بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی‌کاربردی-تحقیق در عملیات

عنوان

روش بهینه سازی استوار برای مسائل مکان‌یابی

استاد راهنما

دکتر حسین تقی زاده کاخکی

استاد مشاور

دکتر رضا قنبری

نگارنده

هانیه نوری

زمستان ۱۳۹۲

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: روش بهینه سازی استوار برای مسائل مکان‌یابی

نام نویسنده: هانیه نوری

استاد راهنما: دکتر حسین تقی زاده کاخکی

استاد مشاور: دکتر رضا قنبری

دانشکده: علوم ریاضی گروه: ریاضی کاربردی رشته تحصیلی: ریاضی‌کاربردی-تحقیق در عملیات

تاریخ تصویب: ۱۳۹۲/۰۵/۲۲ تاریخ دفاع: ۱۳۹۲/۱۱/۷

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد تعداد صفحات: ۷۳

چکیده پایان‌نامه : در روش‌های متداول برنامه‌ریزی ریاضی فرض می‌شود که داده‌های مسأله به‌طور قطعی و دقیق مشخص هستند اما در عمل به دلیل خطای اندازه‌گیری، یا خطای پیش بینی و یا خطای پیاده‌سازی با عدم قطعیت پارامترهای مسأله مواجه هستیم، در نتیجه جواب بهینه یک مسأله با مقادیر قطعی یا باصطلاح اسمی، به دلیل وجود همین عدم قطعیت، ممکن است نه تنها بهینه بلکه اصلا جواب قابل قبول نیز برای مسأله نباشد.

برای لحاظ کردن این عدم قطعیت محققین سعی در ارائه مدل‌های مختلفی کرده‌اند. یکی از این روش‌ها که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است تحت عنوان بهینه‌سازی استوار مطرح شده است.

در این پایان نامه پس از ارائه تعاریف و مفاهیم مقدماتی بهینه‌سازی استوار دو مدل معروف در این زمینه، مدل بن-تال و نمیروسکی و مدل برتسیماس و سیم را بررسی کرده و آنها را برای مسأله‌ی مکان‌یابی چند دوره‌ای بکار می‌گیریم. بالاخره نتایج محاسباتی برای مسائل با ابعاد مختلف گزارش شده‌اند.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی استوار،عدم قطعیت، مسأله‌ی مکان‌یابی، داده اسمی

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : روش بهینه سازی استوار برای مسائل مکان‌یابی

اینجانب هانیه نوری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر حسین تقی زاده کاخکی متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام ''دانشگاه فردوسی مشهد '' و یا ''Ferdowsi University of Mashhad'' به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

تقدیم به

ساحت مقدس آفتاب توس

هم او که وجودش دلیلی بود برای آمدن و بهانه ای برای ماندن...

و اسوه های زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم،

پدر و مادر عزیزم

و همراه امروز و فردایم،

همسر مهربانم

هوالعلیم

زیباترین نام را بر زبان جاری می کنم ... که هر کس زبان به حمد تو گشود بی‌تردید نگاه تو بر او افتاده. پس بر قلبم آن جاری کن که خود می‌پسندی در ثنایت لب گشایم.
در وادی معرفت نگنجد، سرچشمه هدایت نجوشد، سر بر قامت بندگی فرو نیافتد ...، گر گنجینه‌ای را که مقدسش خواندی و به آن قسم یاد کردی[1]، کوچک شمرده شود و تنها خاطره جوهر خشک شده‌ای از آن بر برگ برگِ صفحات زندگی باقی ماند.
تو علم را روشنیِ قرار دادی و فانوسی در بیغوله راه که مسیر را، راه نماید و تزکیه را مقدم بر آن دانستی تا نگاهبانش باشد که تزکیه و تعلیم در معیت هم گوهر وجودی انسان را به نور تو منور کند، پرده از واقعیات کنار زند. آن جاست که حقیقت رخ نمایاند، نظر فراتر افتد، خوان گنجینه‌های دانش رنگین شود و ... آری آنجاست که آدمی معنا یابد.
من اگر وعده‌هایم با تو زیر خروارها تل فراموشی و غفلت مدفون گردیده، اگر زشتی طغیان در نظرم زیبا جلوه‌گری می‌کند و چشمانم خشک‌تر از آن است که در مقام توبه اشکی بر آن جاری شود، بدان از سر جهل است و نسیان...اما بار الها چشمِ طمع بر رحمتت دوخته‌ام و در تمنای رهایی از ظلمت ضلالت، ترنم باران معرفتت را می‌طلبم، امید آنکه جوانه‌های حقیقت را در وجودم برویاند و انعکاس آن چشمانم را روشن کند.
اکنون چهره بر چهره خاک می‌سایم و تو را به حبیبت قسم می‌دهم که..." هر آن خصلت ناپسند که در من می‌بینی به لطف واسع خویش اصلاحش فرمای تا پسندیده شود و هر آن عیب که نفسم را به فساد بیالاید از من بازگیر و هر آن نقص که جانم را از کمال باز دارد برطرفش فرمای!"
و در آن روز که نوبت زندگانی به سر رسد و پیک مرگ حلقه بر در خانه تن بکوبد و دعوت واجب الاجابه تو از آسمان‌ها به گوش آید...پروردگارا! بر محمد (ص) و آل پاکش درود فرست و به حق ایشان عمر ما را با رستگاری به پایان آور و عاقبتمان را ختم به خیر فرمای...!

زبان قاصر است و مجال کوتاه...

تو خود قصیده‌ی مهر را از لوح نانوشته‌ی قلبم بخوان...!

---

[1] ن و القلمِ و ما یَسطُرونَ

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر حسین تقی‌زاده‌کاخکی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

از جناب آقای دکتر رضا قنبری که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر مرتضی گچ‌پزان و جناب آقای دکتر فریدون رهبرنیا که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم، برادر و خواهران مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

هانیه نوری

زمستان ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

پیش‌گفتار

برنامه‌ریزی ریاضی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که به بررسی مسائل مختلف می‌پردازد. یکی از مسائل مهم در دنیای واقعی وجود عدم قطعیت داده‌ها است، که اغلب در مسائل برنامه‌ریزی این عدم قطعیت داده‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. هدف در این تحقیق اعمال عدم قطعیت در مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط برای مسأله‌ی مکان‌یابی است.

مسأله مکان‌یابی یکی از شاخه‌های تحقیق در عملیات است که توجه به آن سبب کاهش هزینه‌ها و موفقیت واحدهای صنعتی می‌شود. مکان‌یابی مراکز، انتخاب مکان برای یک یا چند مرکز با در نظر گرفتن محدودیت‌های موجود است به گونه‌ای که هدف خاصی بهینه شود. این هدف می‌تواند هزینه حمل‌ونقل یا ارائه خدمات به مشتریان باشد.

اشتباه در تعیین محل مراکز (کارخانه‌ها) ضررهای جبران‌ناپذیری به دنبال خواهد داشت و گاهی منجر به تغییر محل کارخانه با صرف هزینه‌های زیاد شده، یا ممکن است به رکود و تعطیلی کامل کارخانه بیانجامد؛ در نتیجه مطالعات مکان‌یابی از جمله اقدامات مهم در فرایند احداث واحدهای صنعتی یا خدماتی محسوب می‌شود؛ که توجه به این مهم در موفقیت مراکز، نقش بسزایی دارد. از طرف دیگر در نظر نگرفتن عدم قطعیت نیز می‌تواند منجر به ضرر شود. یکی از پارامترهای غیر قطعی مقدار تقاضای مشتریان است؛ که اغلب مقدار پیش‌بینی شده به‌جای مقدار دقیق تقاضا ها قرار می‌گیرد، در نتیجه استفاده از بهینه سازی استوار که در آن عدم قطعیت در نظر گرفته می‌شود، سودمند خواهد بود.

در فصل اول این تحقیق تعاریف مقدماتی را ارائه می‌دهیم.

در فصل دوم در مورد بهینه‌سازی استوار بحث کرده و انواع مدل‌های استوار را مرور می‌کنیم.

در فصل سوم به معرفی برنامه‌ریزی مخروطی پرداخته و ارتباط آن با بهینه سازی استوار را در قالب یک مثال بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم مسأله‌ی مکان‌یابی چند دوره‌ای را بیان کرده و مدل‌هایی از آن، که بر پایه‌ی بهینه سازی

استوار ارائه شده است را بررسی می‌کنیم. بالاخره، چند مثال عددی را با استفاده از اینگونه مدل‌ها حل کرده و نتایج بدست آمده را ارائه می‌نماییم.

فصل ۱

تعاریف اولیه

۱.۱ تعاریف

در این فصل برخی از تعاریف و مفاهیم مورد نیاز معرفی می‌شوند.

مسأله‌ی بهینه‌سازی خطی[۱]

$$\min_{x} \quad \{c^T x + d \quad : Ax \leq b\}$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیرهای تصمیم، $d \in \mathbb{R}$ و $c \in \mathbb{R}^n$ ضرایب تابع هدف، A ماتریس محدودیت‌ها با بعد $m \times n$ و $b \in \mathbb{R}^m$ بردار سمت راست است را در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۱.۱. *داده‌های اسمی*[۲] *: مقادیر معلوم و نادقیق که به جای داده‌های قطعی در مسأله قرار می‌گیرد.*

تعریف ۲.۱.۱. *مسأله‌ی اسمی: مسأله‌ی مدل‌سازی که داده‌های آن اسمی باشد را مسأله‌ی اسمی گویند.*

تعریف ۳.۱.۱. *عدم قطعیت داده‌ها: زمانیکه داده‌های مسأله به طور قطعی مشخص نباشند، گویند داده‌ها دارای عدم قطعیت هستند.*

[۱] Linear Optimization [۲] Nominal Data

تعریف ۴.۱.۱. *مجموعه‌ی عدم قطعیت: مجموعه‌ی عدم قطعیت به صورت زیر تعریف می‌شود، که در آن Z مجموعه‌ی انحراف و z بردار انحراف است $(-۱ \leq z \leq ۱)$.*

$$U=\left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ A & b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{c} & \bar{d} \\ \bar{A} & \bar{b} \end{bmatrix}}_{\text{داده های اسمی}} + \sum_{l=۱}^{L} z_l \underbrace{\begin{bmatrix} c_l & d_l \\ A_l & b_l \end{bmatrix}}_{\text{تغییرات پایه ای}} \quad : z \in Z \subseteq \mathbb{R}^L \right\}$$

تعداد ماتریس‌های تغییرات پایه‌ای برابر L است که متناظر با تعداد داده‌های غیر قطعی است. تمام درایه‌های ماتریس تغییرات پایه‌ای برابر صفر هستند، به جز درایه‌ای که دارای عدم قطعیت است و مقدار این درایه برابر حداکثر انحراف است. برای مثال مسأله‌ی (۱.۱) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min ۲x_۱ + ۱ \\ &s.t \\ &\quad ۳x_۱ - x_۲ \leq ۲ \\ &\quad x_۱ + x_۲ \leq ۳ \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

فرض کنید ضرایب $a_{۱۲}$ و $a_{۲۱}$ غیر قطعی باشند در این صورت مجموعه‌ی عدم قطعیت به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} + z_۱ \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + z_۲ \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad : z \in Z \subseteq \mathbb{R}^۲ \right\}$$

تعریف ۵.۱.۱. *مسأله‌ی بهینه‌سازی خطی غیر قطعی[۱] : مسأله‌ی بهینه‌سازی خطی غیر قطعی مجموعه‌ی*

$$(LO_u) \min_x \quad \{c^T x + d \quad : Ax \leq b\}_{(c,d;A,b)\in U}$$

از برنامه‌های بهینه‌سازی خطی (LO) است، که دارای n متغیر و m محدودیت است. داده‌های مختلف در مجموعه‌ی عدم قطعیت $U \in \mathbb{R}^{(m+۱)\times(n+۱)}$ قرار دارند.

تعریف ۶.۱.۱. *جواب شدنی استوار: بردار $x \in \mathbb{R}^n$ جواب شدنی استوار برای (LO_u)است اگر داشته*

[۱] Uncertain Linear Optimization

باشیم

$$Ax \leq b \qquad \forall (c,d;A,b) \in U$$

تعریف ۷.۱.۱. *مقدار استوار: برای بردار دلخواه $x \in \mathbb{R}^n$، مقدار استوار $\hat{c}(x)$ از تابع هدف در $(LO)_u$، در x برابر با بیشترین مقدار از تابع هدف $cx + d$ به ازای همه‌ی داده‌ها از مجموعه‌ی عدم قطعیت است.*

$$\hat{c}(x) = \sup_{(c,d;A,b)\in U} [cx + d]$$

تعریف ۸.۱.۱. *همتای استوار[۱] :همتای استوار (RC) مسأله‌ی $(LO)_u$ از کمینه کردن مقدار استوار تابع هدف، به‌ازای جواب‌های شدنی استوار مسأله‌ی غیرقطعی بدست می‌آید و به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\min_x \{ \sup_{(c,d;A,b)\in U} [cx + d] \qquad : Ax \leq b \qquad \forall (c,d;A,b) \in U \}$$

جواب بهینه‌ی حاصل از همتای استوار مسأله‌ی $(LO)_u$، جواب بهینه‌ی استوار در $(LO)_u$ نامیده می‌شود و مقدار بهینه‌ی همتای استوار، مقدار بهینه‌ی استوار $(LO)_u$ نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱. *ضرب مستقیم[۲] : فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. حاصلضرب دکارتی[۳] A و B به صورت $A \times B$ مشخص می‌شود، که مجموعه‌ای از همه‌ی جفت‌های منظم (x,y) است، که در آن $x \in A$ و $y \in B$ است.*

اگر G_1 و G_2 دو گروه[۴] باشند حاصلضرب مستقیم G_1 با G_2 به صورت $G_1 \times G_2$ مشخص می‌شود، که مجموعه‌ای از همه‌ی جفت‌های منظم (x,y) است، که در آن $x \in G_1$ و $y \in G_2$ است. حاصلضرب مستقیم G_1 با G_2 دارای یک عملگر است. اگر x_1 و x_2 عضوی از G_1 و y_1 و y_2 عضوی از G_2 باشند $(x_1,y_1) \times (x_2,y_2)$ به صورت $(x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$ تعریف می‌شود، که "$\cdot$" در مختص اول عملگر G_1 و "$\cdot$" در مختص دوم عملگر G_2 است [۲۳].

تعریف ۱۰.۱.۱. *مخروط: مجموعه‌ی $K \subseteq \mathbb{R}^n$ مخروط است هرگاه، برای هر $x \in K$ و برای هر $\alpha \geq 0$ داشته باشیم $\alpha x \in K$.*

[۱] Robust Counterpart [۲] Direct Products [۳] Cartesian Cross Products [۴] Group

تعریف ۱۱.۱.۱. مخروط محدب: مجموعه‌ی $K \subseteq \mathbb{R}^n$ مخروط محدب است هرگاه، هم مخروط باشد و هم محدب باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. دوگان مخروط: K^* را دوگان مخروط K گوییم هرگاه

$$K^* = \{y : \quad x^T y \geq 0 : \quad \forall x \in K\}.$$

تعریف ۱۳.۱.۱. مخروط نوک‌دار[۱] : مخروط محدب K نوک‌دار نامیده می‌شود هرگاه شامل خطی نباشد، که از مبدأ بگذرد، یعنی:

$$K \cap \{-K\} = \{0\}$$

تعریف ۱۴.۱.۱. وجه مخروط: اگر K یک مخروط باشد، $F \subseteq K$ یک وجه از مخروط K است اگر F یک زیر مخروط باشد و اگر

$$x, y \in K : x + y \in F \Rightarrow x, y \in F.$$

مجموعه‌ی همه‌ی وجه‌های K با $I(K)$ مشخص می‌شود [۲۲].

تعریف ۱۵.۱.۱. شعاع کرانگی[۲] : اگر $F \in I(K)$ یک بعدی باشد آنگاه F یک شعاع کرانگی از K است [۲۲].

تعریف ۱۶.۱.۱. مخروط چند وجهی[۳] : یک مخروط چند وجهی است؛ اگر و فقط اگر یک مجموعه‌ی متناهی از شعاع‌های کرانگی داشته باشد [۲۲].

---

[۱] Pointed Cone [۲] External Ray [۳] Polyhedral Cone

فصل ۲

بهینه‌سازی استوار

۱.۲ مقدمه

در هنگام مدل‌سازی مسائل بهینه‌سازی خطی، برخی از داده‌های مسأله به طور دقیق و قطعی مشخص نیستند. از جمله دلایل رایج برای عدم قطعیت داده‌ها، خطای پیش‌بینی، خطای اندازه‌گیری و خطای پیاده‌سازی است.
برای مثال در مسأله‌ی مکان‌یابی تسهیلات در هنگام مدل‌سازی مسأله مقدار تقاضای مشتریان و یا موجودی انبارها به طور قطعی مشخص نیستند، در این صورت مجبور به قرار دادن مقادیر پیش‌بینی شده به جای مقادیر قطعی داده‌ها در مدل هستیم. این خطا، خطای پیش‌بینی است. برخی دیگر از داده‌های مسأله مانند میزان مواد خام یک محصول را نمی‌توان به طور دقیق اندازه گرفت در نتیجه مقادیر اسمی بدست آمده را باید گرد کرد، این داده‌ها باعث خطای اندازه‌گیری می‌شوند. برخی از متغیرهای تصمیم گیری را نمی‌توان به طور دقیق همانگونه که محاسبه شده‌اند، اجرا کرد. مانند پارامترهای دستگاه‌های فیزیکی، در نتیجه خطای پیاده‌سازی به وجود می‌آید.

در واقع میزان سهم متغیر x_j در سمت چپ محدودیت i برابر با حاصلضرب $a_{ij}x_j$ است. در صورتی که متغیر تصمیم x_j با خطای پیاده‌سازی ϵ همراه باشد؛ یعنی $x_j \longrightarrow x_j + \epsilon$، می‌توان عبارت $a_{ij}\epsilon$ را به سمت راست محدودیت i اضافه کرد؛ که این معادل انحراف $b_i \longrightarrow b_i - a_{ij}\epsilon$ در سمت راست محدودیت است.

در روش‌های سنتی حل مسأله‌ی بهینه‌سازی خطی، میزان کم انحراف داده‌ها از مقادیر واقعی آنها (در حدود یک درصد و یا کمتر)، در نظر گرفته نمی‌شود و مسأله با مقادیر اسمی حل می‌شود به این امید که میزان کم انحراف داده‌ها تأثیری در شدنی بودن[1] و بهینگی[2] جواب مسأله نداشته باشد و یا تأثیر آن کم باشد. در صورتی که در برخی از موارد انحراف کوچک از داده‌ها می‌تواند تأثیر غیر قابل اجتنابی بر جواب بهینه‌ی مسأله داشته باشد و یا حتی ممکن است جواب بهینه‌ی اسمی نشدنی تولید کند. به این معنی که جواب بهینه‌ی بدست آمده از مسأله‌ی اسمی ممکن است در ناحیه‌ی شدنی مسأله با داده‌های واقعی قرار نگیرد. مثال ۱.۱.۲ برگرفته از [۱۰] به درک این موضوع کمک می‌کند.

مثال ۱.۱.۲. *شرکتی دو نوع داروی ۱ و ۲ را تولید می‌کند. داروها شامل عامل فعال A هستند، که از ماده‌ی خام خریداری شده از بازار بدست می‌آید. دو نوع ماده‌ی خام وجود دارد، ماده‌ی خام ۱ و ماده‌ی خام ۲. هدف پیدا کردن برنامه‌ای است، که سود شرکت را بیشینه کند.*

مسأله دارای چهار متغیر است. متغیرهای تصمیم Raw_1 و Raw_2 مربوط به مواد خام خریداری شده و متغیرهای تصمیم $Drug_1$ و $Drug_2$ نشان‌دهنده‌ی داروهای تولید شده هستند.

یادآوری

برای مدل کردن مسأله توجه کنید که یک مسأله بهینه‌سازی با تابع هدف محدب بصورت زیر

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &s.t \\ &\qquad Ax = b \end{aligned}$$

را می‌توان با اضافه کردن متغیر جدید مثلا t بصورت معادل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\min t \\ &s.t \\ &\qquad f(x) \leq t \\ &\qquad Ax = b. \end{aligned}$$

[1] Feasibility [2] Optimality

جدول ۱.۲: منابع

بودجه	نیروی انسانی	تجهیزات	حجم ماده خام ذخیره شده
۱۰۰۰۰۰	۲۰۰۰	۸۰۰	۱۰۰۰

جدول ۲.۲: حجم ماده خام

مواد خام	قیمت خرید هر کیلوگرم	حجم عامل فعال A در هر کیلوگرم
ماده خام ۱	۱۰۰٫۰۰	۰٫۰۱
ماده خام ۲	۱۹۹٫۹۰	۰٫۰۲

جدول ۳.۲: داده‌های تولید دارو

	داروی ۱	داروی ۲
هزینه فروش در هر ۱۰۰۰ بسته	۶۲۰۰	۶۹۰۰
حجم عامل A در هر ۱۰۰۰ بسته	۰٫۵۰۰	۰٫۶۰۰
نیروی انسانی مورد نیاز برای هر ۱۰۰۰ بسته	۹۰٫۰	۱۰۰
تجهیزات مورد نیاز برای هر ۱۰۰۰ بسته	۴۰٫۰	۵۰٫۰
هزینه‌های عملیاتی برای هر ۱۰۰۰ بسته	۷۰۰	۸۰۰