بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه الزهرا (س)
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

کاربرد روش تکرار تغییراتی خی برای حل برخی مسائل هذلولوی معکوس

استاد راهنما

دکتر علی مردان شاه رضایی

استاد مشاور

دکتر شهناز طاهری

پژوهشگر

آزاده مهری

بهمن ۹۳

کلیه دستاوردهای این تحقیق
متعلق به دانشگاه الزهرا (س) است.

تقدیم به

برترین خلق خداوند که دلیل خلقت بشر است.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حسابگران از شمارش نعمت های او ناتوان و تلاشگران از ادای حق او درمانده اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید.

(نهج البلاغه، خطبه۱)

پیشانی شکر بر آستان حضرتش می سایم که به من شور گام نهادن در مسیر فراگیری دانش را عطا فرمود و مرا در تمام تحصیل یاری نمود.

در آغاز به رسم ادب و بر حسب وظیفه از باب «من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ» از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشتند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند و از همسرم که با بودنش عزمی راسخ برای فتح قله های تعالی به من عطا کرد، تشکر می کنم.

نهایت قدردانی را از استاد گرانقدرم **جناب آقای دکتر علی مردان شاه رضایی** ابراز می دارم که وقت و دانش خویش را بی مضایقه و صبورانه در اختیار من نهادند و در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند.

و همچنین از **سرکار خانم دکتر شهناز طاهری**، که راهنمایی و تجارب ارزشمند خود را در اختیار من قرار دادند، صمیمانه تشکر می کنم.

باشد که از این طریق از زحمات این بزرگواران قدردانی نمایم.

چکیده

این پایان نامه به حل برخی مسائل هذلولوی در معادلات موج یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی می‌پردازد. جواب‌های عددی با استفاده از روش تکرار تغییراتی به دست می‌آید. این روش مبنی بر استفاده از ضرایب لاگرانژ برای شناسایی مقادیر بهینه پارامتر در یک تابع است. استفاده از این روش، یک دنباله همگرای سریع را نتیجه می‌دهد که به جواب دقیق مسأله همگرا است. علاوه بر این، روش تکرار تغییراتی نیازی به گسسته‌سازی مسأله ندارد. بنابراین روش تکرار تغییراتی، برای پیدا کردن جواب‌های تقریبی بدون گسسته‌سازی مسأله مناسب است. مثال‌های عددی ارائه شده، توانایی و پایداری روش را شرح می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مسأله معکوس، معادله موج، روش تکرار تغییراتی، ضرایب لاگرانژ، متغیر محدود شده

فهرست مطالب

مقدمه

روش تکرار تغییراتی [1]، یکی از انواع روش‌های عددی-تحلیلی برای حل مسائل خطی و غیرخطی است و با استفاده از این روش می‌توان جواب‌های تقریبی بسیاری از مسائل غیرخطی معروف را به‌دست آورد. به‌عنوان مثال پدیده‌های غیرخطی در طیف گسترده‌ای از برنامه‌های کاربردی مانند فیزیک پلاسما، فیزیک حالت جامد و دینامیک سیالات و سینتیک شیمیایی رخ می‌دهد. باید خاطر نشان کرد با توجه به افزایش توجهات نسبت به نظریه موج طیف وسیعی از روش‌های تحلیلی و عددی در تجزیه و تحلیل این مدل به‌کار برده شده است[۱۰].

در این پایان نامه حل برخی مسائل هذلولوی با استفاده از روش تکرار تغییراتی مورد بررسی قرار گرفته است. روش تکرار تغییراتی در منابع [۱۰ - ۱] توسط خی [2] پیشنهاد شده است. این روش مبنی بر استفاده از ضرایب لاگرانژ [3] برای شناسایی پارامترهای مقادیر بهینه در یک تابع است. در صورت وجود جواب برای مسأله، استفاده از این روش همگرایی سریع تقریب‌های متوالی به جواب دقیق را در پی دارد. بعلاوه نیازی به گسسته‌سازی مسأله نیست. بنابراین روش تکرار تغییراتی برای پیدا کردن جواب‌های تقریبی بدون گسسته‌سازی مسأله مناسب است. تفاوت این روش با روش‌های تحلیلی غیرخطی دیگر مانند روش پریشندگی [4] این است که به پارامترهای کوچک بستگی ندارد و می‌تواند کاربردهای گسترده‌ای در حل مسائل خطی و غیرخطی بدون گسسته‌سازی مسأله داشته باشد. مقایسه با روش تجزیه آدومیان [5] نشان می‌دهد که همگرایی جواب‌های تقریبی به‌دست آمده به جواب دقیق، با استفاده از این

[1] method iteration Variational
[2] He
[3] Lagrange multiplier
[4] method Perturbation
[5] Adomian decomposition method

روش سریع‌تر از روش تجزیه آدومیان می‌باشد. روش تکرار تغییراتی خی یک ابزار قوی برای حل انواع مختلفی از مسائل است. به عنوان نمونه این روش با موفقیت برای سیستم‌های دیفرانسیل معمولی مستقل [۱۳] و همچنین برای برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی با ضرایب متغیر [۱۴] استفاده شده است.

کاربردهای روش حاضر در تعمیم معادله شرودینگر-Kdv [۶] و معادله آب کم عمق در مراجع [۱۵] و [۱۹] ارائه شده است. برای حل معادلات برگر [۷] و تعمیم معادلات برگر [۸] نیز از این روش استفاده می‌شود [۱۶]، همچنین کاربرد آن در معادلات هلمهولتز[۹] مورد بررسی قرار گرفته [۱۷] و به تازگی به معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی با مشتق دیفرانسیل کاپوتو [۱۰] بسط داده شده است [۱۸]. این روش برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری استفاده می‌شود [۲۰]. از کاربردهای دیگر این روش می‌توان به حل معادلات دیفرانسیل هذلولوی [۲۱] و حل سیستم‌های خطی و غیرخطی معادلات دیفرانسیل معمولی [۲۲] اشاره کرد.

این پایان نامه به چهار فصل اختصاص یافته است:

فصل اول شامل پیش‌نیازها، تعاریف و قضایا می‌باشد. در فصل دوم به کاربردهای روش تکرار تغییراتی اشاره شده است. فصل سوم به تحلیل روش تکرار تغییراتی، افزایش همگرایی این روش و روش تکرار تغییراتی اصلاح شده اختصاص یافته است. فصل چهارم نیز به حل برخی مسائل هذلولوی با استفاده از این روش پرداخته شده است.

این پایان نامه برگرفته از مقالات [۲۷ - ۲۳] می‌باشد.

آزاده مهری

بهمن ۹۳

---

[۶] Schrodinger-Kdv
[۷] Burger
[۸] Burger Coupled
[۹] Helmholtz
[۱۰] Caputo

فصل ۱

پیش نیازها، تعاریف و قضایا

در این فصل به ارائه تعاریف و مفاهیمی می‌پردازیم که در فصول آتی به آن نیازمندیم. بدین منظور ابتدا به مفاهیم اساسی از آنالیز حقیقی [۱۱] و سپس معادلات با مشتقات جزئی [۱۲] اشاره می‌کنیم، در نهایت به مطالعه حساب تغییرات [۴۹ – ۴۸] و روش تکرار تغییراتی [۲۷ – ۲۳] پرداخته شده است.

۱.۱ فضای برداری

یک فضای برداری (یا فضای خطی) روی میدان F مجموعه‌ای غیرتهی مانند X با دو عمل جمع و ضرب (ضرب اسکالر) است. اعضای x و y از X را بردار و اعضای α و β از میدان F را اسکالر می‌نامیم به طوری که $(X,+)$ تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد یعنی به ازای هر x، y و z از X داشته باشیم:

۱) نسبت به عمل جمع بسته است یعنی $x+y\in X$،

۲) عمل جمع دارای خاصیت جا به جایی است یعنی $x+y=y+x$،

۳) عمل جمع شرکت پذیر است یعنی $(x+y)+z=x+(y+z)$،

۴) بردار یکتای صفر در X موجود است به طوری که به ازای هر x در X داریم $x+0=x$،

۵) به ازای هر بردار x در X بردار یکتای $-x$ در X موجود است به طوری که $x+(-x)=0$،

همچنین به ازای هر اسکالر $\alpha, \beta \in F$ و هر بردار $x, y \in X$ داشته باشیم:

۶) $\alpha x \in X$،

۷) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$،

۸) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$،

۹) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$،

۱۰) $1x = x$.

در یک فضای برداری داریم:

$$0\alpha = 0 \qquad , \qquad 0x = 0.$$

و همچنین

$$(-1)x = -x.$$

اگر $F = \mathbb{R}$، آنگاه X را فضای برداری حقیقی و اگر $F = \mathbb{C}$، X را فضای برداری مختلط می‌گوییم.

۲.۱ فضاهای نرم دار

فضای برداری X را یک فضای نرم دار (نرمیده) گوییم در صورتی که به ازای هر $x \in X$ عدد حقیقی و نامنفی $\|x\|$ که نرم x نامیده می‌شود، وجود داشته باشد به طوری که:

الف) به ازای هر x و y در X داشته باشیم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

ب) به ازای هر x در X و هر اسکالر α در F داشته باشیم $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

ج) اگر $x \neq 0$ آنگاه $\|x\| > 0$.

در هر فضای نرم دار، نامساوی ذیل که با استفاده از نامساوی مثلثی نرم به دست می‌آید، به ازای هر x و y از فضا، همواره برقرار است:

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

اگر قرار دهیم $d(x,y) = \|x-y\|$ آنگاه (X,d) را یک فضای متری القا شده به وسیله نرم گوییم.

۳.۱ فضای باناخ

فضای نرم دار X را یک فضای باناخ گوییم در صورتی که فضای متری (X,d) با متر متعارف (متری که به وسیله نرم القا می‌شود)، یک فضای متری کامل باشد.

فضای متری (X,d) کامل است در صورتی که هر دنباله کوشی در X همگرا باشد. دنباله کوشی $\{x_n\}$ در فضای نرمیده X به $x \in X$ همگرا است $(x_n \longrightarrow x)$ بدین معنی که $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

۴.۱ معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول خطی

فرم کلی معادلات دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه اول به صورت ذیل می‌باشد:

$$P(x,y,z)\ \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\ \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z), \tag{۱.۱}$$

که در آن z متغیر وابسته و x و y متغیرهای مستقل و P ، Q و R توابعی بر حسب x، y و z می‌باشد. برای حل معادله فوق می‌توان یکبار تغییرات z را فقط نسبت به x در نظر گرفت، به عبارتی دیگر میزان تغییرات نسبت به y صفر می‌باشد $(\frac{\partial z}{\partial y} = 0)$، و بار دیگر تغییرات z را فقط نسبت به y در نظر گرفت، به عبارتی دیگر میزان تغییرات نسبت به x صفر می‌باشد $(\frac{\partial z}{\partial x} = 0)$.
با توجه به (۱.۱) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow P(x,y,z)\ \frac{\partial z}{\partial x} = R(x,y,z) \Longrightarrow \frac{\partial z}{R(x,y,z)} = \frac{\partial x}{P(x,y,z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Longrightarrow Q(x,y,z)\ \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \Longrightarrow \frac{\partial z}{R(x,y,z)} = \frac{\partial y}{Q(x,y,z)},$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial x}{P(x,y,z)} = \frac{\partial y}{Q(x,y,z)} = \frac{\partial z}{R(x,y,z)}. \tag{۲.۱}$$

حال اگر رویه $u_1(x,y,z)=c_1$ و $u_2(x,y,z)=c_2$ دو جواب مستقل و عمومی دستگاه (۲.۱) باشند، آنگاه تقاطع آن‌ها حل z را به دست می‌دهد. برای به دست آوردن این تقاطع باید رابطه $c_1=f(c_2)$ را تشکیل داد.

۵.۱ انواع متعارف معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی

فرض کنیم u تابعی از دو متغیر مستقل x و y باشد. معادله مرتبه دوم:

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu+g=0, \qquad (۳.۱)$$

که در آن تابع معلوم g قسمت ناهمگن معادله و توابع معلوم f,e,d,c,b,a ضرایب معادله بر حسب x و y باشند را در نظر می‌گیریم. قرارداد می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{یا} \quad u_{xx}=u_{x^2}$$

آنگاه معادله بالا یک معادله خطی نامیده می‌شود. اگر ضرایب b,a و c به متغیرهای u_x,u,y,x و u_y بستگی داشته باشد و به مشتق‌های جزئی مرتبه دوم u بستگی نداشته باشند به عبارت دیگر به صورت

$$au_{x^2}+bu_{xy}+cu_{y^2}=F(x,y,u,u_x,u_y),$$

باشند، معادله را شبه خطی می‌نامیم. این دسته از معادلات به سه شکل استاندارد با عناوین سهموی، هذلولوی و بیضوی تقسیم بندی می‌شوند.

طبقه بندی این نوع معادلات به ازای هر $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$ به این صورت می‌باشد که هرگاه $b^2-4ac=0$، آنگاه معادله (۳.۱) را سهموی گوییم، هرگاه $b^2-4ac>0$، معادله (۳.۱) از نوع هذلولوی می‌باشد و همچنین معادله (۳.۱) را بیضوی گوییم هرگاه $b^2-4ac<0$. در زیر چند نوع از معادلات معروف و نوع آن‌ها را بیان می‌کنیم:

الف) **معادله حرارت؛** $u_t=c^2u_{x^2}$ یک معادله سهموی است که در آن c^2 یک ثابت مثبت است.

ب) **معادله موج یا ارتعاش؛** $u_{t^2}=c^2u_{x^2}$ یک معادله هذلولوی است که در آن c^2 یک ثابت مثبت است.

ج) **معادله لاپلاس** [1]: $\nabla^2 u = \triangle u = u_{x^2} + u_{y^2} = 0$ یک معادله بیضوی است.

د) **معادله پوآسون** [2]: $\nabla^2 u = \triangle u = F(x,y)$ یک معادله بیضوی ناهمگن است.

۶.۱ شرایط اولیه و کرانه‌ای

هرگاه بخواهیم جواب یکتای یک معادله دیفرانسیل جزئی را به دست آوریم به یک سری شرایط مکمل نیاز داریم که این شرایط را شرایط اولیه یا کرانه‌ای می‌نامیم. شرایط اولیه به معنای معلوم بودن مقدار متغیر وابسته در زمان اولیه (مثلاً نقطه $t = 0$) می‌باشد.

شرایط کرانه‌ای به معنی معلوم بودن مقدار متغیر وابسته و یا مشتقاتش در کرانه‌های دامنه معادله دیفرانسیل جزئی است. این نوع شرایط به چند نوع دسته بندی می‌شوند که در زیر به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

الف) **شرایط دیریکله** [3]. هرگاه مقدار متغیر وابسته در کرانه‌های دامنه معادله دیفرانسیل جزئی معلوم باشد، آن شرط را شرایط دیریکله می‌نامند.

ب) **شرایط نیومن** [4]. نوعی از شرایط کرانه‌ای می‌باشد که در آن مقادیر مشتق متغیر وابسته در کرانه‌های قلمرو معلوم باشد، این نوع شرط را شرایط نیومن می‌نامند.

ج) **شرایط روبین** [5]. هرگاه شرایط کرانه‌ای در قسمتی از کران دیریکله و در قسمت دیگر نیومن باشد، این نوع شرط را شرایط روبین می‌نامند.

د) **شرایط کرانه‌ای آمیخته.** اگر شرط کرانه‌ای اعمال شده ترکیب خطی از دو شرط نیومن و دیریکله باشد آن شرط را کرانه‌ای آمیخته می‌نامند.

ه) **شرایط کرانه‌ای کوشی.** یک شرط کرانه‌ای برای یک معادله دیفرانسیل معمولی (جزئی) کوشی است هرگاه برای یک مقدار جواب خاص، مقدار تابع و مشتقات آن در یک نقطه

---

[1] Laplace
[2] Poisson
[3] Dirichlet
[4] Newman
[5] Rubin

از کران مشخص، معلوم است. قابل توجه است که اگر متغیر مستقل، زمان باشد، در این صورت مسأله کوشی به مسأله با مقادیر اولیه معروف است.

و) **شرایط کرانه‌ای فوق اضافه.** شرایط کرانه‌ای فوق اضافه به صورت اندازه‌گیری داده در بخشی از ناحیه یا یک نقطه از ناحیه در به دست آوردن مجهول دوم در مسأله، تعریف می‌شود.

۷.۱ مسائل با مقادیر اولیه و کرانه‌ای

مسأله مقدار اولیه. یک مسأله مقدار اولیه، یک معادله دیفرانسیلی به صورت:

$$y^{'}(t) = f(t, y(t)) \quad ; \quad f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

است که در آن Ω یک مجموعه باز همراه با یک نقطه در دامنه f به شکل $(x_۰, y_۰) \in \Omega$ که شرط اولیه نامیده می‌شود. یک جواب برای یک مسأله مقدار اولیه، تابعی مثل y می‌باشد که در شرط $y(t_۰) = y_۰$ صدق می‌کند.

مسأله مقدار کرانه‌ای. یک مسأله مقدار کرانه‌ای به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$y^{''}(x) = f(x, y, y^{'}(x)) \quad ; \quad x \in (a, b),$$

$$y(a) = y_۱,$$

$$y(b) = y_۲,$$

که در آن تابع f و اعداد حقیقی a , b , $y_۱$ و $y_۲$ معلوم است.

۸.۱ مسائل مستقیم و معکوس

پروفسور گیرسیچ [۶] تئوری مسائل معکوس را با توجه به حوزه‌های مختلف کاربرد آن، به صورت ذیل تعریف می‌کند [۳۰]:

[۶] Kirsch

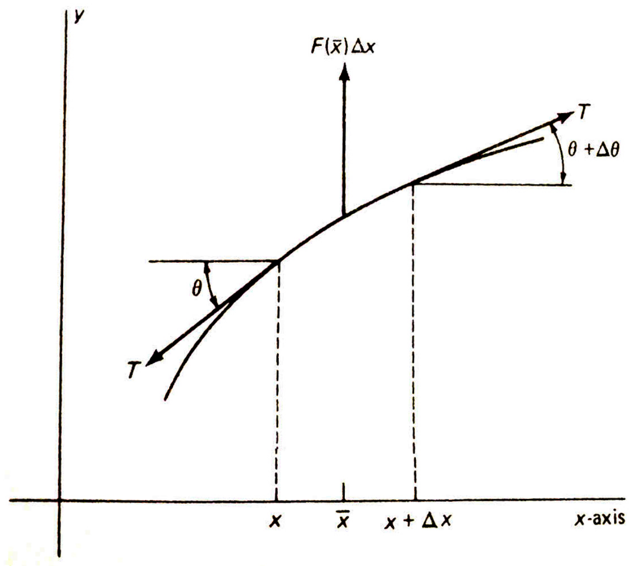
دو مسأله را معکوس یکدیگر گویند اگر فرمول‌بندی یکی از آن‌ها نیازمند تمام یا بخشی از اطلاعات مسأله دیگر باشد. بنابراین یکی از دو مسأله را به دلخواه مستقیم و دیگری را معکوس می‌نامیم.

تعریف. هرگاه یک معادله دیفرانسیل جزئی را حل کرده و جواب حاصل در یک سری شرایط فیزیکی از قبل تعیین شده صدق کند، گوییم یک معادله دیفرانسیل جزئی حل شده است. در این حالت تنها یک مجهول مانند $u(x,y)$ داریم که باید تعیین شود، چنین مسائلی را معادلات دیفرانسیل جزئی مستقیم گوییم. در صورتی که در یک معادله دیفرانسیل جزئی بیش از یک مجهول داشته باشیم، مسأله را یک مسأله معکوس می‌نامیم.

۹.۱ معادله موج یک بعدی

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل جزئی که ارتعاش‌های یک سیم را مدل‌سازی می‌کند، با یک سیم یکنواخت قابل انعطاف شروع می‌کنیم که چگالی خطی (بر حسب گرم بر سانتی‌متر یا اسلاگ بر فوت) دارد و تحت یک تنش T (دین یا پوند) بین نقاط ثابت $x = ۰$ و $x = l$ کشیده می‌شود. فرض کنیم به محض آن که سیم در صفحه xy حول وضعیت ساکن خودش به ارتعاش درآید، هر نقطه به موازات محور yها حرکت می‌کند، در نتیجه می‌توانیم توسط $y(x,t)$ تغییر مکان نقطه x سیم را نمایش دهیم. پس برای هر مقدار ثابت t، شکل سیم در زمان t منحنی $y = y(x,t)$ است. همچنین فرض می‌کنیم که انحراف سیم چنان کم باشد که تقریب $\sin\theta \approx \tan\theta = y_x(x,t)$ کاملا درست باشد. بالاخره فرض می‌کنیم علاوه بر نیروهای کششی داخلی که به صورت مماس بر سیم اثر می‌کنند، یک نیروی خارجی عمودی نیز با چگالی خطی $F(x)$ بر حسب واحدی نظیر دین بر سانتی متر یا پوند بر فوت بر سیم اثر کند [۵۰].

می‌خواهیم قانون نیوتن $F = ma$ را برای یک قطعه کوچک از سیم و به جرم $\rho\Delta x$ متناظر با بازه $[x, x+\Delta x]$ به کار بریم که در آن a شتاب عمودی $y_{tt}(\bar{x},t)$ در نقطه وسط آن می‌باشد.



شکل ۱.۱: نیروها بر یک قطعه کوتاه از فنر مرتعش

با خواندن مؤلفه‌های عمودی نیروهای نشان داده شده در شکل (۱.۱)، به دست می‌آوریم:

$$(\rho\ \Delta x)\ y_{tt}(\bar{x},t) \approx T\sin(\theta+\Delta\theta) - T\sin\theta + F(\bar{x})\Delta x$$

$$\approx Ty_x(x+\Delta x,t) - Ty_x(x,t) + F(\bar{x})\Delta x,$$

از تقسیم این رابطه بر Δx نتیجه می‌گیریم:

$$\rho\ y_{tt}(\bar{x},t) \approx T\ \frac{y_x(x+\Delta x,t)-y_x(x,t)}{\Delta x} + F(\bar{x}).$$

اگر حد بگیریم هنگامی که $\Delta x \to ۰$، در نتیجه $\bar{x} \to x$ معادله دیفرانسیل جزئی

$$\rho\ \frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} = T\ \frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} + F(x), \qquad (۴.۱)$$

را به دست می‌آوریم که ارتعاش‌های یک سیم قابل انعطاف را با چگالی خطی ثابت ρ و کشش T تحت اثر یک نیروی خارجی عمودی با چگالی خطی $F(x)$ توصیف می‌کند.

اگر در (۴.۱) قرار دهیم:

$$a^۲ = \frac{T}{\rho},$$

و $F(x) \equiv 0$، معادله موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{۵.۱}$$

را به دست می‌آوریم که ارتعاش‌های آزاد یک فنر قابل انعطاف یکنواخت را مدل‌سازی می‌کند.

انتهای ثابت سیم در نقاط $x = 0$ و $x = l$ بر روی محور xها با شرایط نقطه انتهایی ذیل متناظرند:

$$y(0, t) = y(l, t) = 0, \tag{۶.۱}$$

برداشت فیزیکی ما از این مطلب این است که حرکت سیم تعیین خواهد شد اگر هم تابع وضعیت اولیه آن

$$y(x, 0) = f(x) \quad ; \quad 0 < x < l, \tag{۷.۱}$$

و هم تابع سرعت اولیه را مشخص کنیم.

$$y_t(x, 0) = g(x) \quad ; \quad 0 < x < l. \tag{۸.۱}$$

از ترکیب معادلات (۵.۱)-(۸.۱)، مسأله مقدار کرانه‌ای

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} && ; && 0 < x < l \;,\; t > 0, \\
&y(0, t) = y(l, t) = 0 && ; && t \geq 0, \\
&y(x, 0) = f(x) && ; && 0 \leq x \leq l, \\
&y_t(x, 0) = g(x) && ; && 0 < x \leq l,
\end{aligned}$$

را برای تابع $y(x,t)$ به دست می‌آوریم که تغییر مکان یک فنر مرتعش آزاد با انتهاهای ثابت، وضعیت اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه $g(x)$ می‌باشد.

۱۰.۱ حساب تغییرات

برای معرفی روش تکرار تغییراتی، ابتدا مروری بر حساب تغییرات خواهیم داشت. حساب تغییرات شاخه‌ای از آنالیز است که با مسائل بیشینه و کمینه کردن سر و کار دارد، این نوع