دانشگاه زنجان

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

گروه‌های متناهی با درجه سرشت‌های غیرخطی متوالی

دانشجو:

سمیه معینی

استاد راهنما:

دکتر عباس جعفرزاده

استاد مشاور:

دکتر سید مجید جعفریان امیری

بهمن‌ماه ۱۳۹۰

تقدیم

این پایان‌نامه را تقدیم می‌کنم به پدر و مادر عزیزم که با صبر و شکیبایی مرا در تمام طول زندگی یاری فرمودند.

تشکر و قدردانی

در ابتدا خداوند متعال را شاکرم که در تنهاترین لحظات زندگی‌ام مرا به حال خودم وانمی‌گذارد.
در این‌جا لازم می‌دانم از کلیه‌ی کسانی که در انجام این پایان‌نامه مرا یاری نمودند تشکر نمایم. از اساتید گرامی جناب آقایان دکتر جعفرزاده، استاد راهنما و دکتر جعفریان امیری، استاد مشاور به‌خاطر همکاریشان در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه، کمال تشکر و قدردانی را دارم.
همچنین از خانواده و همسر عزیزم که مرا در راستای این پژوهش یاری نمودند و تنهایم نگذاشتند صمیمانه تشکر می‌نمایم .

چکیده

فرض کنیم G گروهی متناهی، $Irr(G)$ مجموعه‌ی تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر (مختلط) G و $cd(G)$ مجموعه درجات آنها باشد. موضوع اصلی این پایان‌نامه مطالعه‌ی گروه‌هایی مانند G است که برای آنها $cd(G)$ یا $cd(G) \setminus \{۱\}$ مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت متوالی باشند. چنین گروه‌هایی، CCD-گروه نام دارند. به‌خصوص نشان می‌دهیم که اگر $cd(G) = \{۱, ۲, ..., k\}$، آنگاه یا $k < ۴$ و G حل‌پذیر است یا $k = ۶$ و G زیرگروهی چون H دارد که $H \cong SL(۲, ۵)$ و $G = HZ(G)$.

فهرست مطالب

فهرست مطالب

harfi

مقدمه

یکی از خصوصیات جالب نظریه‌ی نمایش این است که دو شاخه از شاخه‌های اصلی ریاضیات؛ یعنی نظریه‌ی گروه‌ها و جبرخطی، در این نظریه درهم می‌آمیزند. در این نظریه راه‌های نشان دادن یک گروه به صورت گروهی از ماتریس‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این نظریه نه تنها فی‌نفسه زیباست، بلکه یکی از ابزارهای اساسی شناخت کامل گروه‌های متناهی است. به عنوان مثال، بسیاری اوقات فوق‌العاده مهم است که گروهی را به‌طور ملموس در دست داشته باشیم؛ این امر با یافتن نمایشی از گروه به صورت گروهی از ماتریس‌ها ممکن می‌شود. از سال ۱۸۹۶ فروبنیوس و دیگران نظریه‌ی نمایش گروه‌ها با ماتریس‌ها را بسط دادند. یکی از ابزارهای اساسی محاسبه در نظریه‌ی نمایش‌ها، نظریه‌ی سرشت است. این نظریه توسط فروبنیوس ابداع شد و سپس توسط ریاضیدانانی چون برنساید و براور توسعه یافت.

به‌طورکلی، در زمینه‌ی درجه سرشت‌های یک گروه متناهی، کتاب‌ها و مقالات زیادی ارائه شده است. از آن جمله می‌توان به مراجع [۴, ۵, ۷, ۱۱] اشاره کرد.

در سال ۱۳۸۱ پایان‌نامه‌ای تحت عنوان "گروه‌هایی با دو درجه سرشت و زیرگروه‌های نرمال آنها" در دانشگاه ارومیه ارائه و همچنین در دانشگاه علم وصنعت پایان‌نامه‌ای با عنوان "گروه‌هایی با دو درجه سرشت اکسترمم و زیرگروه‌های نرمال آنها" در سال ۱۳۸۲ دفاع شده است. در سال ۱۳۸۶ پایان‌نامه‌ی دیگری با عنوان "زیرگروه‌های نرمال گروه‌هایی که درجه سرشت غیرخطیشان ماکزیمم است" در دانشگاه تربیت مدرس ارائه گردیده است. اما در حوزه‌ی کاری این پژوهش تاکنون هیچ پایان‌نامه‌ای ارائه نشده است که این مسأله اهمیت این پژوهش را نشان می‌دهد.

فرض کنیمG گروهی متناهی باشد. یک نمایش از گروه G روی میدان F عبارت است از یک

همریختی چون ρ از G به گروهی از ماتریس‌های وارون‌پذیر $n\times n$ روی میدان F، که n را درجه‌ی نمایش نامیم. فرض کنیم

$$\rho : G \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$$

نمایشی از گروه متناهی G روی میدان اعداد مختلط باشد. به هر ماتریس $n\times n$ای چون $\rho(g)$ $(g\in G)$ عدد مختلطی که با جمع کردن تمام عناصر قطر اصلی این ماتریس حاصل می‌شود نسبت می‌دهیم و آن را $\chi(g)$ می‌نامیم؛ به عبارت دیگر $\chi(g)=tr(\rho(g))$. تابع

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

را سرشت تأمین‌شده توسط نمایش ρ می‌نامیم. درجه‌ی این سرشت عبارت است از $\chi(۱) = tr(\rho(۱))$. یعنی همان درجه‌ی نمایش ρ. هر سرشت درجه‌ی یک را یک سرشت خطی می‌نامیم؛ در غیراین‌صورت آن را سرشت غیرخطی می‌نامیم. مجموعه همه‌ی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G را با $Irr(G)$ و مجموعه‌ی درجه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G را با $cd(G)=\{\chi(۱)\mid \chi\in Irr(G)\}$ نشان می‌دهیم. یک گروه متناهی که در آن همه‌ی درجه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر غیرخطی، اعداد صحیح متوالی باشند، CCD-گروه می‌نامیم. هدف اصلی این پایان‌نامه بررسی ساختار چنین گروه‌هایی است.

این پایان‌نامه شامل ۴ فصل است. فصل اول شامل ۴ بخش است که در هر بخش به اختصار: تعاریف و مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی گروه، نظریه‌ی نمایش و سرشت که در طول این پایان‌نامه مورد نیاز است، آورده می‌شود. در فصل دوم قضایایی کلی درباره‌ی درجه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر یک گروه متناهی بیان و اثبات می‌شود. فصل سوم این پایان‌نامه مربوط به گروه‌هایی با تعداد کم درجه سرشت می‌باشد؛ این فصل به این دلیل آورده شده که پیش‌نیازی بر فصل چهار محسوب می‌شود و قضایایی که در این فصل بیان شده، برای اثبات لم‌ها و قضیه‌های فصل بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اما فصل آخر شامل سه بخش است که در بخش اول به مقدمه‌ای کلی درباره‌ی CCD-گروه‌ها می‌پردازیم. در بخش دوم این فصل، برای آشنایی بیشتر، مثال‌هایی از CCD-گروه‌ها آورده می‌شود.

سرانجام در بخش آخر این فصل، لم‌ها و قضایایی در رابطه با ویژگی گروه‌هایی با درجه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر غیرخطی متوالی بیان می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

برای مشاهده‌ی اثبات گزاره‌های بدون اثبات می‌توانید به مراجع [۱۰] و [۱۱] رجوع کنید.

۱.۱ مقدماتی از گروه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. *مرکز گروه G عبارت است از مجموعه‌ی*

$$Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga \; ; \text{به‌ازای هر } g \text{ از } G\}$$

که یک زیرگروه از G است.

تعریف ۲.۱.۱. *اگر a یک عضو از گروه G باشد، زیرگروه $C_G(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$ را مرکزساز a در G می‌نامیم.*

تعریف ۳.۱.۱. گروه G را ساده گوییم هرگاه $G \neq \{1\}$ و تنها زیرگروه‌های نرمال G عبارت باشند از $\{1\}$ و G.

تعریف ۴.۱.۱. گروه G را p- گروه گوییم هرگاه مرتبه‌ی هر عنصرش توان مثبتی از عدد اول p باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی n باشد، و $n = p^{\alpha}n'$ که در آن α یک عدد صحیح نامنفی و p عدد اولی است که $p \nmid n'$. در این‌صورت هر زیرگروه G از مرتبه‌ی p^{α} را یک p- زیرگروه سیلوی G می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. $p-$گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی گوییم، در صورتی‌که مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی G عدد اول p باشد.

تعریف ۷.۱.۱. گروه G را حل‌پذیر گوییم در صورتی‌که یک سری زیرنرمال مانند

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_r = G$$

داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، گروه G_i/G_{i-1} آبلی باشد. طول کوتاه‌ترین سری آبلی را طول حل‌پذیری G گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. گروه G را پوچ‌توان گوییم اگر دارای یک سری مرکزی باشد؛ یعنی یک سری نرمال

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots G_r = G$$

به‌طوری که به‌ازای هر $1 \leq i \leq r$،

$$G_i/G_{i-1} \leq Z\left(G/G_{i-1}\right)$$

طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را رده‌ی پوچ‌توانی G گوییم.

تعریف ۹.۱.۱. *فرض کنیم $x, y \in G$. گوییم x مزدوج y در G است اگر به‌ازای عضوی چون $g \in G$ داشته باشیم*

$$y = g^{-1}xg$$

مجموعه‌ی تمام عناصری که با x در G مزدوج‌اند عبارت است از:

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\}$$

این مجموعه را رده‌ی تزویج x در G می نامیم.

گزاره ۱۰.۱.۱. *هر گروه اجتماع رده‌های تزویج است و رده‌های تزویج متمایز مجزا هستند.*

تعریف ۱۱.۱.۱. *اگر $G = x_1^G \cup \ldots \cup x_l^G$ و رده‌های تزویج x_1^G، ...، x_l^G متمایز باشند، آنگاه x_1، ...، x_l را نماینده‌های رده‌های تزویج می‌نامیم.*

مثال ۱۲.۱.۱. ۱) برای هر گروه G، مجموعه‌ی $1^G = \{1\}$ یکی از رده‌های تزویج G است.
۲) فرض کنیم $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. عناصر G عبارت‌اند از ۱، a، a^2، b، ab، a^2b. چون به‌ازای هر $g \in G$، a^2 یا $g^{-1}ag = a$ است و $b^{-1}ab = a^2$، لذا

$$a^G = \left\{a, a^2\right\}$$

همچنین به‌ازای هر عدد صحیح i، $a^{-i}ba^{i} = a^{-2i}b$ و درنتیجه

$$b^G = \{b, ab, a^2b\}$$

از این‌رو رده‌های تزویج G عبارت‌اند از

$$\{1\}, \{a, a^2\}, \{b, ab, a^2b\}$$

۳) اگر G آبلی باشد، آنگاه به‌ازای هر $x, g \in G$، $g^{-1}xg = x$ و لذا $x^G = \{x\}$. بنابراین هر رده‌ی تزویج G فقط شامل یک عنصر است.

قضیه ۱.۱.۱۳. *فرض کنیم $x \in G$. در این‌صورت اندازه‌ی رده‌ی تزویج x^G عبارت است از:*

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)|.$$

لذا $|x^G|$ مرتبه‌ی گروه G را عاد می‌کند.

۱.۲ نمایش گروه و تحویل‌ناپذیری

تعریف ۱.۲.۱. *گیریم G یک گروه و F میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد.*
یک نمایش از گروه G روی میدان F عبارت است از یک همریختی چون ρ از G به گروهی از ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$ روی میدان F، که n را درجه‌ی نمایش نامیم.

تعریف ۱.۲.۲. *فرض کنیم $\rho : G \longrightarrow GL(m, F)$ و $\sigma : G \longrightarrow GL(n, F)$ نمایش‌هایی از G روی F باشند. گوییم ρ با σ هم‌ارز است اگر $m = n$ و ماتریس وارون پذیر $n \times n$ای مانند T*

وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $g \in G$،

$$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$$

تعریف ۳.۲.۱. نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(1, F)$ با تعریف زیر

$$g\rho = (1)$$

نمایش بدیهی G نامیده می شود.

تعریف ۴.۲.۱. نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ را نمایش صادق (باوفا) گوییم اگر

$$Ker\rho = \{1\};$$

یعنی اگر عضو همانی G تنها عضو gای باشد که به‌ازای آن،

$$g\rho = I_n.$$

تعریف ۵.۲.۱. گیریم V فضای برداری روی F و G گروه باشد. در این‌صورت V FG-مدول است اگر به‌ازای هر $v \in V$ و هر $g \in G$، حاصل‌ضرب vg تعریف شده باشد و به‌ازای هر $u, v \in V$ و $\lambda \in F$ و $g, h \in G$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $vg \in V$

(۲) $v(gh) = (vg)h$

(۳) $v1 = v$

(۴) $(\lambda v)g = \lambda(vg)$

(۵) $(u + v)g = ug + vg$

تعریف ۶.۲.۱. گیریم V FG-مدول و β پایه‌ی V باشد. به‌ازای هر $g \in G$، نماد

$$[g]_\beta$$

نشان‌دهنده‌ی ماتریس درون‌ریختی $v \longrightarrow vg$ از V نسبت به پایه‌ی β است.

-ارتباط بین FG-مدول‌ها و نمایش‌های G روی F در قضیه اساسی زیر آمده است.

قضیه ۷.۲.۱. (۱) اگر $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ نمایش G روی F باشد و $V = F^n$، آنگاه با تعریف حاصل‌ضرب vg به صورت زیر، V تبدیل به FG-مدول می شود

$$vg = v(g\rho) \qquad (v \in V, g \in G)$$

به‌علاوه V پایه‌ای چون β دارد به‌قسمی که

$$g\rho = [g]_\beta \qquad \forall g \in G$$

(۲) فرض کنیم که V FG-مدول است و β پایه‌ی V. در این‌صورت تابع

$$g \longrightarrow [g]_\beta \qquad (g \in G)$$

نمایش G روی F است.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم V FG-مدول باشد. زیرمجموعه‌ی W از V را FG-زیرمدول V می‌نامیم هرگاه W زیرفضا باشد و به‌ازای هر $w \in W$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $wg \in W$.

تعریف ۹.۲.۱. FG-مدول V را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه مخالف صفر باشد و FG-زیرمدولی به‌جز $\{0\}$ و V نداشته باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم G گروهی متناهی و F میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. فضای برداری FG با ضرب طبیعی vg $(v \in FG, g \in G)$ FG-مدول منظم نامیده می‌شود.
نمایش $g \longrightarrow [g]_\beta$ که به‌ازای پایه‌ی طبیعی β از FG حاصل می شود نمایش منظم G روی F نامیده می‌شود.

ملاحظه ۱. توجه داشته باشید که بعد FG-مدول منظم مساوی $|G|$ است.

گزاره ۱۱.۲.۱. FG-مدول منظم صادق است.

برهان. فرض کنید که $g \in G$ و به‌ازای هر $v \in FG$، $vg = v$. در این‌صورت $1g = 1$ و لذا $g = 1$، پس حکم برقرار است $\square$

۳.۱ سرشت

تعریف ۱.۳.۱. اگر $A = (a_{ij})$ ماتریس $n \times n$ باشد، اثر A، که آن را با trA نشان می‌دهیم عبارت است از:

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii};$$

یعنی اثر A مجموع عناصر قطر اصلی A است.

گزاره ۱.۳.۲. *فرض کنیم $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ ماتریس‌های $n\times n$ باشند. در این‌صورت*

$$tr(A+B)=trA+trB$$
$$tr(AB)=tr(BA)$$

به‌علاوه اگر T ماتریس وارون‌پذیر $n\times n$ باشد، آنگاه

$$tr(T^{-1}AT)=tr(A)$$

تعریف ۱.۳.۳. *فرض کنیم که V $\mathbb{C}G$-مدولی با پایه‌ی β باشد. در این‌صورت سرشت V عبارت است از تابع $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی*

$$\chi(g)=tr[g]_\beta \qquad\qquad (g\in G)$$

سرشت V به پایه‌ی β بستگی ندارد، زیرا اگر β و β' پایه‌های V باشند، به‌ازای ماتریس وارون‌پذیری چون T،

$$[g]_{\beta'}=T^{-1}[g]_\beta T$$

لذا بنابر گزاره‌ی ۱.۳.۲ ،

$$tr[g]_{\beta'}=tr[g]_\beta \qquad\qquad (g\in G)$$

ملاحظه ۲. بنابر مطالب ذکر شده، سرشت نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ را سرشت $\mathbb{C}G$-مدول

$\mathbb{C}^n$ متناظر با آن نمایش تعریف می‌کنیم؛ یعنی

$$\chi(g) = tr(g\rho) \qquad\qquad (g \in G)$$

تعریف ۱.۳.۴. *گوییم χ سرشت G است اگر χ سرشت یک $\mathbb{C}G$- مدول باشد. به‌علاوه، گوییم χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است هرگاه χ سرشت $\mathbb{C}G$- مدولی تحویل‌ناپذیر باشد، همچنین گوییم χ سرشت تحویل‌پذیر G است هرگاه χ سرشت $\mathbb{C}G$- مدولی تحویل‌پذیر باشد.*

تعریف ۱.۳.۵. *اگر χ سرشت $\mathbb{C}G$- مدول V باشد، بعد V را درجه‌ی χ می‌نامیم.*

لم ۱.۳.۶. *درجه‌ی هر سرشت تحویل‌ناپذیر، مرتبه‌ی گروه را می‌شمارد.*

تعریف ۱.۳.۷. *هر سرشت درجه‌ی ۱ را یک سرشت خطی می‌نامیم.*

تعریف ۱.۳.۸. *تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروهی که آبلی و متناهی باشد، خطی‌اند.*

قضیه ۱.۳.۹. *تعداد سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G روی $\mathbb{C}$ از درجه‌ی ۱ ، برابر با $|G/G'|$ است.*

گزاره ۱.۳.۱۰. *گیریم χ سرشت $\mathbb{C}G$- مدول V است. فرض کنیم $g \in G$ و مرتبه‌ی g برابر m است. در این‌صورت*

(۱) $\chi(1) = dimV$

(۲) $\chi(g)$ مجموع تعدادی از ریشه های mام واحد است.

(۳) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$

قضیه ۱.۳.۱۱. *گیریم $\rho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ نمایش G و χ سرشت آن باشد.*

(۱) *به‌ازای $g \in G$ داریم*

$$|\chi(g)| = \chi(۱) \text{ اگروتنهااگر } g\rho = \lambda I_n \qquad \lambda \in \mathbb{C} \text{ به‌ازای عددی چون }$$

(۲)
$$Ker(\rho) = \{g \in G : \chi(g) = \chi(۱)\}$$

تعریف ۱.۳.۱۲. *اگر χ سرشت G باشد، آنگاه هسته‌ی χ را که با $Ker\chi$ نشان می‌دهیم چنین تعریف می‌کنیم*

$$Ker\chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(۱)\}$$

ملاحظه ۳. بنابه قضیه‌ی ۱.۳.۱۱(۲)، اگر ρ نمایش G با سرشت χ باشد، آنگاه

$$Ker(\rho) = Ker(\chi);$$

یعنی هسته‌ی سرشت، همان هسته‌ی نمایش تأمین‌کننده‌ی آن است. لذا $Ker(\chi) \lhd G$.

تعریف ۱.۳.۱۳. *سرشت χ را صادق(باوفا) می‌نامیم هرگاه $Ker(\chi) = \{۱\}$.*

گزاره ۱.۳.۱۴. *اگر χ سرشت خطی گروه G باشد، آنگاه $\mathrm{G}' \leq ker\chi$.*

برهان. فرض کنیم χ سرشت خطی گروه G باشد. در این‌صورت χ یک همریختی از G به گروه ضربی اعداد مختلط مخالف صفر است. بنابراین به‌ازای هر $g, h \in G$ داریم:

$$\chi(g^{-۱}h^{-۱}gh) = \chi(g)^{-۱}\chi(h)^{-۱}\chi(g)\chi(h) = ۱$$