چکیده

ریشه ـ تقریب‌پذیری گروه‌های توپولوژیک در رابطه با توابع محدب در گروه‌های توپولوژیک قبلاً مطرح شده است. هدف ما در این پایان‌نامه این است که این مسأله را در حالت خاص گروه خودریختی‌های رویه‌های ریمان بررسی کنیم. در آنالیز مختلط رویه‌ی ریمان به یک خمینه‌ی مختلط یک بعدی همبند گفته می‌شود که در قضیه‌ی مشهور یکنواخت‌سازی رویه‌های ریمان همبند ساده ثابت می‌شود که از لحاظ همدیسی، تنها سه رویه‌ی ریمان همبند ساده وجود دارد که عبارتنداز: کره‌ی ریمان، صفحه‌ی مختلط و قرص یکه. سایر رویه های ریمان خارج‌قسمت‌های این سه رویه می‌باشند که در واقع جز چند رویه‌ی معدود، تمام رویه‌ها خارج‌قسمت قرص یکه هستند.

آن‌چه که به مطالعه‌ی رویه‌های ریمان جذابیّت بیشتری بخشیده، نگاشت‌های تمام‌ریختی است که بین آن‌ها تعریف می‌شود. مجموعه‌ی توابع تمام‌ریخت با وارون تمام‌ریخت روی یک رویه‌ی ریمان M به خودش، با توپولوژی همگرایی یکنواخت روی فشرده‌ها تشکیل یک گروه توپولوژیک می‌دهد که آن‌را گروه خودریختی‌های M می‌نامند و با $\mathrm{Aut}(M)$ نمایش داده می‌شود.

قبلاً ریشه ـ تقریب‌پذیری گروه خودریختی‌های قرص یکه در مقاله‌ای از شادمان و میرزاپور نشان داده شده‌است. بررسی‌های ما نشان داد که گروه خودریختی‌های $\mathbb{C}$ (صفحه‌ی مختلط)، $\mathbb{C} \cup \infty$ (صفحه‌ی مختلط توسعه‌یافته) و $\mathbb{D} - \{0\}$ نیز ریشه ـ تقریب‌پذیرند؛ درحالی‌که گروه خودریختی‌های $\mathbb{C} - \{0\}$ و طوقه‌ی $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r_1 < |z| < r_2\}$ ریشه ـ تقریب‌پذیر نیستند، امّا هر کدام دارای یک زیرگروه ریشه ـ تقریب‌پذیر می‌باشند.

لغات کلیدی:

رویه‌ی ریمان، نگاشت تمام‌ریخت، گروه خودریختی، گروه‌ریشه ـ تقریب‌پذیر.

فهرست

مقدمه . . . . پنج

۱ تعاریف و پیش‌نیازها

۱–۱ مقدمه ۲

۱–۲ فضای یک بعدی مختلط ۲

۱–۳ خمینه‌ی مختلط یک بعدی ۵

۲ کلیاتی راجع به رویه های ریمان

۲–۱ مقدمه ۱۱

۲–۲ تعریف رویه‌ی ریمان و چند مثال ابتدایی ۱۱

۲–۳ خمینه‌ی پوششی عمومی ۱۴

۲–۴ قضیه‌ی یکنواخت‌سازی رویه‌های ریمان همبند ساده ۱۷

۲–۵ نمایش رویه‌های ریمان به‌صورت خارج‌قسمت رویه‌های ریمان پوششی عمومی ۲۰

۳ گروه خودریختی‌های رویه‌های ریمان همبند ساده و دسته‌بندی تمام رویه‌های ریمان

۳—۱ مقدمه . . . ۲۵

۳—۲ گروه خودریختی‌های رویه‌های ریمان همبند ساده . . . ۲۵

۳—۳ خارج قسمت‌های رویه‌های ریمان همبند ساده . . . ۳۱

۴ گروه خودریختی سایر رویه‌های ریمان

۴—۱ مقدمه . . . ۳۶

۴—۲ خودریختی‌های خارج قسمت‌های رویه‌های ریمان پوششی عمومی . . . ۳۶

۴—۳ گروه خودریختی چند رویه‌ی ریمان . . . ۳۹

۴—۴ یکنواخت سازی رویه‌های ریمان فشرده و بررسی خودریختی‌های آن‌ها . . . ۴۳

۴—۵ خوریختی‌های دامنه‌های همبند چندگانه . . . ۴۴

۵ تقریب پذیری ریشه

۵—۱ مقدمه . . . ۵۰

۵—۲ ریشه ـ تقریب‌پذیری گروه خودریختی قرص یکه . . . ۵۰

۵—۳ ریشه ـ تقریب‌پذیری گروه خودریختی‌های صفحه‌ی مختلط . . . ۵۴

۵—۴ ریشه ـ تقریب‌پذیری گروه خودریختی‌های کره‌ی ریمان و چند رویه‌ی دیگر . . . ۵۵

مراجع . . . ۶۰

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی . . . ۶۲

مقدمه

آن‌چه در این پایان‌نامه مورد بحث قرار گرفته است، آشنایی و مطالعه‌ی گروه‌های خودریختی[۱] رویه‌های ریمان[۲] با تکیه بر بررسی ریشه‌تقریب‌پذیری[۳] این گروه‌هاست.

در فصل (۱) با تعاریف کلی خمینه‌ی مختلط[۴] و گروه خودریختی آشنا می‌شویم و برخی تعاریف مقدماتی را که در طول پایان‌نامه از آن‌ها استفاده می‌شود بیان می‌کنیم.

در فصل (۲) ابتدا به تعریف رویه‌ی ریمان و چند مثال ساده می‌پردازیم و سپس قضیه‌ی یکنواخت‌سازی را برای رویه‌های ریمان همبند ساده مطرح می‌کنیم. این قضیه می‌گوید: تمام رویه‌های ریمان همبند ساده معادل همدیس با یکی از سه حالت قرص یکه، صفحه‌ی مختلط و کره‌ی ریمان هستند. بعد از معرفی مفهوم خمینه‌ی پوششی عمومی[۵] نشان می‌دهیم که خمینه‌ی پوششی عمومی باید همبند ساده باشد. سپس نشان می‌دهیم که تمام رویه‌های ریمان، خارج‌قسمت رویه‌های ریمان پوششی عمومی می‌باشند و در واقع هر رویه‌ی ریمان به‌صورت $\frac{U}{\Gamma}$ می‌باشد که U یکی از سه رویه‌ی ریمان $\mathbb{C}$، $\mathbb{D}$ و $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ به‌عنوان رویه‌ی پوششی عمومی و Γ گروه تبدیلات پوششی U است، که گروه تبدیلات پوششی هر رویه‌ی ریمان زیرگروه بدون نقطه ثابت گروه خودریختی‌های آن است.

هدف فصل (۳) آشنایی کلّی با گروه خودریختی‌های رویه‌های ریمان است. در این فصل بعد از شناخت خودریختی رویه‌های ریمان همبند ساده، می توانیم خارج‌قسمت‌های آن‌ها را بشناسیم و می بینیم که تمام رویه‌های ریمان جز تعدادی متناهی مثال، خارج‌قسمت $\mathbb{D}$ هستند و همچنین نشان می‌دهیم که گروه بنیادی بیشتر رویه‌های ریمان آبلی است و در پایان تمام رویه‌های ریمان را با توجه به گروه بنیادی آن‌ها دسته بندی می‌کنیم.

در فصل (۴) ارتباط بین خودریختی‌های هر رویه‌ی ریمان با خودریختی‌های رویه‌ی پوششی آن بیان می‌شود؛ یعنی برای شناخت شکل خودریختی‌های هر رویه‌ی ریمان کافی است نگاشت پوششی آن و خودریختی‌های خمینه‌ی پوششی عمومی آن، که حافظ تبدیلات پوششی هستند را بشناسیم. سپس خودریختی‌های چند رویه‌ی ریمان از جمله $\mathbb{C}-\{0\}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ضمن در این فصل ثابت می‌شود که گروه خودریختی هر رویه‌ی ریمان تشکیل یک گروه لی می‌دهد.

---

[۱] Automorphism

[۲] Riemann surfaces

[۳] root-approximation

[۴] Complex manifold

[۵] Universal covering manifold

در ادامه‌ی این فصل به بررسی اجمالی گروه خودریختی‌های خارج قسمت‌های $\mathbb{D}$ می پردازیم. بعد از معرفی مفهوم گونه[6] و بیان این‌که تمام رویه‌های ریمان فشرده با گونه‌ی صفر و یک، به ترتیب معادل همدیس با کره‌ی ریمان و چنبره هستند، به بررسی رویه‌های ریمان فشرده با گونه‌ی بزرگتر یا مساوی ۲ می‌پردازیم که در واقع همه‌ی آن‌ها خارج‌قسمت‌های $\mathbb{D}$ هستند. در قضیه‌ای متناهی بودن گروه خودریختی‌های این رویه‌ها نشان داده می‌شود و قضیه‌ای از هرویت بیان می کند که کران بالای مرتبه‌ی گروه خودریختی‌های رویه‌های ریمان فشرده با گونه $g \geq$ ۲ حداکثر ۸۴$(g-1)$ خواهدبود.

در مورد گروه خودریختی‌های دامنه‌های مسطح کراندار همبند چندگانه کارهای زیادی انجام شده که در این‌جا تعدادی از نتایج آن‌ها را آورده‌ایم. از جمله این‌که ثابت می‌کنیم که $\mathrm{Aut}(\Omega)$ در صورتی‌که Ω یک دامنه‌ی مسطح کراندار از همبندی متناهی باشد فشرده است و همچنین برای همبندی بزرگتر از یک $\mathrm{Aut}(\Omega)$ متناهی است. موریس هینس [7] در مقاله‌ای علاوه‌بر نشان دادن این‌که گروه خودریختی‌های یک ناحیه‌ی صفحه از همبندی متناهی ($\rho >$ ۲) یک‌ریخت [8] با یک گروه متناهی از تبدیلات کسری خطی از صفحه‌ی توسعه‌یافته به خودش است، توانسته کران بالایی برای گروه خودریختی‌های تمام ناحیه‌های همبند متناهی ($\rho >$ ۲) از صفحه پیدا کند که این نتیجه‌ی جالب را در پایان همین فصل گنجانده‌ایم.

در فصل (۵) به بررسی وجود جذر و ریشه ـ تقریب‌پذیر بودن گروه‌های خودریختی رویه‌های ریمان می‌پردازیم. شادمان و میرزاپور ریشه ـ تقریب‌پذیر بودن گروه خودریختی‌های قرص یکه را در مقاله‌ای نشان داده اند. ما توانسته‌ایم نشان دهیم که گروه خودریختی‌های صفحه‌ی مختلط و کره‌ی ریمان نیز ریشه ـ تقریب‌پذیرند و به این ترتیب نتیجه می‌شود که تمام رویه‌های ریمان پوششی عمومی ریشه ـ تقریب‌پذیر می باشند.

همچنین گروه خودریختی‌های $\mathbb{D}-\{0\}$ نیزریشه ـ تقریب‌پذیر است. امّا گروه خودریختی‌های $\mathbb{C}-\{0\}$ و $\mathcal{A}=\{z\in\mathbb{C}: 0<r_1<|z|<r_2\}$ ریشه ـ تقریب‌پذیرنیستند؛ ولی شامل یک زیرگروه ریشه ـ تقریب‌پذیر می‌باشند.

[6] genus

[7] Maurice Heins

[8] Isomorphic

فصل اول

تعاریف و پیش‌نیازها

۱—۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم کلی و قضایای مورد نیاز از آنالیز یک متغیره‌ی مختلط و تعاریف پایه‌ای نظیر خمینه‌ی مختلط و تعریف گروه خودریختی روی آن‌را یادآوری می‌کنیم. خواننده با این مفاهیم آشنا فرض شده است. و هدف ما از این یادآوری فقط تثبیت نمادها و واژه‌هایی است که در بقیه‌ی فصل‌ها به کار می‌رود.

۱—۲ فضای یک بعدی مختلط

تعریف ۱.۲.۱

نماد $\mathbb{C}$ را برای فضای یک بعدی مختلط به کار می‌بریم که نقاط در آن به‌صورت دوتایی‌های مرتب $z=(x,y)$ هستند که $x,y\in\mathbb{R}$ و اعمال جمع و ضرب به‌صورت زیر برروی اعضای آن تعریف می‌شود:

$$(x,y)+(x'+y')=(x+x',y+y') \qquad , \qquad (x,y)\cdot(x'+y')=(xx'-yy',xy'+yx')$$

$\mathbb{C}$ همراه با دو عمل تعریف شده در بالا تشکیل یک میدان می‌دهد.

در صورتی‌که عدد حقیقی x را به‌صورت نقطه‌ی $(x,0)$ و همچنین $(1,0)$ و $(0,1)$ را به‌ترتیب، با 1 و i نشان دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$(x,y)=x\cdot 1+y\cdot i \qquad x,y\in\mathbb{R}$$

و درواقع هر عدد مختلط را می‌توان به‌صورت $z=x+iy$ نشان داد که $x,y\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$.

اعداد حقیقی x و y را به‌ترتیب، قسمت‌های حقیقی و موهومی z می‌نامیم و می‌نویسیم: .

$$x=\mathrm{Re}z \qquad , \qquad y=\mathrm{Im}z$$

همچنین مزدوج هر عدد مختلط $z=x+iy$ به‌صورت $\bar{z}=x-iy$ تعریف می‌شود.

از لحاظ جبری $\mathbb{C}$ یک فضای برداری دو بعدی روی $\mathbb{R}$ است که نرم وابسته به آن به‌صورت

$$||z||=<z,z>^{\frac{1}{2}}=(z\bar{z})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2+y^2} \qquad z\in\mathbb{C} \ , \ x,y\in\mathbb{R}$$

تعریف می شود.

از لحاظ توپولوژیکی $\mathbb{C}$ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ از بعد حقیقی ۲ می‌باشد؛ در نتیجه زیرمجموعه‌ی $U \subset \mathbb{C}$ در $\mathbb{C}$ باز است، هرگاه U به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ باز باشد.

- نماد $\mathcal{C}(X)$ را برای فضای توابع پیوسته‌ی $f : X \to \mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم که X یک فضای توپولوژیک دلخواه است. به‌ویژه هنگامی که $\Omega \subset \mathbb{C}$ مجموعه‌ی باز باشد، مجموعه توابع پیوسته‌ی $f : \Omega \to \mathbb{C}$ را با نماد $\mathcal{C}(\Omega)$ نشان می‌دهیم.
- $\mathbb{D}$ را قرص یکه‌ی[1] یک بعدی در $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم یعنی:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

تعریف ۲.۲.۱

اگر $\Omega \subset \mathbb{C}$ مجموعه‌ای باز باشد، تابع $f : \Omega \to \mathbb{C}$ را در Ω تمام‌ریخت [2] (یا تحلیلی مختلط) گوییم، اگر:

i) $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

ii) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

تعریف ۳.۲.۱

اگر نگاشت φ یک نگاشت تمام‌ریخت و یک‌به‌یک و پوشا از دامنه‌ی $\Omega \subset \mathbb{C}$ به دامنه‌ی $\Omega' \subset \mathbb{C}$ باشد، به قسمی که φ^{-1} هم تمام‌ریخت باشد، آن‌گاه φ را یک نگاشت دوسوتمام‌ریخت [3] می‌نامند. پس Ω و Ω' را یک‌ریخت تحلیلی می‌نامند، هرگاه یک نگاشت دوسوتمام‌ریخت بین Ω و Ω' موجود باشد.

تعریف ۴.۲.۱

مجموعه‌ی همه‌ی توابع تمام‌ریخت با دامنه‌ی $\Omega \subset C$ را با $\mathrm{Hol}(\Omega)$ نشان می دهیم، که نسبت به جمع و ضرب و ضرب عدد مختلط در توابع، تشکیل یک جبر روی $\mathbb{C}$ می‌دهد. همچنین این جبر نسبت به همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده‌ی Ω بسته است.

---

[1] Unit disk

[2] Holomorphic mapping

[3] Biholomorphic mapping

تعریف ۵.۲.۱

یک نگاشت تمام‌ریخت به $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را نگاشت برخه‌ریخت [۴] می‌نامند.

تعریف ۶.۲.۱

یک تابع را تام[۵] می‌گویند، اگر روی تمام $\mathbb{C}$ تعریف شده و تمام‌ریخت باشد.

لم شوارتز [۶] ۷.۲.۱

اگر f روی دیسک واحد هلومورف باشد و

$$f(0) = 0 \quad (ii \qquad , \qquad |f(z)| \leq 1 \quad \forall z \quad (i$$

آن‌گاه:

$$|f'(0)| \leq 1 \qquad \text{و} \qquad |f(z)| \leq |z|$$

و اگر وجود داشته باشد $z \neq 0$ به‌طوری‌که $|f(z)| = z$ و یا اگر $|f'(0)| = 1$، آن‌گاه f یک دوران است.

یعنی: یک عدد مختلط α با قدرمطلق واحد وجود دارد به‌طوری‌که $f(z) \equiv \alpha z$.

برای مشاهده‌ی اثبات به قضیه‌ی (۱.۵.۵) مرجع [۸] مراجعه شود.

قضیه‌ی نگاشت ریمان [۷] ۸.۲.۱

اگر U یک زیرمجموعه‌ی باز همبند ساده از $\mathbb{C}$ باشد و $U \neq \mathbb{C}$، آن‌گاه U معادل همدیس با $\mathbb{D}$ است.

برای مشاهده‌ی اثبات به قضیه‌ی (۱.۳.۱۱) مرجع [۸] مراجعه شود.

---

[۴] Meromorphic mapping

[۵] Eentire function

[۶] Schwarz lemma

[۷] Riemann mapping theorem

تعریف ۹.۲.۱

اگر U یک زیرمجموعه‌ی باز در $\mathbb{C}$ و $f \in \mathcal{C}^2(U)$ باشد و همچنین $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ برقرار باشد، آن‌گاه f را تابع همساز[۸] می‌نامیم.

یک تابع مختلط‌مقدار، همساز است، اگر و فقط اگر قسمت‌های حقیقی و موهومی آن همساز باشند.

تعریف ۱۰.۲.۱

یک تابع f روی M زیرهمساز[۹] نامیده می‌شود، اگر و فقط اگر برای هر دامنه‌ی U روی M و هر تابع همساز h که $h \leq f$ روی U باشد، آن‌گاه $h \equiv f$ روی D، یا $h > f$ روی U.

- واضح است که هر تابع همساز، زیرهمساز نیز می‌باشد.

اصل ماکسیمم مطلق توابع زیرهمساز ۱۱.۲.۱

اگر f زیرهمساز روی U باشد و

$$\exists p \qquad s.t \qquad \forall z \in U \quad f(p) \geq f(z)$$

آن‌گاه f ثابت است.

برای مشاهده‌ی اثبات به قضیه‌ی (۱.۲.۷) مرجع [۸] مراجعه شود.

۱—۳ خمینه‌ی مختلط یک بعدی

از آن‌جا که بحث ما به بعد مختلط یک محدود است، از بحث کلّی درباره‌ی خمینه‌های مختلط با بعد بیشتر خودداری می‌کنیم. فقط اشاره کنیم که:

در بعد متناهی، خمینه‌های مختلط حالت خاصی از منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر هستند که فضای نمونه‌ی آن‌ها $\mathbb{C}^n$ و نگاشت‌های گذر نگاشت‌های تمام‌ریخت می‌باشند. یک نگاشت $f : U \to V$ که U و V بازهایی در فضاهای $\mathbb{C}^n$ و $\mathbb{C}^m$

[۸] Harmonic

[۹] Subharmonic

هستند را تمام‌ریخت گوییم، هرگاه دیفرانسیل‌پذیر مختلط باشد. به‌عبارت دیگر: به‌ازای $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j} = 0$.

برای خمینه‌ی یک بعدی می‌توان به تعاریف زیر بسنده کرد:

تعریف ۱.۳.۱

فرض کنید M یک فضای توپولوژیک هاوسدورف با پایه‌ی شمارا باشد که برای هر نقطه‌ی $p \in M$ یک همسایگی از p در M مانند U موجود باشد، به قسمی که با یک زیرمجموعه‌ی باز در $\mathbb{C}$ همسان‌ریخت[۱۰] باشد، آن‌گاه M را یک خمینه‌ی توپولوژیک با بعد مختلط یک می‌نامند. حال اگر φ نگاشت موردنظر باشد، آن‌گاه دوتایی (U, φ) را یک نقشه در نقطه‌ی p می‌نامند.

تعریف ۲.۳.۱

فرض کنید که M یک خمینه‌ی توپولوژیکی با بعد مختلط یک باشد و (U, φ) و (V, ψ) دو نقشه در آن باشند، به قسمی که $U \cap V \neq \emptyset$، آن‌گاه نگاشت ترکیب $\psi \circ \varphi^{-1}$ از $\varphi(U \cap V)$ به $\psi(U \cap V)$ را نگاشت گذر از φ به ψ می‌نامیم.

تعریف ۳.۳.۱

فرض کنید که M یک خمینه‌ی توپولوژیکی با بعد مختلط یک باشد و $F = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ یک خانواده از نقشه‌ها در آن باشد، آن‌گاه این خانواده را یک ساختار تحلیلی یا هموار روی M می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

i) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$،

ii) برای هر $\alpha, \beta \in A$، نگاشت گذر $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ یک نگاشت دوسوتمام‌ریخت بین دامنه‌های مربوط در $\mathbb{C}$ باشد،

iii) خانواده‌ی F نسبت به خاصیت (ii) ماکسیمال باشد؛ یعنی اگر (V, ψ) یک نقشه‌ی دیگر باشد و برای هر $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in F$ نگاشت‌های $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ و $\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}$ یک‌ریخت باشند، آن‌گاه $(V, \psi) \in F$.

تعریف ۴.۳.۱

خمینه‌ی توپولوژیکی M با بعد مختلط یک همراه با یک ساختار تحلیلی $F = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ را یک خمینه‌ی

[۱۰] Homeomorphic

مختلط یک بعدی می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنید که M و N خمینه‌های مختلط یک بعدی و $f: M \to N$ نگاشت بین آن‌ها باشد، آن‌گاه f را تمام‌ریخت می‌نامند، هرگاه برای هر نقشه‌ی (U,φ) در ساختار تحلیلی M و هر نقشه‌ی (V,ψ) در ساختار تحلیلی N باشرط $f(U) \subset V$ با نگاشت زیر تمام‌ریخت باشد:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{C} \to \psi\left(f\left(U\right)\right) \subset \mathbb{C}$$

- اگر f یک‌به‌یک و پوشا و f و f^{-1} هر دو با تعریف بالا تمام‌ریخت باشند آن‌گاه f را دوسوتمام‌ریخت می‌نامند.

تعریف ۶.۳.۱

فرض کنید که M و N دو خمینه‌ی مختلط باشند آن‌گاه:

- $\mathcal{C}(M,N)$ مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های پیوسته از M به N است.
- $\mathrm{Hol}(M,N)$ مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های تمام‌ریخت از M به N است.
- $\mathrm{Aut}(M)$ مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های دوسوتمام‌ریخت $\phi: M \to M$ می باشد.

$\mathrm{Aut}(M)$ با عمل ترکیب نگاشت‌ها، یک گروه است. توپولوژی روی $\mathrm{Aut}(M)$ را توپولوژی فشرده ـ باز می‌گیریم سازد.

تعریف ۷.۳.۱

فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک و $\mathcal{C}(X,Y)$ مجموعه‌ی نگاشت‌های پیوسته از X به Y باشد. زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی K از X و مجموعه‌ی باز U از Y را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$\Gamma_{K,U} = \{f \in C(X,Y); f(K) \subset U\}.$$

روی $C(X,Y)$ توپولوژی تولید شده به‌وسیله‌ی زیرپایه‌ی

$$\{\Gamma_{K,U}; \text{فشرده در } X \text{ و } U \text{ باز در } Y \ K\}$$

را توپولوژی فشرده ـ باز می‌نامند.

قابل توجه است که این مجموعه‌ها تحت اشتراک بسته نیستند و تشکیل پایه‌ی توپولوژی نمی‌دهند؛ اما یک زیرپایه برای توپولوژی فشرده ـ باز ایجاد می‌کنند؛ یعنی با اضافه کردن همه‌ی اشتراک‌های متناهی به یک پایه تبدیل می‌شود. در حقیقت مجموعه‌های باز در توپولوژی فشرده‌ـ باز، اجتماع‌های دلخواه از اشتراک‌های متناهی اعضای $\Gamma_{K,U}$ هستند. اگر Y یک فضای یکنواخت باشد(به‌عنوان مثال اگر Y یک فضای متریک باشد) آن‌گاه این توپولوژی با توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده معادل است. به عبارتی دیگر زیردنباله‌ی (f_n) در توپولوژی فشرده ـ باز به f همگراست، اگر و فقط اگر برای هر زیرفضای فشرده‌ی K از X، (f_n) به‌طور یکنواخت روی K به f همگراشود.

- در هر گروه خودریختی همگرایی یکنواخت (f_n) به f روی فشرده‌ها، منجر به همگرایی نقطه به نقطه‌ی دنباله‌ی ضرایب (f_n) به ضرایب f می‌شود و بالعکس. که ما در این‌جا بررسی این موضوع را برای خودریختی‌های صفحه‌ی مختلط می آوریم:

فرض کنیم $f_n(z) = a_n z + b_n$ و $f(z) = az + b$ خودریختی‌های $\mathbb{C}$ باشند به‌طوری‌که برای هر Kی فشرده: $f_n \xrightarrow{uni} f$ یعنی

$$\|f_n - f\| \xrightarrow[k = \overline{D(0;R)}]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \max_{|z| \leq R \to \infty} |a_n z + b_n - (az + b)| \to 0$$

$$\Leftrightarrow |a_n - a|\, R + |b_n - b| \to 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a_n - a| \to 0 \\ |b_n - b| \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \to a \\ b_n \to b \end{cases}$$

و این یعنی دنباله‌ی b_n و a_n به ترتیب به a و b همگرا هستند.

تعریف ۸.۳.۱

بازه‌ی $I = [0,1]$ رادر نظر می‌گیریم. اگر p و q دو نقطه از M و $C_1 : I \to M$ و $C_2 : I \to M$ دو منحنی روی M با

نقطه‌ی ابتدایی p و نقطه‌ی انتهایی q باشند، می‌گوییم C_1 با C_2 هوموتوپ است($C_1 \sim C_2$)، اگر یک نگاشت پیوسته‌ی $h : I \times I \to M$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\forall t \in I \qquad h\,(t,0) = C_1(t) \qquad , \qquad h\,(t,1) = C_2(t)$$

$$\forall u \in I \qquad h\,(0,u) = p \qquad , \qquad h\,(1,u) = q.$$

رابطه‌ی هوموتوپی بین دو منحنی یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و مجموعه‌ی همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی منحنی‌های بسته‌ی گذرنده از p یک گروه تشکیل می‌دهد که آن‌را گروه بنیادی M بر مبنای p می‌نامند و با نماد $\pi_1(M)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۹.۳.۱

یک خمینه، همبند ساده نامیده می‌شود، اگر گروه اصلی آن فقط شامل عضو همانی باشد. بنابراین هر منحنی بسته در یک ناحیه‌ی همبند ساده می تواند به‌طور پیوسته به یک نقطه منقبض شود. در واقع یک ناحیه همبند ساده است، اگر هر منحنی بسته در آن با یک نقطه هوموتوپ باشد.

فصل دوم

کلیاتی راجع به رویه های ریمان

۲—۱ مقدمه

در ریاضیات و به‌ویژه در آنالیز مختلط، یک رویه‌ی ریمان که در ابتدا به وسیله‌ی برنهارد ریمان [۱] مطالعه شده و بعداً به‌نام او نام‌گذاری شده، یک خمینه‌ی مختلط یک بعدی همبند است.

نکته‌ی مهم در مطالعه‌ی رویه‌های ریمان مربوط به نگاشت‌های تمام‌ریخت است که ممکن است بین آن‌ها تعریف شود. امروزه رویه‌های ریمان برای مطالعه‌ی رفتار عمومی همین توابع مورد بررسی قرار می‌گیرند.

رویه‌های ریمان بسیاری وجود دارند. اما همه‌ی آن‌ها را می‌توان با توجه به خمینه‌ی پوششی‌اشان به سه دسته تقسیم کرد. در واقع تمام رویه‌های ریمان را می‌توان به‌صورت خارج‌قسمت این رویه‌های پوششی عمومی نوشت.

می توان نشان داد که همه‌ی رویه‌های ریمان پوششی عمومی همبند ساده هستند. در قضیه ی یکنواخت‌سازی رویه‌های ریمان همبند ساده ثابت می‌کنیم که تنها سه نوع رویه‌ی ریمان همبند ساده از لحاظ همدیسی وجود دارد که عبارتند از: کره‌ی ریمان، صفحه‌ی مختلط و قرص یکه. که پوشش عمومی بیشترین رویه‌های ریمان، قرص یکه است.

۲—۲ تعریف رویه‌ی ریمان و چند مثال ابتدایی

تعریف ۲.۲.۱

هر خمینه‌ی مختلط یک بعدی همبند را یک رویه‌ی ریمان می نامیم.

در واقع یک خمینه‌ی M یک رویه‌ی ریمان نامیده می شود اگر:

(i) یک مجموعه‌ی $\{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$ وجود داشته باشد که برای مجموعه‌ی اندیسهای I، $\{U_i\}_{i\in I}$ یک پوشش باز M و φ_i یک همسان‌ریختی از U_i به روی یک مجموعه‌ی باز در $\mathbb{C}$ باشد.

(ii) اگر $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ آنگاه $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ یک نگاشت یک‌ریخت از $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ به‌روی $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ باشد. یعنی $f\,(z) = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{(z)}$ یک تابع تحلیلی از z در $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ باشد.

[۱] Bernhard Riemann

تعریف ۲.۲.۲

هر مجموعه از نقشه‌ها(نه لزوماً ماکسیمال) که M را بپوشاند و نگاشت‌های گذر آن تمام‌ریخت باشد یک مجموعه از نقشه‌های مختصات تحلیلی نامیده می‌شوند.

- برای تعریف یک رویه‌ی ریمان لازم نیست حتماً یک مجموعه‌ی ماکسیمال ازنقشه‌های مختصات تحلیلی را مشخص کنیم، زیرا اگر M یک خمینه‌ی همبند یک بعدی مختلط با دو مجموعه از نقشه‌های مختصات تحلیلی $V=\{V_\beta,\psi_\beta\}_{\beta\in B}$ و $U=\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ باشد، یک ترتیب جزیی روی مجموعه‌ی نقشه‌های مختصات تحلیلی بصورت زیر تعریف می کنیم:

$U>V$، اگر برای هر $\alpha\in A$ یک $\beta\in B$ وجود داشته باشد به طوری که $U_\alpha\subset V_\beta$ و $\varphi_\alpha=\psi_\beta\mid U_\alpha$.

طبق لم زورن می‌توان نتیجه گرفت که یک مجموعه‌ی دلخواه از نقشه‌های مختصات تحلیلی می تواند به یک مجموعه از نقشه‌های مختصات تحلیلی ماکسیمال توسعه یابد؛ پس برای تعریف یک رویه‌ی ریمان کافی است یک پوشش با هر مجموعه از نقشه‌های مختصات تحلیلی را مشخص کنیم.

- اگر M یک رویه‌ی ریمان و $V\subset U$ و f تمام‌ریخت و یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه $\{V,f\circ\varphi\mid V\}$ هم یک نقشه‌ی مختصات روی M است.

تعریف ۳.۲.۲

فرض کنیم $f:M\to N$ یک نگاشت غیر ثابت بین رویه های ریمان M و N باشد و $p\in M$.

مختصات‌های موضعی φ روی M و ψ روی N را طوری انتخاب کنیم که

$$\psi\left(f\left(p\right)\right)=0 \qquad , \qquad \varphi\left(p\right)=0.$$

بر حسب این مختصات موضعی می توانیم بنویسیم:

$$\forall n>0 \quad , \quad a_n\neq 0 \qquad \psi=f\left(\varphi\right)=\sum_{k\geq n}a_k\varphi^k.$$

از آن‌جاکه هر تابع تمام‌ریخت هیچ جا صفر، روی یک دیسک دارای لگاریتم است؛ پس یک تابع تمام‌ریخت h $(h\left(0\right)\neq 0)$ وجود دارد بطوری که:

$$\psi=\varphi^n h(\varphi)^n=\left(\varphi h(\varphi)\right)^n$$

و $\varphi h\left(\varphi\right)$ هم یک مختصات موضعی روی M است که در p صفر می شود و چون $\psi=\left(\varphi h\left(\varphi\right)\right)^{n}$، پس می توان هر نگاشت غیرثابت $f:M\to N$ بین رویه‌های ریمان M و N را به صورت $f=z^{n}$ در نظر گرفت.

این عدد n عدد انشعاب f روی p است و می گوییم f روی p مقدار $f\left(p\right)$ را n بار می دهد یا f روی p چند گانگی n دارد. عدد $n-1$ عدد شاخه ای f روی p نامیده شده و با نماد $b_{f}\left(p\right)$ نمایش داده می شود.

- هر تابع غیر ثابت برخه‌ریخت ساده می‌تواند ساختار یک رویه‌ی ریمان را مشخص کند.

اگر f یک تابع برخه‌ریخت روی M و $p\in M$ باشد و $b_{f}\left(p\right)=n-1$، آن‌گاه یک مختصات موضعی که در p صفر می شود، به صورت زیر داده می شود:

$$\begin{cases} (f-f(p))^{\frac{1}{n}} & \text{اگر}\quad f(p)\neq\infty \\ f^{-\frac{1}{n}} & \text{اگر}\quad f\left(p\right)=\infty \end{cases}$$

مثال ۴.۲.۲

ساده ترین مثال از یک رویه‌ی ریمان غیرفشرده صفحه‌ی مختلط $\mathbb{C}$ است؛ که نقشه‌ی مختصات $(\mathbb{C},id)$ روی آن ساختار رویه‌ی ریمان را مشخص می کند.

مثال‌های مهم از رویه‌های ریمان غیرفشرده، با استفاده از اصل پیوستگی تحلیلی به‌دست می آید و هر رویه‌ی ریمان غیرفشرده، می‌تواند توابع غیرثابت تمام‌ریخت را بپذیرد.

مثال ۵.۲.۲

صفحه‌ی مختلط توسعه یافته یا $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ساده ترین مثال از یک رویه‌ی ریمان فشرده است. نقشه‌هایی که ساختار رویه‌ی ریمان را روی آن تعریف می کنند عبارتند از: $\{U_i,\varphi_i\}_{i=1,2}$ که

$$\varphi_1(z)=z \quad , \quad U_1=\mathbb{C}$$

$$\varphi_2(z)=\tfrac{1}{z} \quad , \quad U_2=(\mathbb{C}-\{0\})\cup\{\infty\}$$

و همچنین $\frac{1}{\infty}=0$.

نگاشت‌های گذر غیربدیهی که در آن $k,j=1,2 \;\;,\;\; k\neq j$، عبارتند از:

$$f_{kj}:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}-\{0\}$$
$$f_{kj}(z)=\frac{1}{z}$$

- طبق اصل ماکسیمم مطلق، روی یک رویه‌ی ریمان فشرده، هر تابع تمام‌ریخت، ثابت است.

مثال ۶.۲.۲

هر زیر مجموعه‌ی باز یک رویه‌ی ریمان، یک رویه‌ی ریمان است که نقشه‌های مختصات آن با محدود کردن نقشه‌های های مختصات M به دست می آید.

۲—۳ خمینه‌ی پوششی عمومی

تعریف ۱.۳.۲ خمینه M^* یک خمینه‌ی پوششی M گفته می‌شود اگر یک نگاشت پوشای پیوسته $f: M^* \to M$ (که نگاشت پوششی نامیده می شود) وجود داشته باشد که برای هر $p^* \in M^*$ داشته باشیم $f(p^*) = p \in M$ بطوری که :

(i) یک مختصات موضعی φ^* روی M^* وجود داشته باشد که $\varphi^*(p^*) = 0$،

(ii) یک مختصات موضعی φ روی M وجود داشته باشد که $\varphi(f(p^*)) = 0$،

(iii) یک عدد صحیح $n > 0$ وجود داشته باشد به طوری که f با $\varphi = (\varphi^*)^n$ برحسب این مختصات های مو ضعی نشان داده شود .

p را تصویر p^* روی M گوییم و نگاشت f نگاشت تصویر M^* به M است.

- ازآنجاکه نگاشت $\varphi = (\varphi^*)^n$ ، n به یک است، در حالی که φ و φ^* یک به یک هستند؛ پس n نقطه در همسایگی p^* متناظر با هر نقطه در همسایگی p وجود دارد. اگر $n > 1$، نقطه‌ی p_0^* یک نقطه‌ی شاخه‌ای از مرتبه $n-1$ است و اگر $n = 1$ باشد، p_0^* یک نقطه‌ی منظم نامیده می شود.

- در نگاشت $\varphi = (\varphi^*)^n$ هر نقطه $\varphi_1^* \neq 0$ یک همسایگی (نه شامل $\varphi_1^* \neq 0$) دارد که به‌طور پیوسته و یک‌به‌یک روی یک همسایگی $(\varphi_1^*)^n$ نگاشت می شود (به‌عبارت دیگر، ما خودمان را به یک شاخه از تابع $\varphi = (\varphi^*)^n$ محدود می کنیم) بنابراین هر نقطه در همسایگی محذوف یک نقطه‌ی شاخه‌ای p_0^* یک نقطه‌ی منظم است و نقاط شاخه‌ای نقاط تنها روی M^* هستند.

تعریف ۲.۳.۲

اگر برای همه‌ی نقاط $p^* \in M^*$ ، $n = 1$ باشد، آنگاه M^* را پوشش هموار می نامیم؛ یعنی اگر M^* هیچ نقطه‌ی شاخه‌ای نداشته باشد، پوشش هموار است .

- هر خمینه‌ی M با نگاشت همانی به عنوان نگاشت تصویر،خمینه‌ی پوششی هموار خودش است.

تعریف ۳.۳.۲

M^* را یک خمینه‌ی پوششی نامحدود[۲] از M می‌نامیم، به شرطی که برای هر منحنی c روی M و هر نقطه p^* که $f(p^*) = c(0)$ یک منحنی c^* روی M^* با نقطه‌ی ابتدایی p^* وجود داشته باشد که $f(c^*) = c$. منحنی c^* یک بالابر[۳] c است.

قضیه مونودرمی[۴] ۴.۳.۲

اگر M^* یک خمینه‌ی پوششی نامحدود هموار از M باشد و c_0 و c_1 دو منحنی روی M باشند که هوموتوپ هستند و c_0^* و c_1^* بالابرهای c_0 وc_1 با نقطه‌ی ابتدایی یکسان باشند، آنگاه c_0^* و c_1^* هوموتوپند؛ به ویژه منحنی‌های c_0^* و c_1^* دارای نقاط انتهایی یکسان هستند.

برای مشاهده‌ی اثبات به قضیه‌ی (۴.۴) مرجع [۲۰] مراجعه کنید.

قضیه‌ی بعدی ارتباط بین خمینه‌ی پوششی و زیرگروه‌های گروه اصلی را بیان می‌کند.

قضیه ۵.۳.۲

اگر M^* یک خمینه‌ی پوششی نامحدود هموار M باشد، کلاس‌های هوموتوپی همه‌ی منحنی‌های بسته‌ی گذرنده از $p \in M$ که تصویر منحنی‌های بسته از $p^* \in M^*$ روی p هستند، تشکیل یک زیر گروه $K(p^*)$ از گروه اصلی $\pi_1(M)$ را می دهند. برای نقاط متفاوت p_i^* روی p، گروه‌های $K(p_i^*)$ تشکیل یک مجموعه‌ی کامل از زیرگروه‌های مزدوج

---

۲ UNlimited Manifold

۳ Lift

۴ Monodromy theorem