درون ناتهی است. در حقیقت نرم آن یکنواخت است.

مثال ۱.۱.۱۳.

فرض کنیم برای $i = 1, 2, \ldots, n$، $(X_i, \|.\|_{X_i})$ یک فضای باناخ مرتب است و فرض کنیم X_i با مخروط مثبت P_i مرتب شده است. آنگاه حاصلضرب فضاهای باناخ $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ یک فضای باناخ مرتب با نرم $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} \|x^i\|_{X_i}^2)^{\frac{1}{2}}$، و ترتیب مولفه‌ای است که $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in X$ است و مخروط مثبت آن یعنی $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$ نرمال است.

در حالت خاص فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک فضای باناخ مرتب است که دارای مخروط مثبت نرمال و درون ناتهی $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \geq 0 \quad \forall i\}$، است.

مثال ۱.۱.۱۴.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده است. آنگاه $C(X)$، فضای باناخ متشکل از تمام توابع پیوسته حقیقی مقدار تعریف شده روی X، یک فضای باناخ مرتب با ترتیب معمولی توابع است و دارای مخروط مثبت نرمال است که آن را با $C_+(X)$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت نرم $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ یکنواخت است.

تعریف ۱.۱.۱۵.

فرض کنیم X یک فضای برداری مرتب و $K \subseteq X$ یک مخروط مثبت بسته در X است و مخروط K رابطه ترتیبی $\leq$ روی X را القا می‌کند. همچنین فرض کنیم عنصر $\mathbf{1} \in K$ با این ویژگی موجود است که برای هر $x \in X$، $\varepsilon > 0$ موجود است به طوری که برای هر α

که $|\alpha| < \varepsilon$، $\mathbf{1} + \alpha x \in K$. آنگاه تابع $P(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : x \leq \lambda \mathbf{1}\} \qquad (x \in X). \tag{۱.۱.۱}$$

لم ۱۶.۱.۱.

تابع P تعریف شده در رابطه (۱.۱.۱) خوش‌تعریف و حقیقی مقدار است.

اثبات:

چون برای هر $\alpha > 0$ به قدر کافی کوچک، $\mathbf{1} - \alpha x \in K$ نتیجه می‌گیریم که برای هر λ به قدر کافی بزرگ $x \leq \lambda \mathbf{1}$، بنابراین $P(x) < +\infty$. از طرف دیگر اگر $P(x) = -\infty$ آنگاه یک دنباله (λ_k) که $\lambda_k \longrightarrow -\infty$ موجود است به طوری که $x \leq \lambda_k \mathbf{1}$. آنگاه $\frac{x}{|\lambda_k|} - \mathbf{1} \geq 0$. و از آنجایی که $-\mathbf{1} \in (-K)$ است نتیجه می‌گیریم که برای kهای بقدر کافی بزرگ $\frac{x}{|\lambda_k|} - \mathbf{1} \leq 0$. که این غیرممکن است چون K مخروط است. $\square$

اکنون برای هر $x \in X$، تابع

$$\|x\| := \max(P(x), P(-x)). \tag{۲.۱.۱}$$

را در نظر می‌گیریم به آسانی می‌توان دید که تابع $\|.\|$ یک نرم روی X است و چون برای هر $x \in X$، نامساوی $x \leq P(x)\mathbf{1}$ برقرار است نتیجه می‌گیریم که برای هر $x \in X$،

$$x \leq \|x\|\mathbf{1}, \quad -x \leq \|x\|\mathbf{1}.$$

بنابراین گوی $B(x,r)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| \leq r\} = \{y \in X : x - r\mathbf{1} \leq y \leq x + r\mathbf{1}\}.$$

قضیه ۱۷.۱.۱.

فرض کنیم X همانند تعریف ۱۵.۱.۱ و $\|.\|$ نرم تعریف شده در رابطه (۲.۱.۱) است. آنگاه $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ مرتب است.

اثبات:

به مرجع [۲۳] مراجعه شود. □

از این جا به بعد در سراسر این متن $(X, \|.\|)$ فضای باناخ مرتب توصیف شده در قضیه ۱.۱.۱۷ است و به اختصار آن را با X نمایش می‌دهیم، مگر در مواردی که X به نحو دیگری بیان شود. برای هر زیرمجموعه U از X، درون U، بستار U و مرز U را به ترتیب با $intU$ و $\overline{U}$ و bdU نمایش می‌دهیم.

۲.۱ توابع نیم‌پیوسته بالایی و پایینی

در سراسر متن مجموعه اعداد حقیقی گسترش یافته که $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ است را با $\overline{\mathbb{R}}$ نشان می‌دهیم. اکنون توابع نیم‌پیوسته بالایی و پایینی را تعریف کرده و بعضی قضیه‌های آنها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱.

فرض کنیم $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ تابعی دلخواه است. آنگاه تابع f روی X نیم‌پیوسته پایینی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ مجموعه $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ در X باز باشد و f روی X، نیم‌پیوسته بالایی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ مجموعه $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ در X باز باشد.

نکته ۲.۲.۱.

فرض کنیم $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ تابعی دلخواه است. آنگاه

۱) f نیم‌پیوسته بالایی است اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$، مجموعه $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ در X بسته باشد.

۲) f روی X نیم‌پیوسته پایینی است اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$، مجموعه $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ در X بسته باشد.

۳) f نیم‌پیوسته پایینی است اگر و تنها اگر $-f$ نیم‌پیوسته بالایی باشد.

۴) f پیوسته است اگر و تنها اگر هم نیم‌پیوسته پایینی و هم نیم‌پیوسته بالایی باشد.

با توجه به نکته ۱.۲.۲ قسمت (۳) اصولاً کافی است ویژگی‌های توابع نیم‌پیوسته پایینی را بررسی کنیم.

قضیه ۱.۲.۳.

سوپریمم هر گردایه از توابع نیم‌پیوسته پایینی، نیم‌پیوسته پایینی است و اینفیمم هر گردایه از توابع نیم‌پیوسته بالایی، نیم‌پیوسته بالایی است.

اثبات:

فرض کنیم $f = \sup_{i \in I} f_i$ که به ازای هر $i \in I$، f_i تابع نیم‌پیوسته پایینی است. بنابراین به ازای هر $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$،

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in X : f_i(x) > \alpha\}.$$

پس با توجه به این که به ازای هر i، f_i نیم‌پیوسته پایینی است نتیجه می‌شود که به ازای هر $i \in I$ و هر $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$، $\{x \in X : f_i(x) > \alpha\}$ باز است. بنابراین برای هر $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$، اجتماع آنها یعنی $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ نیز باز است. این یعنی f نیم‌پیوسته پایینی است.

برای اثبات اینکه اینفیمم هر گردایه از توابع نیم‌پیوسته بالایی، نیم‌پیوسته بالایی است با توجه به نکته ۱.۲.۲ قسمت (۳) و از اینکه $\inf_{i \in I} f_i = -\sup_{i \in I}(-f_i)$ و قسمت اول قضیه نتیجه به دست می‌آید. □

تعریف ۴.۲.۱.

تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را پیوسته لیپ‌شیتس گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$،

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|.$$

نکته ۵.۲.۱.

هر تابع پیوسته لیپ‌شیتس، پیوسته است.

۳.۱ نظریه تقریب و مجموعه‌های بالایی و پایینی

تعریف ۱.۳.۱.

فرض کنیم U زیرمجموعه ناتهی از X و $x \in X$ است. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$d(x, U) = \inf_{u \in U} \|x - u\|$$

و نقطه $u_\circ \in U$ را یک بهترین تقریب برای $x \in X$ در U گوییم هرگاه

$$\|x - u_\circ\| = d(x, U).$$

تعریف ۲.۳.۱.

فرض کنیم U زیرمجموعه ناتهی از X است. U را در X تقریبی گوییم هرگاه برای هر $x \in X$، حداقل یک بهترین تقریب $u_\circ \in U$ موجود باشد و اگر برای هر $x \in X$، یک بهترین تقریب یکتا در U موجود باشد می‌گوییم U در X چبیشف است.

تعریف ۳.۳.۱.

فرض کنیم U زیرمجموعه ناتهی از X و $x \in X$ است. مجموعه همه بهترین تقریب‌های x در U را با $P_U(x)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$P_U(x) = \{u \in U : \|x - u\| = d(x, U)\}.$$

قضیه ۱.۳.۴.

فرض کنیم U زیرمجموعه ناتهی از X و $x \in X$ است. آنگاه

۱) اگر U بسته و $x \notin U$، آنگاه $P_U(x) \subseteq bdU$.

۲) اگر U بسته باشد آنگاه $P_U(x)$ بسته و کراندار است.

اثبات:

به مرجع [۲۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۳.۵.

زیرمجموعه W از X را پایینی گوییم هرگاه

$$(w \in W, x \leq w) \Rightarrow x \in W.$$

مجموعه‌های تهی و X زیرمجموعه‌های پایینی بدیهی X هستند.

مثال ۱.۳.۶.

فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $W = [-\infty, 0]$. در این صورت W یک زیرمجموعه پایینی از X است.

مثال ۱.۳.۷.

فرض کنیم $x \in X$ و $W = \{y \in X : y \leq x\}$، در این صورت W یک زیرمجموعه پایینی از X است.

به آسانی می‌توان نکته زیر را ثابت کرد.

نکته ۱.۳.۸.

فرض کنیم W یک زیرمجموعه از X است. آنگاه موارد زیر معادلند:

۱) W پایینی است.

۲) هرگاه $w \in W$ و $x \in X$ باشد، آنگاه $\min\{x, w\} \in W$.