دانشگاه حکیم سبزواری
دانشکده ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی

عنوان
مسئله تخصیص درجه دوم

نگارش
الهام فلاح کهنه قوچان

استاد راهنما
دکتر سید ابوالفضل علوی

شهریور ۹۱

دانشگاه حکیم سبزواری
دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مسئله تخصیص درجه دوم

نگارش: الهام فلاح کهنه قوچان

استاد راهنما: دکتر سید ابوالفضل علوی امضاء:

استاد ممتحن داخلی: —— امضاء:

استاد ممتحن خارجی: —— امضاء:

بنام بخشایشگر مهربان

تقدیم به ستارهای درخشان آسمان زندگی ام:

پدر مهربانم

مادر دلسوزم

و همسر عزیزم

و تقدیم به همه آنانی که دوست شان دارم.

چکیده

مسئله تخصیص درجه دو یکی از مسائل ترکیباتی بسیار سخت است که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می گیرد. در ابتدا با مسئله تخصیص درجه دوم آشنا می شویم، سپس به معرفی تاریخچه، کاربردها و روشهای حل این مسئله می پردازیم و در ادامه روش جدیدی را مورد بررسی قرار می دهیم که برای به دست آوردن یک جواب خوب برای QAP، مسئله اصلی را به یک مسئله برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط تبدیل می کند. در انتها نتایج آماری از تحقیقات انجام گرفته درباره مسئله تخصیص درجه دوم آورده شده است.

کلمات کلیدی:
مسئله تخصیص درجه دوم، مسئله برنامه ریزی درجه دوم، برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

۱.۱ مقدمه

مسئله تخصیص درجه دو [1] یکی از جذاب ترین و چالشی ترین مسائل بهینه سازی ترکیبیاتی در هستی است. ما در این پایان نامه مسئله تخصیص درجه دوم را مورد بررسی قرار می دهیم. در ابتدا بحث سر منشا مسئله فراهم آمده، سپس کاربردهای مسئله و مدل های ریاضی آن به صورت رسمی توصیف می شوند، در ادامه روش های حل مسئله و روش های ابتکاری حل آن معرفی شده است.

راه بهینه برای کابل کشی و آماده سازی زیر ساخت های شبکه های کامپیوتری و اینترنتی چیست؟ چه طور می توان برای موقعیت کلینیک ها در یک بیمارستان تصمیم گیری کرد؟ چه ارتباطی بین این دو مسئله می تواند وجود داشته باشد؟ اگر یک نگاه اجمالی به این دو مسئله داشته باشیم می بینیم ظاهرا ارتباطی با هم ندارند اما اگر هر یک از آن دو به دلخواه تصمیم گیری کنند در نهایت متوجه می شویم که کلید هایشان با هم در ارتباط اند و هر دو با یک مسئله چالشی در بهینه سازی ترکیبی مدل بندی شده اند، که این مسئله تحت عنوان مسئله تخصیص درجه دوم شناخته شده است. این مسئله جزء دسته مسائل برنامه ریزی عددصحیح قرار می گیرد. برنامه ریزی عدد صحیح، اصطلاحی عام برای مدل های برنامه ریزی ریاضی با شرط عدد صحیح بودن متغیرهاست. این مدل ها با توجه به خطی یا غیر خطی بودن تابع هدف و محدودیت های موجود در مسائل، به دو گروه کلی برنامه ریزی

---

[1] $Quadratic\,Assignment\,Problem(QAP)$

خطی عدد صحیح و برنامه ریزی غیر خطی عدد صحیح تقسیم می شوند. QAP در گروه مسائل برنامه ریزی غیر خطی عدد صحیح از نوع صفر و یک قرار می گیرد.

۲.۱ تاریخچه

بیشتر از پنج دهه است که دانشمندان، مسئله تخصیص درجه دوم را مورد مطالعه قرار داده اند و کشفیات قابل توجهی را در این زمینه کسب نموده اند. بیشتر دانشمندان ریاضی، متخصصان علم کامپیوتر، تحلیل گران پژوهش عملیاتی و اقتصاددانان از مسئله تخصیص درجه دوم برای مدل بندی انواع مسائل بهینه سازی استفاده می کنند.

در سال ۱۹۵۷ کوپمنز و بکمن [۲] اولین کسانی بودند که QAP را به عنوان یک مدل ریاضی مرتبط با فعالیتهای اقتصادی پیشنهاد دادند. پس از آن QAP درچندین کاربرد عملی ظاهر شد.

استنبرج [۳] درسال ۱۹۶۱ از QAP برای مینیمم کردن تعداد اتصالات بین اجزا در سیم کشی پشت صفحه استفاده کرد. هدف او جا به جایی اجزای پشت صفحه کامپیوتر بود به گونه ای که طول کل سیم های استفاده شده برای اتصال اجزای ترکیبی به حداقل برسد. مینیمم کردن طول کل سیم کشی زمان محاسبه را بهبود می بخشد و هزینه موثر برای تولید را کاهش می دهد. این دلایل از میان دلایل موجود دیگر مسئله را به عنوان پژوهش بزرگی برای متخصصان کامپیوتر، الکترونیک ، مهندسان و تحلیل گران پژوهش عملیاتی تبدیل کرد.

حفلی [۴] در سال های ۱۹۷۲ و ۱۹۸۰ ، QAP را برای مسائل اقتصادی به کاربرد و همچنین در ورزش برای رده بندی یک تیم در یک مسابقه دوره ای از آن استفاده کرد.

فرانسیس [۵] و وایت [۶] در سال ۱۹۷۴ چارچوب تصمیم گیری را برای اختصاص یک امکان جدید توسعه دادند(پست های پلیس، سوپر مارکت ها و مدارس) به این منظور که مجموعه ای از مشتری

[۲] $Koopmans\,and\,Beckmann$

[۳] $Steinberg$

[۴] $Heffley$

[۵] $Francis$

[۶] $White$

های معین را به خدمت بگیرند.

گوفرین [۷] و گراوس [۸] در سال ۱۹۷۶ ، QAP را روی مسائل جدول بندی متمرکز کردند.

پلاتس چک و همکارانش [۹] در سال ۱۹۷۶ نشان دادند که می توان QAP را برای طراحی صفحه کلید ماشین تحریر مورد استفاده قرار داد. مسئله، چیدن کلیدها روی صفحه کلید است به قسمی که میانگین زمان مورد نیاز برای نوشتن متن مینیمم شود و خستگی چشم ها به حداقل برسد.

کراراپ [۱۰] و پرازان [۱۱] در سال ۱۹۷۸ آن را در باستان شناسی به کار بردند. هابرت [۱۲] در سال ۱۹۸۷ در تحلیل های آماری از آن استفاده نمود. فرسبرج و همکارانش [۱۳] در سال ۱۹۹۴ برای تحلیل واکنش های شیمیایی و براسکو [۱۴] و استال [۱۵] در سال ۲۰۰۰ در تحلیل های عددی QAP را به کار گرفتند. نوردلس [۱۶] مسئله طرح امکانات، که کاربردهای پرطرفداری برای QAP دارد، را مطرح ساخت.

دیکی [۱۷] و هاپکینز[۱۸] در سال ۱۹۷۲ ، QAP را برای تخصیص ساختمان ها در فضای دانشکده به کار بردند. در یک فضای باز، ساختمان های جدید بنا می شود، با توجه به این که هر ساختمان کارکرد خاصی دارد(ساختمان اداری، تالار سخنرانی، فروشگاه دانشکده و ...)، هدف مسئله مینیمم سازی مسافت پیاده روی کل برای دانشجویان و کارمندان بین این ساختمان ها می باشد.

متعهد شدن برای طراحی یک بیمارستان کار بسیار دشواری است. در چنین محیطی که زندگی در شرایط سختی جریان دارد، مهم است که تیم طراحی محتاطانه عمل کند تا طرح موجود منفعت

[۷] $Geoffrion$

[۸] $Graves$

[۹] $Pollatschek\ et\ al.$

[۱۰] $Krarup$

[۱۱] $Pruzan$

[۱۲] $Hubert$

[۱۳] $Forsberg\ et\ al.$

[۱۴] $Brusco$

[۱۵] $Stahl$

[۱۶] $Nevertheless$

[۱۷] $Dickey$

[۱۸] $Hopkinz$

بیشتری هم برای بیماران و هم برای پرستاران داشته باشد، تخصیص بهینه ادارات خاص و کلینیک ها در داخل بیمارستان توسط الشفیع [۱۹] در سال ۱۹۹۷ مطرح شد که هدفش مینیمم نمودن مسافت پیموده شده توسط بیماران بین کلینیک ها ست.

باس [۲۰] در سال ۱۹۹۳ در مسائل مربوط به پارک جنگلی ها از QAP بهره جست.

رابک [۲۱] و سیچمن [۲۲] درسال ۲۰۰۳ و میراندا و همکارانش [۲۳] درسال ۲۰۰۵ و دامن [۲۴] و ایل هان [۲۵] در سال ۲۰۰۶ نصب اجزای الکترونیکی را با استفاده از QAP مورد مطالعه قرار دادند.

برای فهم بیشتر و بهتر مسئله می توان به منابع [۱۰], [۲۳], [۳۰], [۳۲], [۳۳], [۳۴] رجوع کرد.

۳.۱ تعاریف

مجموعه محدب:

مجموعه غیر تهی $S \subseteq R^n$ را محدب گویند اگر :

$$\forall x, y \in S\, , \forall \lambda \in [۰, ۱] \;\Rightarrow \lambda x + (۱ - \lambda) y \in S$$

تابع محدب:

فرض کنیم $S \subseteq R^n$ مجموعه ای محدب و غیر تهی باشد و $f : S \longrightarrow R$ در این صورت تابع f را روی مجموعه S، محدب گویند اگر:

$$\forall x, y \in S\, , \forall \lambda \in (۰, ۱) \;\Rightarrow\; f(\lambda x + (۱ - \lambda y)) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda) f(y)$$

تابع f را اکیدا محدب می نامند، اگر نامساوی فوق اکید باشد.

تابع مقعر:

تابع حقیقی f را روی مجموعه محدب و غیرتهی S مقعر گویند اگر $-f$، تابعی محدب روی

[۱۹] $Elshafei$

[۲۰] Bos

[۲۱] $Rabak$

[۲۲] $Sichman$

[۲۳] $Miranda\ et\ al.$

[۲۴] $Duman$

[۲۵] $Ilhan$

مجموعه S باشد.

مینیمم نسبی (مینیمم محلی):

نقطه $x^* \in E$ را نقطه مینیمم نسبی تابع f روی E گویند اگر یک $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in E$ در فاصله حداکثر ε از x^* (یعنی $x \in E$ و $|x - x^*| < \varepsilon$) داشته باشیم $f(x) \geq f(x^*)$. اگر به ازای هر $x \in E$ و $x \neq x^*$ در فاصله حداکثر ε از x^* داشته باشیم $f(x) > f(x^*)$، آن گاه x^* را نقطه مینیمم نسبی اکید f روی E گویند.

مینیمم سراسری :

نقطه $x^* \in E$ را نقطه مینیمم سراسری تابع f روی E گویند اگر به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم $f(x) \geq f(x^*)$. اگر به ازای هر $x \in E$ و$x \neq x^*$، داشته باشیم $f(x) > f(x^*)$، آن گاه x^* را نقطه مینیمم سراسری اکید f روی E گویند.

ماتریس معین مثبت:

ماتریس مربعی Q را معین مثبت گوییم هرگاه:

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow x^T Q x > 0$$

ماتریس نیمه معین مثبت:

ماتریس مربعی Q را نیمه معین مثبت گوییم هرگاه:

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow x^T Q x \geqslant 0$$

ماتریس معین منفی:

ماتریس مربعی Q را معین منفی گوییم هرگاه:

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow x^T Q x < 0$$

ماتریس نیمه معین منفی:

ماتریس مربعی Q را نیمه معین منفی گوییم هرگاه:

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow x^T Q x \leqslant 0$$

اثر یک ماتریس:

مجموع عناصر قطری ماتریس Q را اثر Q نامیده و با $tr(Q)$ نشان می دهیم.

نرم بی نهایت:

نرم بی نهایت ماتریس A، بیشترین مجموع سطری اعضای آن ماتریس از لحاظ قدر مطلق است و با نماد$\|A\|_\infty$ نمایش داده می شود.

جایگشت:

هر آرایش خطی از n شی را یک جایگشت از این n شی می نامیم.

مسئله برنامه ریزی درجه دوم:

یک مسئله برنامه ریزی درجه دوم در حالت کلی به صورت زیر تعریف می شود:

$Min\, f(x) = x^t Q x + cx$

$S.t$

$Ax \geqslant b$

$x \geqslant ۰$

که در آن Q یک ماتریس مربعی $n \times n$، A یک ماتریس $m \times n$،

c و x بردار هایی در R^n و b برداری در R^m است.

مسئله برنامه ریزی درجه دوم محدب:

اگر ماتریس هسیان Q در مسئله برنامه ریزی درجه دوم، نیمه معین مثبت باشد، آن را یک مسئله برنامه ریزی درجه دوم محدب می نامیم.

مسئله برنامه ریزی درجه دوم اکیداً محدب:

اگر ماتریس هسیان Q در مسئله برنامه ریزی درجه دوم، معین مثبت باشد، آن را یک مسئله برنامه ریزی درجه دوم اکیداً محدب می نامیم.

مسئله برنامه ریزی درجه دوم غیر محدب:

اگر ماتریس هسیان Q در مسئله برنامه ریزی درجه دوم، نامعین باشد، آن را یک مسئله برنامه ریزی درجه دوم غیر محدب می نامیم.

عبارت دو خطی:

عبارتی است که نسبت به هر یک از دو متغیرش به طور جدا گانه خطی باشد.

تابع پیچیدگی زمانی: تابعی که بر حسب تعداد داده های مسئله، مدت زمان اجرای مسئله را بر حسب بعد آن به ما می دهد.

مسائل دسته P[۲۶]: مسائلی در ترکیبیات و ریاضیات که برای رسیدن به جواب آن ها می توان الگوریتمی نوشت که تعداد مراحل لازم آن بر حسب n، یک چند جمله ای باشد، این مسائل را مسائل دسته P می نامیم.

مسائل دسته NP[۲۷]: مسائلی که برای آنها الگوریتمی که تعداد مراحل لازم آن بر حسب n باشد پیدا نشده است، ولی اگر یک جواب مسئله را داشته باشیم، تعداد مراحل مورد نیاز برای بررسی اینکه آیا این جواب در شرایط مسئله صدق می کند یک چند جمله ای بر حسب n است، را مسائل دسته NP می نامیم.

مسائل دسته NP**-کامل**[۲۸]: مسائلی در دسته NP هستند که اگر نشان داده شود که یکی از آن ها در دسته P است، می توان ثابت کرد که تمام مسائل NP در واقع P است.

مسائل دسته NP**-دشوار**[۲۹]: مسائلی که لزوماً در دسته NP نیستند، ولی با یک الگوریتم چند جمله ای، قابل تبدیل به مسائل دسته NP-کامل هستند.

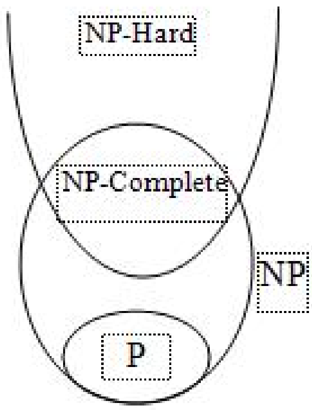
در شکل ۱.۱ نمودار ون برای مجموعه مسائل قسمت بالا آورده شده است. اکثر متخصصان علوم رایانه عقیده دارند که P برابر با NP نیست زیرا پس از دهه ها تلاش، کسی نتوانسته حتی برای یک مسئله NP الگوریتمی چند جمله ای بیابد.

[۲۶] $Polynomial\, Time$

[۲۷] $Non-deterministic\, Polynomial$

[۲۸] $Non-deterministic\, Polynomial\, Complete$

[۲۹] $Non-deterministic\, Polynomial\, Hard$



شکل ۱.۱: نمودار ون

فصل ۲

معرفی مسئله تخصیص درجه دو

۱.۲ مسئله تخصیص درجه اول

قبل از این که مسئله تخصیص درجه دوم (QAP) را به تفصیل معرفی کنیم لازم است در ابتدا توضیح مختصری در مورد مسئله تخصیص درجه اول[۱] ارائه نماییم.

مسئله تخصیص درجه اول (LAP):

اگر فرد i به شغل j اختصاص یابد، هزینه متحمل شده c_{ij} خواهد بود. هدف مینیمم نمودن هزینه واگذاری هر فرد به یک و تنها یک شغل است. در هر جواب شدنی پایه، $x_{ij} = ۱$ یعنی فرد i به شغل j نسبت داده می شود و $x_{ij} = ۰$، دلالت بر این دارد که فرد i به شغل j اختصاص داده نمی شود.

یک مدل ریاضی برای مسئله تخصیص درجه اول به صورت زیر داده می شود:

$Min \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$S.t$

$\sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = ۱, \quad i = ۱, ۲, ..., n$

$\sum_{i=۱}^{n} x_{ij} = ۱, \quad j = ۱, ۲, ..., n$

$x_{ij} \in \{۰, ۱\}, \quad i, j = ۱, ۲, ..., n$

[۱] $Linear\ Assignment\ Problem(LAP)$

۲.۲ مسئله تخصیص درجه دوم(QAP)

این مسئله بیشتر روی ترکیب کلی مسئله تخصیص درجه اول متمرکز شده است. در بیشتر مسائل مکان یابی هزینه ای که به جایگیری یک امکان در یک موقعیت مشخص اختصاص می یابد تنها به فاصله از امکان ها و تقاضاهای دیگر بستگی ندارد بلکه به تاثیرات متقابل امکان های دیگر نیز بستگی دارد. کوپمنز و بکمن درسال ۱۹۵۷ اولین کسانی بودند که برای واگذاری n امکان به n موقعیت یک مدل ریاضی ارائه نمودند. مدلی که اکنون تحت عنوان مسئله تخصیص درجه دوم می شناسیم به صورت زیر است:

یک مجموعه $N = \{1, 2, ..., n\}$ و اعداد حقیقی a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} برای $k = 1, 2, ..., n$ داده شده است، یک جایگشت φ ازمجموعه N را پیدا می کنیم که:

$Min\ Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{\varphi(i),\varphi(k)} + \sum_{i=1}^{n} c_{i,\varphi(i)}$

اعداد حقیقی d_{ijkl} که $i, j, k, l \in N$ داده شده است به طوری که:

$d_{ijkl} = a_{ik} b_{jl}\ , \quad i, j, k, l = 1, 2, ..., n; \qquad i \neq k\ \ or\ \ j \neq l$

$d_{ijij} = a_{ii} b_{jj} + c_{ij}\ , \qquad i, j = 1, 2, ..., n$

حال یک جایگشت $\varphi : N \to N$ پیدا می کنیم که

$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{i,\varphi(i),k,\varphi(k)}$

را مینیمم کند.

در بخش های بعد، مسئله را برای حالت کلی تر QAP توسعه می دهیم.

۳.۲ کاربردها

به عنوان یک مثال گویای اولیه، مدلی برای تخصیص ساختمان ها در فضای باز دانشکده ارائه می دهیم.

در یک فضای باز، ساختمان های جدید بنا می شود این ساختمان ها باید در مکان هایی قرار گیرند

که مسافت پیاده روی کل برای دانشجویان و کارمندان مینیمم شود. فرض کنید ما n مکان موجود و n ساختمان برای اختصاص داشته باشیم، هر ساختمان کارکرد خاصی دارد، برای مثال یکی از آن ها ممکن است به عنوان تالار سخنرانی مورد استفاده قرار گیرد و دیگری ساختمان اداری را تشکیل دهد، یکی فروشگاه دانشکده و دیگری خوابگاه شبانه روزی باشد.

فرض کنید a_{ik} مسافت پیاده روی بین دو مکان i و k باشد و فرض کنید b_{jl} تعداد افرادی باشند که در هر هفته بین ساختمان های j و l رفت و آمد می کنند. مسئله، تخصیص ساختمان ها به جایگاه ها است به گونه ای که مسافت پیاده روی مینیمم شود. هر تخصیص به صورت ریاضی می تواند به عنوان یک جایگشت φ با مجموعه اندیس های $N = \{۱, ۲, ..., n\}$ معرفی شود.

حاصلضرب $a_{ik}b_{\varphi(i),\varphi(k)}$ مسافت پیاده روی هفتگی افرادی را نشان می دهد که بین ساختمان های $j = \varphi(i)$ و$l = \varphi(k)$ در رفت و آمدند. اگر مسئله، مینیمم نمودن مسافت پیاده روی کل باشد داریم:

$Min\ Z = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{\varphi(i),\varphi(k)}$

برای درک بهتر مسئله، مثال عددی کوچکی را ارائه می نماییم:

مثال ۱.۲: می خواهیم ۴ ساختمان A, B, C, D را به ۴ مکان a, b, c, d اختصاص دهیم. فاصله های بین ۴ مکان با ماتریس مسافت زیر نشان داده شده است (فاصله ها بر حسب متر است.):

$$A = \{a_{ik}\} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۳۴۰ & ۳۲۰ & ۴۰۰ \\ ۳۴۰ & ۰ & ۳۶۰ & ۲۰۰ \\ ۳۲۰ & ۳۶۰ & ۰ & ۱۸۰ \\ ۴۰۰ & ۲۰۰ & ۱۸۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

ساختمان A سالن کنفرانس، ساختمان B ادارات گروه، ساختمان C فروشگاه دانشکده و ساختمان D خوابگاه های شبانه روزی است.

رابطه بین این ساختمان ها با ماتریس اتصال b_{jl} نشان داده می شود که b_{jl} معیاری برای تعداد اشخاص و تکرار رفت و آمد آن ها از ساختمان j به ساختمان l است.