بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

گرایش آنالیز

نحوه‌ی ساختن قاب‌های هم‌زاویه از روی گراف‌ها

استاد راهنما :

دکتر محمد علی دهقان

اساتید مشاور :

دکتر احمد صفاپور

دکتر حمیدرضا افشین

دانشجو :

سیده عاطفه دانشمند

اسفند ۱۳۸۹

به نام آن که یادش آرامش دل‌هاست

سپاس **ایزد منان** که به من این فرصت را داد تا به این مرحله از علم رسیده و از هیچ محبتی دریغ نکرد و در تمام مراحل زندگیم مرا قوت قلب بود. به امید آنکه توفیق یابم جز برای خدمت به خلق او نکوشم.

سپاس بی‌پایان تقدیم به
همه‌ی عزیزانی که از گذشته تا کنون، مرا در راه رسیدن به اهدافم یاری نموده‌اند.

نمی‌توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری سازم و سپاس خود را در وصف استاد راهنمایم **جناب آقای دکتر دهقان** آشکار نمایم، که هر چه گویم و سرایم، کم گفته‌ام.

از اساتید مشاورم **جناب آقای دکتر افشین** و **جناب آقای دکتر صفاپور** که در طول دوره‌ی تحقیق مرا یاری کردند صمیمانه تشکر می‌کنم.

از **جناب آقای دکتر آرمندنژاد** و **جناب آقای دکتر عسکری‌همت** (از دانشگاه شهید باهنر کرمان) که زحمت داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند، تشکر می‌کنم.

سپاس **پدر و مادرم** را که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی‌ام بوده‌اند دستم را گرفتند و راه‌رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب به من آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند. تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم را مدیون حضور سبز آن‌ها هستم.

تقدیم به :

اسطوره‌های زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم

پدر و مادر عزیزم

چکیده

در این پایان‌نامه جزئیات تناظر یک به یک بین قاب‌های هم‌زاویه‌ی از n بردار برای $\mathbb{R}^d$ و گراف‌های با n رأس بیان می‌شوند. به‌علاوه تناظر یک به یک بین قاب هم‌زاویه و ماتریس نشان را بیان کرده و ثابت می‌شود اگر قاب هم‌زاویه چسبان باشد آن‌گاه شرایط هم‌زاویه بودن به یک سیستم از معادلات درجه دوم کاهش می‌یابد و این معادلات را در بعضی موارد حل می‌کنیم. در این پایان‌نامه حالت خاص قاب‌های هم‌زاویه‌ی حقیقی را بیان کرده و خاطر نشان می‌شود که در این حالت درایه‌های ماتریس نشان ± ۱ هستند و این ماتریس نشان را به عنوان ماتریس سیدل از یک گراف در نظر می‌گیریم. در ادامه ساختار قاب مرسدس- بنز (مثال شناخته شده از یک قاب چسبان روی صفحه) به فضای $\mathbb{R}^n$ تعمیم داده می‌شود. هم‌چنین شرایط وجود برای سیستم‌های مرسدس- بنز و دیگر قاب‌های چسبان هم‌زاویه بحث می‌شود.

پیش گفتار

مفهوم قاب برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین[۱] و شیفر[۲][۴] مطرح شد. بعد از آن برای مدت طولانی به آن توجهی نشد تا این‌که در اواخر قرن بیستم، بسیاری از متخصصین رشته‌های مختلف علوم و مهندسی به اهمیت و کاربرد قاب‌ها در مباحث نظری و کاربردی پی بردند و مطالعات وسیعی روی نظریه‌ی قاب و کاربردهای آن انجام شد. این مفهوم در سال ۱۹۸۵ و با شروع دوره نظریه موجک توسط دوبشی[۳]، میر[۴] و گراسمان[۵] [۳] گسترش پیدا کرد. آن‌ها مشاهده کردند که می‌توان از قاب‌ها برای پیدا کردن بسط سری توابع در $\ell^2(\mathbb{R})$ استفاده کرد. بعد از آن قاب‌ها در موارد بسیاری از جمله پردازش سیگنال، پردازش تصویر و نظریه‌ی نمونه‌گیری مورد استفاده قرار گرفتند.

یکی از انواع مهم قاب‌ها، قاب‌های چسبان هم‌زاویه هستند که کاربردهای مهمی در پردازش اطلاعات [۱،۶،۷] و نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی [۱۰،۱۱] ایفا می‌کنند. مسأله‌ی وجود قاب‌های چسبان هم‌زاویه‌ی حقیقی با وجود یک نوع معین از ماتریس به نام ماتریس سیدل[۶] یا ماتریس نشان [۷] که دارای دو مقدار ویژه می‌باشند، معادل است.

ماتریس سیدل از یک گراف G با n رأس، یک ماتریس متقارن $n \times n$ با درایه‌های قطری صفر و درایه‌های غیر قطر ± 1 است. که -1 نشان دهنده‌ی مجاور بودن دو رأس و $+1$ نشان دهنده‌ی مجاور نبودن دو رأس است.

در این پایان‌نامه به تناظر یک به یک بین قاب‌های هم‌زاویه و ماتریس نشان آن‌ها توجه می‌کنیم. در حالت حقیقی، ماتریس نشان را می‌توان به عنوان ماتریس سیدل از یک گراف در نظر گرفت. هم‌چنین نشان داده می‌شود وجود قاب‌های چسبان هم‌زاویه‌ی حقیقی معادل با وجود گراف‌های به‌طور قوی منتظم است. ساختار این پایان‌نامه به صورت زیر است:

فصل اول شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول مفاهیم مورد استفاده مربوط به فضای هیلبرت، تعاریف و قضایایی از جبر خطی و آنالیز ماتریس‌ها و نظریه‌ی گراف آورده شده

---

[۱] R. J. Duffin
[۲] A. C. Schaeffer
[۳] I. Daubencheis
[۴] Y. Meyer
[۵] A. Grossman
[۶] Seidel matrix
[۷] Signature matrix

است. در بخش دوم به معرفی قاب‌ها پرداخته‌ایم و سپس قضایایی از قاب‌ها که در فصل‌های بعد مورد نیاز می‌باشند، را بیان کرده‌ایم.

در فصل دوم بعضی روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی قاب‌ها را بیان کرده و ارتباط بین آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

فصل سوم در دو بخش تنظیم شده است. در بخش اول قاب هم‌زاویه و ماتریس نشان را تعریف کرده و نشان می‌دهیم ماتریس‌های نشان در تناظر یک به یک با قاب‌های چسبان هم‌زاویه هستند. در بخش دوم ماتریس سیدل گراف را معرفی کرده و سپس ارتباط قاب‌های هم‌زاویه‌ی حقیقی و گراف‌ها را بیان می‌کنیم.

فصل چهارم در دو بخش ارائه شده است. در بخش اول گراف‌های به‌طور قوی منتظم را تعریف کرده و مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت نظیر این گراف‌ها را بدست می‌آوریم. در بخش دوم وجود و ساختار قاب‌های چسبان هم‌زاویه‌ی حقیقی را بر اساس این گراف‌ها با پارامترهای خاص بیان می‌کنیم. هم‌چنین تناظر یک به یک بین قاب‌های چسبان هم‌زاویه از $n = d + ۱$ بردار در $\mathbb{R}^d$ با رده‌ی کلیدی گراف k_n را نشان می‌دهیم.

بالاخره به فصل پنجم که فصل آخر این پایان‌نامه است می‌رسیم. این فصل شامل دو بخش است، در بخش اول قاب مرسدس- بنز را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که برای $m > n + ۱$ هیچ سیستم مرسدس-بنزی وجود ندارد. در بخش دوم سیستم هم‌زاویه را معرفی کرده و چند شرط لازم برای وجود یک سیستم از بردارهای هم‌زاویه را بیان می‌کنیم.

مندرجات این پایان‌نامه عمدتاً مبتنی بر مقاله‌های [۹] و [۱۲] می‌باشد که مقاله‌های اصلی در تهیه این پایان‌نامه بوده‌اند.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه‌ای بر قاب‌ها

در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی که در این پایان‌نامه مورد نیاز می‌باشند را ذکر می‌کنیم. منظور از $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط، $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح، $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی است. هم‌چنین منظور از M_n مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های مربعی $n \times n$ با درایه‌های مختلط می‌باشد.
تعاریف و قضایای این فصل برگرفته از کتاب‌های آنالیز ماتریس هورن [۸] و نظریه‌ی قاب کریستینسن [۲] و نظریه‌ی گراف ویلسون [۱۳] می‌باشند.

۱.۱ پیش‌نیازها

تعریف ۱.۱.۱ ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط H، نگاشتی مانند $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ است که دارای خواص زیر می‌باشد

۱) به ازای هر $x \in H$، $\langle x,x \rangle \geq 0$ و $\langle x,x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۲) به ازای هر $x,y \in H$، $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$.

۳) به ازای هر $x,y,z \in H$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$.

تعریف ۲.۱.۱ به فضای برداری مجهز به ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ در یک فضای ضرب داخلی H طول بردار $x \in H$ را به‌صورت $\|x\|^2 = \langle x,x \rangle$ تعریف می‌کنیم و به آن نرم القا شده توسط ضرب داخلی می‌گوییم .

تعریف ۴.۱.۱ هر فضای ضرب داخلی که تحت متر تولید شده توسط ضرب داخلی، یعنی

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle},$$

کامل باشد را یک فضای هیلبرت [۱] گوییم. کامل بودن به این معنی است که هر دنباله کوشی در آن فضا همگراست.

تعریف ۵.۱.۱ فضای H را جدایی‌پذیر گوییم هرگاه شامل یک زیر مجموعه‌ی شمارش پذیر چگال باشد.

قضیه ۶.۱.۱ فضای هیلبرت H دارای پایه متعامد یکه شمارا است اگر و تنها اگر H جدایی پذیر باشد.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید $(a_i)_{i=۱}^{k}$ و $(b_i)_{i=۱}^{k}$ دو دنباله در فضای هیلبرت مختلط k- بعدی $\mathbb{C}^k$ باشند. ضرب داخلی دو دنباله به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle (a_i)_{i=۱}^{k}, (b_i)_{i=۱}^{k}\rangle = \sum_{i=۱}^{k} a_i \bar{b_i}.$$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. عملگر $A^* : H \to H$ عملگر الحاقی A است اگر و تنها اگر برای هر $x \in H$ داشته باشیم

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle.$$

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. عملگر خطی و کراندار $U : H \to H$ را یکانی [۲] گوییم هرگاه برای هر $x, y \in H$ داشته باشیم

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$$

عملگر یکانی دارای دو خاصیت زیر است:

۱) $\|U\| = ۱$

۲) $UU^* = U^*U = I$.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت بوده و T و S دو عملگر خطی روی H باشند . آن‌گاه

---

[۱] Hilbert space

[۲] Unitary

۱) اگر $T = T^*$ آن‌گاه عملگر T خودالحاق [1] نامیده می‌شود.

۲) اگر برای هر $x \in H$ ، $\langle Tx, x\rangle > 0$ آن‌گاه عملگر T مثبت نامیده می‌شود.

۳) اگر $T - S > 0$ گوییم $T > S$.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. عملگر کراندار $T : H \to H$ را نامنفی گوییم هرگاه برای هر $x \in H$،

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0$$

قضیه ۱۲.۱.۱ فرض کنید $U : H \to H$ یک عملگر کراندار و نامنفی باشد. آن‌گاه یک عملگر منحصربه‌فرد کراندار و نامنفی مانند W وجود دارد به‌طوری‌که $W^2 = U$. به‌علاوه چون U خودالحاق است درنتیجه W نیز خودالحاق است. هم‌چنین اگر U معکوس‌پذیر باشد آن‌گاه W هم معکوس‌پذیر است.

تعریف ۱۳.۱.۱ ماتریس مربعی $A = [a_{ij}] \in M_n$ هرمیتی [2] است اگر $A = A^*$ که $A^* = \bar{A}^t$.

تعریف ۱۴.۱.۱ ماتریس مربعی $A = [a_{ij}] \in M_n$ متقارن است اگر $A = A^T$.

تعریف ۱۵.۱.۱ مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را طیف [3] A نامیده و با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۱.۱ چندجمله‌ای مینیمال ماتریس مربعی A یک چندجمله‌ای تکین $p(x)$ از کمترین درجه است به‌طوری‌که $p(A) = 0$.

قضیه ۱۷.۱.۱ فرض کنید A یک ماتریس حقیقی و متقارن باشد. اگر u و v بردارهای ویژه‌ی نظیر مقادیر ویژه‌ی متمایز A باشند آن‌گاه u و v بر هم عمودند.

قضیه ۱۸.۱.۱ اگر ماتریس $A \in M_n$ هرمیتی باشد آن‌گاه همه‌ی مقادیر ویژه‌ی A حقیقی هستند.

قضیه ۱۹.۱.۱ (تجزیه طیفی برای برای ماتریس‌های هرمیتی) فرض کنید $A \in M_n$. A هرمیتی است اگر و تنها اگر یک ماتریس یکانی $U \in M_n$ و یک ماتریس قطری حقیقی $\Lambda \in M_n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

---

[1] Self adjoint

[2] Hermitain

[3] Spectrum

$$A = U\Lambda U^*.$$

قضیه ۲۰.۱.۱ فرض کنید $A \in M_n$ یک ماتریس هرمیتی باشد هم‌چنین λ_1، $\cdots$ ، λ_n مقادیر ویژه‌ی A بوده و در رابطه‌ی زیر صدق کنند

$$\lambda_{min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n = \lambda_{max}$$

آن‌گاه برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داریم،

$$\lambda_1 x^* x \leq x^* A x \leq \lambda_n x^* x.$$

تعریف ۲۱.۱.۱ ماتریس $P \in M_n$ را یک ماتریس تصویر[1] گوییم هرگاه $P^2 = P$.

تعریف ۲۲.۱.۱ ماتریس تصویر P را یک ماتریس تصویر متعامد[2] گوییم هرگاه $P^* = P$.

تعریف ۲۳.۱.۱ دو ماتریس $A, B \in M_n$ را متشابه گوییم هرگاه یک ماتریس معکوس‌پذیر مانند $S \in M_n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$B = S^{-1} A S.$$

قضیه ۲۴.۱.۱ فرض کنید $A, B \in M_n$. اگر A و B متشابه باشند. آن‌گاه مقادیر ویژه‌ی آن‌ها مساوی هستند.

قضیه ۲۵.۱.۱ اگر λ_1، $\cdots$، λ_n مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A \in M_n$ باشد آن‌گاه

$$trace(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

و

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

تعریف ۲۶.۱.۱ ماتریس $A \in M_n$ را نیم معین مثبت گوییم هرگاه برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم،

$$x^* A x \geq 0$$

قضیه ۲۷.۱.۱ مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های نیم معین مثبت نامنفی هستند.

---

[1] Projection

[2] Orthogonal projection

تعریف ۲۸.۱.۱ گراف G یک دوتایی مرتب $(V(G), E(G))$ است که در آن $V(G)$ یک مجموعه‌ی متناهی ناتهی است که عناصر آن را رأس می‌نامند و $E(G)$ یک مجموعه‌ی متناهی از زوج های نامرتب از عناصر $V(G)$ موسوم به یال هاست. $V(G)$ را مجموعه‌ی رأس و $E(G)$ را مجموعه‌ی یال می‌نامند.

تعریف ۲۹.۱.۱ در گراف G دو رأس w, v را مجاور می‌گویند، هرگاه یک یال بین آن دو وجود داشته باشد.

تعریف ۳۰.۱.۱ تعداد یال‌هایی که از یک رأس می‌گذرند را درجه‌ی آن رأس می‌گویند.

تعریف ۳۱.۱.۱ گرافی که هر دو رأس آن توسط یک یال با هم مجاور باشند گراف کامل نامیده می‌شود. گراف کامل با n رأس را با k_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۲.۱.۱ گرافی که مجموعه‌ی یال آن تهی است گراف تهی نامیده می‌شود. گراف تهی با n رأس را با k_n^c نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۳.۱.۱ گرافی که درجه‌ی تمام رئوس آن با هم برابر باشد، یک گراف منتظم نامیده می‌شود. اگر درجه‌ی هر رأس k باشد، گراف را k- منتظم می‌نامند.

تعریف ۳۴.۱.۱ گراف بدون طوقه که هیچ یال تکراری ندارد را گراف ساده گوییم.

تعریف ۳۵.۱.۱ اگر G گرافی ساده با مجموعه‌ی رئوس $\{۱, ۲.\cdots, n\}$ باشد، ماتریس مجاورت A یک ماتریس $n \times n$ است که درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر و درایه ij- ام برابر یک است اگر رئوس i ام و j ام مجاور باشند و در غیر این‌صورت صفر است.

۲.۱ قاب‌ها و ویژگی‌های آن

در این بخش به برخی از خواص اولیه قاب‌ها در یک فضای هیلبرت با بعد متناهی اشاره می‌کنیم.

توجه شود در سراسر این بخش مجموعه‌ی اندیس‌گذار J را شمارا فرض کرده و چنانچه متناهی باشد ذکر می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و J یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار شمارا باشد. دنباله $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H است، اگر ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $f \in H$،

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in J} |\langle f, f_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

اعداد مثبت A و B را به ترتیب کران پایین و بالای قاب می‌نامیم. همچنین به ماکسیمم Aها کران پایین بهینه و به مینیمم Bها کران بالای بهینه گفته می‌شود.

نتیجه ۲.۲.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت حقیقی یا مختلط با بعد متناهی d و J یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار متناهی باشد. دنباله‌ی متناهی $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ از $n \geq d$ بردار یک قاب برای H است، اگر این دنباله H را تولید کند.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت با بعد متناهی و J یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار متناهی بوده و $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H باشد. دنباله $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب چسبان برای H است، اگر ثابت $c > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $f \in H$،

$$f = c\sum_{j\in J}\langle f, f_j\rangle f_j.$$

ثابت c در بالا یکتاست و به صورت زیر به‌دست می‌آید.

فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{d}$ یک پایه متعامد یکه برای H باشد برای هر $f \in H$ داریم،

$$f = \sum_{i=1}^{d}\langle f, e_i\rangle e_i$$

چون $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H است. پس برای هر $f_j \in \Phi$ داریم،

$$f_j = \sum_{i=1}^{d}\langle f_j, e_i\rangle e_i.$$

پس خواهیم داشت

$$\|f_j\|^۲ = \sum_{i=۱}^{d} |\langle f_j, e_i\rangle|^۲,$$

و با توجه به این‌که J یک مجموعه اندیس‌گذار متناهی است داریم،

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J} \|f_j\|^۲ &= \sum_{j\in J}\sum_{i=۱}^{d} |\langle f_j, e_i\rangle|^۲ \\ &= \sum_{i=۱}^{d}\sum_{j\in J} |\langle f_j, e_i\rangle|^۲\end{aligned}$$

از طرفی $c\sum_{j\in J} |\langle f_j, e_i\rangle|^۲ = \|e_i\|^۲$، بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J} \|f_j\|^۲ &= \sum_{i=۱}^{d} \frac{\|e_i\|^۲}{c} \\ &= \frac{۱}{c}\sum_{i=۱}^{d} \|e_i\|^۲ \\ &= \frac{d}{c}\end{aligned}$$

در نتیجه داریم،

$$c = \frac{d}{\sum_{j\in J} \|f_j\|^۲}.$$

تعریف ۴.۲.۱ اگر در تعریف قبل $c = ۱$ باشد. آن‌گاه قاب را قاب چسبان یکه یا پارسوال می‌نامیم.

لم ۵.۲.۱ فرض کنید $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک دنباله در H و $\sum_{j\in J} a_j f_j$ برای هر $\{a_j\}_{j\in J} \in \ell_۲(J)$، همگرا باشد. آن‌گاه

$$\begin{aligned}&V_\Phi : \ell_۲(J) \to H \\ &V_\Phi(\{a_j\}_{j\in J}) := \sum_{j\in J} a_j f_j,\end{aligned}$$

یک عملگر خطی و کران‌دار تعریف می‌کند. عملگر الحاقی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&V_\Phi^* : H \to \ell_۲(J) \\ &V_\Phi^*(f) = \{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in J}.\end{aligned}$$

تعریف ۶.۲.۱ به عملگر V_Φ در لم فوق عملگر ترکیب و به V_Φ^* عملگر تجزیه گوییم.

تعریف ۷.۲.۱ اگر $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H باشد عملگر قاب را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S : H \to H$$
$$Sf := V_\Phi V_\Phi^* = \sum_{j\in J} \langle f, f_j\rangle f_j.$$

که در آن V_Φ عملگر ترکیب یا پیش‌قاب و V_Φ^* عملگر تجزیه است.

لم ۸.۲.۱ فرض کنید $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H با عملگر قاب S و کران‌های قاب A و B باشد. آن‌گاه روابط زیر برقرارند:

۱) S عملگری کران‌دار، معکوس‌پذیر، خودالحاق و مثبت است.

۲) $\tilde{\Phi} = \{S^{-1} f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H با کران‌های قاب B^{-1} و A^{-1} است. عملگر قاب برای $\tilde{\Phi}$، S^{-1} است. اگر A و B کران‌های بهینه Φ باشند، آن‌گاه B^{-1} و A^{-1} کران‌های بهینه برای $\tilde{\Phi}$ می‌باشند.

قضیه ۹.۲.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت با بعد متناهی و J یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار متناهی بوده و $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H باشد. آن‌گاه کران بالای بهینه بیشترین مقدار ویژه‌ی S و کران پایین بهینه کمترین مقدار ویژه‌ی S می‌باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱ ماتریس گرام یک دنباله از n بردار $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$، یک ماتریس $n \times n$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Gram(\Phi) := V_\Phi^* V_\Phi = [\langle f_k, f_j\rangle]_{j,k\in J}.$$

تعریف ۱۱.۲.۱ اگر $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H باشد آن‌گاه $\tilde{\Phi} = \{S^{-1} f_j\}_{j\in J}$ قاب دوگان استاندارد برای Φ نامیده می‌شود.

قضیه ۱۲.۲.۱ فرض کنید $\{f_j\}_{j\in J}$ قابی با عملگر قاب S باشد. آن‌گاه به ازای هر $f \in H$،

$$f = \sum_{j\in J} \langle f, S^{-1} f_j\rangle f_j,$$

که در آن سری همگرای غیر مشروط است. به طور مشابه هر $f \in H$ را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$f = S^{-1}Sf = \sum_{j\in J} \langle f, f_j\rangle S^{-1} f_j.$$

نتیجه ۱۳.۲.۱ فرض کنید $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H و $\tilde{\Phi} = \{\tilde{f}_j\}_{j\in J}$ دوگان استاندارد آن باشد. آن‌گاه برای هر $f \in H$ داریم،

$$f = \sum_{j\in J} \langle f, f_j\rangle \tilde{f}_j = \sum_{j\in J} \langle f, \tilde{f}_j\rangle f_j.$$

قضیه ۱۴.۲.۱ فرض کنید $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H با عملگر قاب S باشد. آن‌گاه $\Phi^{can} = \{S^{-\frac{1}{2}} f_j\}_{j\in J}$ یک قاب چسبان یکه است و برای هر $f \in H$ داریم،

$$f = \sum_{j\in J} \langle f, S^{-\frac{1}{2}} f_j\rangle S^{-\frac{1}{2}} f_j.$$

تعریف ۱۵.۲.۱ اگر $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H باشد آن‌گاه $\Phi^{can} = \{S^{-\frac{1}{2}} f_j\}_{j\in J}$ قاب چسبان استاندارد برای Φ نامیده می‌شود.

فصل ۲

رابطه‌های هم‌ارزی روی مجموعه‌ی قاب‌ها

در این فصل بعضی از روابط هم‌ارزی روی قاب‌ها را بیان کرده و ارتباط بین آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۰.۲ فرض کنید $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ و $\Psi = \{g_j\}_{j\in J}$ دو قاب برای H با مجموعه اندیس‌گذار یکسان J باشند. دو قاب Φ و Ψ به طور یکانی هم‌ارز هستند، اگر تبدیل یکانی $U : H \to H$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\Psi = U\Phi$. یعنی این‌که به ازای هر $j \in J$،

$$g_j = Uf_j.$$

تعریف ۲.۰.۲ دو قاب Φ و Ψ متشابه هستند، اگر نگاشت خطی معکوس‌پذیر $Q : H \to H$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\Psi = Q\Phi$.

واضح است که تعریف‌های ۱.۰.۲ و ۲.۰.۲ دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه قاب‌های H با مجموعه اندیس‌گذار J است. طبق تعریف‌های ۱.۰.۲ و ۲.۰.۲ یک قاب، دوگان و قاب چسبان استاندارد نظیر آن متشابه هستند.

لم ۳.۰.۲ قاب‌های چسبان یکه متشابهند اگر و تنها اگر به طور یکانی هم‌ارز باشند.

اثبات : فرض کنید $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ و $\Psi = \{g_j\}_{j\in J}$ دو قاب چسبان یکه برای H و به طور یکانی هم‌ارز باشند. طبق تعریف عملگر یکانی $U : H \to H$ وجود دارد به‌طوری‌که $\Psi = Uf$ و چون هر عملگر یکانی معکوس‌پذیر است بنابراین قاب‌ها متشابهند.

برعکس فرض کنید قاب‌های چسبان یکه $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ و $\Psi = \{g_j\}_{j\in J}$ برای H متشابه باشند. طبق تعریف نگاشت خطی معکوس‌پذیر $Q : H \to H$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $j \in J$،

$$g_j = Qf_j.$$

فرض کنید $V_\Phi : \ell_2(J) \to H$ و $V_\Psi : \ell_2(J) \to H$ به ترتیب عملگرهای پیش‌قاب نظیر Φ و Ψ باشند. طبق تعریف عملگر پیش قاب برای هر $j \in J$ داریم،

$$V_\Phi(e_j) = f_j,$$
$$V_\Psi(e_j) = g_j.$$

پس برای هر $j \in J$،

$$V_\Psi(e_j) = QV_\Phi(e_j).$$

از طرفی چون Φ و Ψ قاب‌های چسبان یکه هستند داریم،

$$\begin{aligned} I &= V_\Psi V_\Psi^* \\ &= (QV_\Phi)(QV_\Phi)^* \\ &= QV_\Phi V_\Phi^* Q^* \\ &= QIQ^* \\ &= QQ^* \end{aligned}$$

بنابراین $QQ^* = I$. پس Q^* معکوس Q است. در نتیجه Q یکانی است و دو قاب به طور یکانی هم‌ارز هستند. $\square$

در باقیمانده‌ی این فصل فرض کنید $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ و $\Psi = \{g_j\}_{j\in J}$ دو قاب برای H با مجموعه‌ی اندیس‌گذار متناهی J باشند.

لم ۴.۰.۲ قاب‌های Φ و Ψ به طور یکانی هم‌ارز هستند اگر و تنها اگر ماتریس‌های گرام آن‌ها با هم مساوی باشند.

اثبات : فرض کنید قاب‌های Φ و Ψ به طور یکانی هم‌ارز باشند. طبق تعریف یک تبدیل یکانی مانند $U : H \to H$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $j \in J$،