بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر ـ بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

موضوع:

ساختارهای تعمیم یافته

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا مولایی

مولف:

فرشاد امیدی

شهریور ۱۳۷۸

بسمه تعالی

این رساله

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : **فرشاد امیدی**

استاد راهنما: **دکتر محمدرضا مولایی**

داور ۱ : **دکتر شهرام سلیلی**

داور ۲ : **دکتر ماشاالله ماشین‌چی**

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: آقای دکتر ناصح‌زاده

دانشگاه شهید باهنر کرمان
اداره تحصیلات تکمیلی

سپاسگزاری

ای کاش می‌شد بجای سپاس تنها در چشمان ملکوتیت خیره می‌نگریستم و آنگاه مرا نیازی به تقریر واژه‌هایی اینچنین پوچ نمی‌بود از تو بخاطر آنهمه انسانیت سپاسگزارم و چه لزومی دارد بیش از این بگویم.

همچنین از اساتید بزرگوار آقایان دکتر ماشین چی و دکتر سلیلی که داوری این رساله را قبول زحمت فرمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در ضمن از کمکهای مرکز بین المللی علوم و تکنولوژی پیشرفته کمال تشکر را دارم.

فرشاد امیدی

شهریور ۷۸

«فهرست مطالب»

عنوان **صفحه**

چکیده

در این رساله، سه ساختار تعمیم یافته که عبارتند از گروه تعمیم یافته، عمل ت
و گروه توپولوژیک تعمیم یافته، معرفی شده‌اند. روشهایی برای ساختن گروهه
یافته ارائه کرده‌ایم و در ادامه، چند خاصیت در رسته گروههای تعمیم یافته ثابت
و در آخر نشان داده‌ایم که اگر N یک زیر گروه تعمیم یافته نرمال از یک گروه تو
تعمیم یافته همساز باشد آنگاه $\frac{G}{N}$ نیز یک گروه توپولوژیک تعمیم یافته است.

فصل اول

گروههای تعمیم یافته

مقدمه:

در قرن اخیر ریاضیدانان و فیزیکدانان تلاشهای زیادی برای ساختن نظریه‌های وحدت نموده‌اند در این خصوص می‌توان از نظریه تویستور [۳] و نظریه حافظ اصول [۴] نام برد. گروههای تعمیم یافته به عنوان یک ساختار جبری، ابزار مفیدی در راستای ساخت یک نظریه هندسی وحدت می‌باشند.

در فصل اول رساله که شامل شش بخش است، پس از بیان تعریف گروه تعمیم یافته خواص مقدماتی این ساختار جبری مورد بررسی قرار می‌گیرد سپس، زیر گروههای تعمیم یافته و همریختی روی گروههای تعمیم یافته بحث خواهند شد. در بخش چهارم خواهیم دید چگونه با داشتن یک گروه و نوع خاصی از دورنریختی گروهی (که آنها را تصویری نامیده‌ایم) می‌توان به گروه تعمیم یافته دست یافت. در دو بخش آخر فصل گروه تعمیم یافته تصویری و رسته گروههای تعمیم یافته بررسی شده‌اند. لازم به ذکر است که تعریف گروه تعمیم یافته از مرجع [۲] و تعریف زیر گروه تعمیم یافته از مرجع [۱] گرفته شده است.

فصل دوم مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول تعریف عمل تعمیم یافته یک گروه تعمیم یافته روی یک مجموعه را بیان کرده و نتایجی چند بدست خواهیم آورد و در بخش انتهایی، گروههای تعمیم یافته توپولوژیک را از نظر خواهیم گذراند.

۱-۱ مفاهیم مقدماتی گروههای تعمیم یافته

در این فصل تعریف و خواص مقدماتی یک گروه تعمیم یافته را بیان کرده و نمونه‌هایی چند از این ساختارها را بیان می‌داریم، سپس ارتباطهای ساختاری بین گروههای تعمیم یافته را مطالعه کرده و نشان می‌دهیم چگونه می‌توان با داشتن یک گروه و نوع خاصی از درونریختی‌های گروهی به گروههای تعمیم یافته دست یافت.

تعریف ۱-۱-۱: یک گروه تعمیم یافته یک مجموعه ناتهی G به همراه یک عمل دوتایی روی G (که معمولاً آن را ضرب G می‌نامیم) است که در اصول موضوعه زیر صدق می‌کند:

الف) برای هر $a,b,c\in G$، $(ab)c=a(bc)$؛

ب) برای هر $a\in G$ یک عضو یکتای $e(a)$ در G وجود دارد به طوریکه $ae(a)=e(a)a=a$؛

ج) برای هر $a\in G$ یک عضو a^{-1} در G وجود دارد بطوری که $aa^{-1}=a^{-1}a=e(a)$؛

$e(a)$ را عضو همانی a و a^{-1} را وارون a می‌نامیم.

توجه کنید که هر گروه یک گروه تعمیم یافته است.(برای هر $a\in G$، $e(a)=e_G$).

مثال ۱-۱-۲: فرض کنید $G=R\times(R-\{0\})\times R$ در این صورت G همراه با ضرب

$$((a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2))\to(b_1a_2,b_1b_2,b_1c_2)$$

یک گروه تعمیم یافته است. در این گروه تعمیم یافته به ازای هر $(a,b,c)\in G$ ،

$$(a,b,c)^{-1}=(\frac{a}{b^2},\frac{1}{b},\frac{c}{b^2}),\quad e(a,b,c)=(\frac{a}{b},1,\frac{c}{b})$$

مثال ۱-۱-۳: مجموعه

$$G=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d\in R\right\}$$

همراه با ضرب

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)\to\begin{bmatrix} a & f \\ g & d \end{bmatrix}$$

یک گروه تعمیم یافته است. اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in G$ آنگاه $e(A)=A^{-1}=A$

مثالهای ۱-۱-۲ و ۱-۱-۳ نشان می‌دهند که اصول مندرج در تعریف ۱-۱-۱، سازگارند بعلاوه مثالهایی موجودند که نشان می‌دهند این اصول از همدیگر مستقل هستند.

می‌دانیم در یک گروه قانون حذف برقرار است. بعبارت دقیقتر اگر G یک گروه باشد و برای a,b,c در G داشته باشیم $ab=ac$ آنگاه $b=c$ همچنین برای هر a,b در G $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ مثال زیر نشان می‌دهد که در یک گروه تعمیم یافته این روابط برقرار نیستند.

مثال ۱-۱-۴: مجموعه دو عضوی $G=\{a,b\}$ همراه با ضرب

$$aa=a, ab=a, ba=b, bb=b$$

یک گروه تعمیم یافته است. بعلاوه،

$$a^{-1}=e(a)=a$$

$$b^{-1}=e(b)=b$$

و داریم:

$$(ab)^{-1}=a^{-1}=a\ ,\ \ b^{-1}a^{-1}=ba=b\ \ \Rightarrow\ \ (ab)^{-1}\neq b^{-1}a^{-1}$$

همچنین $aa=ab=a$ در حالی که $a\neq b$

لم زیر نشان میدهد که گروههای تعمیم یافته به وفور یافت می‌شوند.

لم ۱-۱-۵: از هر مرتبه بزرگتر از یک، گروه تعمیم یافته‌ای، که گروه نیست، موجود است.

اثبات: فرض کنید a یک عدد کاردینالی و G مجموعه‌ای باشد که به این عدد کاردینالی نسبت داده می‌شود ضرب روی G را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G\times G\to G, (a,b)\to a$$

براحتی دیده می‌شود که این عمل شرکت‌پذیر است.

بعلاوه اگر $x\in G$ چنان باشد که $x.a=a.x=a$ نتیجه می‌شود که $x=a$ و این بدان معناست که $e(a)=a^{-1}=a$.□

قضیه‌ای که در ذیل بیان می‌شود عدم وجود تمام مجموعه‌ها را به زبان نظریه گروههای تعمیم یافته بیان می‌کند.

گزاره ۱-۱-۶: مجموعه تمام گروههای تعمیم یافته وجود ندارد.

اثبات: با برهان خلف فرض کنید که مجموعه تمام گروههای تعمیم یافته، که آنرا به $G_\cdot$ نمایش می‌دهیم، وجود دارد. فرض کنید $R=\{G\in G_\cdot \mid G\notin G\}$.

R ناتهی است (بعنوان مثال، گروه تعمیم یافته مثال ۴.۱.۱، به R تعلق دارد).

بنابر لم ۵.۱.۱، R همراه با ضرب $GG'=G$، گروه تعمیم یافته است پس $R\in G_\cdot$.

نشان می‌دهیم $R\notin R$, $R\in R$.

$R\notin R$ زیرا با برهان خلف فرض کنید $R\in R$. آنگاه از تعریف مجموعه R نتیجه

می‌شود $R\notin R$ که با فرض $R\in R$ متناقض است.

استدلالی مشابه، نشان میدهد که $R\in R$.

بنابراین مجموعه تمام گروههای تعمیم یافته نمی‌تواند وجود داشته باشد. زیرا، وجود این مجموعه به تناقض «$R\in R$, $R\notin R$» منجر می‌شود.□

۱-۲ خواص مقدماتی گروههای تعمیم یافته

با آنکه چند صفحه‌ای بیش نیست که درهای نظریه گروههای تعمیم یافته بروی ما گشوده شده، اما در این مدت مطلبی درباره آنها ثابت نشده است اینک وقت آن رسیده که به اصلاح این وضع بپردازیم. بعضی از این نتایج در کارهای آتی بسیار مفید خواهند بود.

لم ۱-۲-۱: هر گاه G یک گروه تعمیم یافته باشد، $a,b\in G$, $ab=ba$ ، آنگاه $e(a)=e(b)=e(ab)$.

اثبات:

$$e(a)(ab)=(e(a)a)b=ab$$

$$(ab)e(a)=(ba)e(a)=b(ae(a))=ba=ab$$

لذا، بنابر اصل موضوع (ب) مندرج در تعریف ۱-۱-۱، $e(ab)=e(a)$. روشی مشابه، نشان میدهد که $e(ab)=e(b)$.□

تعریف ۱-۲-۲: گروه تعمیم یافته G را جابجایی گویند هرگاه برای هر $a,b\in G$، $ab=ba$.

قضیه ۱-۲-۳: هر گروه تعمیم یافته جابجایی یک گروه جابجایی است.

اثبات: بنابرلم ۱-۲-۱ و تعریف ۱-۲-۲، اثبات واضح است .□

لم ۱-۲-۴: هر گاه G یک گروه تعمیم یافته باشد و $a\in G$، آنگاه

(۱) $e(e(a))=e(a)$.

(۲) $e(a)=e(a^{-1})$.

(۳) a^{-1} یکتا است.

اثبات: فرض کنید a^{-1} وارون a باشد. داریم:

$$e(a)e(a)=e(a)(aa^{-1})=(e(a)a)a^{-1}=aa^{-1}=e(a)$$

$$\Rightarrow e(e(a))=e(a)$$

$$e(a)a^{-1}=(a^{-1}a)a^{-1}=a^{-1}(aa^{-1})=a^{-1}e(a)$$

لذا، بنابرلم ۱-۲-۱ داریم:

$$e(e(a))=e(a^{-1})$$

(بنابر قسمت (۱)) $\Rightarrow e(a)=e(a^{-1})$

و این قسمت (۲) را اثبات می‌کند.

اثبات (۳)، فرض کنید $b\in G$, $ab=ba=e(a)$ نشان می‌دهیم که $b=a^{-1}$:

(بنابر لم ۱-۲-۱) $ab=ba\Rightarrow e(a)=e(b)$

$$\Rightarrow b=e(b)b=e(a)b=(a^{-1}a)b=a^{-1}(ab)=a^{-1}e(a)$$

از طرفی بر طبق قسمت (۲)، $e(a)=e(a^{-1})$ در نتیجه:

$$b=a^{-1}e(a^{-1})=a^{-1}.\ \square$$

قرارداد ۱-۲-۵: فرض کنید G یک گروه تعمیم یافته باشد $a\in G$ و n یک عدد صحیح باشد سه حالت متمایز زیر را در نظر بگیرید.

(۱) اگر $n=0$ قرارداد می‌کنیم $a^n=e(a)$

(۲) اگر $n>0$، $a^n=aa...a$ (a، n دفعه در خودش ضرب شده است)

(۳) اگر $n<0$، $a^n=a^{-1}a^{-1}.....a^{-1}$ (a^{-1}، n دفعه در خودش ضرب شده است)

لم ۱-۲-۶: فرض کنید G یک گروه تعمیم یافته و a عضوی از G باشد، آنگاه

(۱) $a^2=a$ اگر و تنها اگر $a=e(a)$.

(۲) $e(a^n)=e(a)$، که در آن، n یک عدد صحیح دلخواه است.

(۳) $(a^{-1})^{-1}=a$

اثبات: (۱) اگر $a=e(a)$ با ضرب طرفین تساوی در a نتیجه می‌شود $a^2=a$.

برعکس فرض کنید $a^2=a$ لذا:

$$a^{-1}(a^2)=a^{-1}(a)=e(a)$$

$$\Rightarrow a^{-1}(aa)=e(a)$$

$$\Rightarrow a=e(a)$$

(۲). اثبات از لم ۱-۲-۴ و قرارداد ۱-۲-۵ بدست می‌آید.

(۳). داریم:

$$a^{-1}a=aa^{-1}=e(a)=e(a^{-1})$$

$$\Rightarrow (a^{-1})^{-1}=a$$

□.

لم ۱-۲-۷: هرگاه b,a در گروه تعمیم یافته G چنان باشند که $e(a)=e(b)$، آنگاه معادله‌های $ya=b,ax=b$ در G جواب دارند.

اثبات: فرض کنید $x=a^{-1}b$, $y=ba^{-1}$ داریم:

$$ax=a(a^{-1}b)=(aa^{-1})b=e(a)b=e(b)b=b$$

$$ya=(ba^{-1})a=b(a^{-1}a)=be(a)=be(b)=b$$

تذکر ۱-۲-۸: اگر شرط $e(a)=e(b)$ از لم ۱-۲-۷ حذف شود، نتیجه برقرار نخواهد بود. برای نمونه در مثال ۱-۱-۴، معادله $ax=b$ در G جواب ندارد. از طرف دیگر معادله $ax=a$ دارای دو جواب $x=a$, $x=b$ می‌باشد، لذا لزومی ندارد که جواب (در صورت وجود) یکتا باشد.

قضیه ۱-۲-۹: فرض کنید G مجموعه‌ای ناتهی باشد که تحت ضربی شرکت‌پذیر و بسته باشد و نیز خواص اضافی زیر برقرار باشند:

(۱) به ازای هر $a\in G$ ؛ عنصر یکتای $e(a)\in G$ وجود داشته باشد به قسمتی که $ae(a)=a$

(۲) به ازای هر $a\in G$ ، عنصری چون $a^{-1}\in G$ وجود داشته باشد بطوریکه $a\,a^{-1}=e(a)a$

(۳) برای هر $a\in G$ ، $e(e(a))=e(a)$

در آن صورت، G تحت این ضرب یک گروه تعمیم یافته است.

اثبات: فرض کنید $a\in G$ ابتدا نشان می‌دهیم که $e(a^{-1})=e(a)$ داریم:

$$aa^{-1}=e(a)\Rightarrow a(a^{-1}e(a^{-1}))=e(a)\Rightarrow (aa^{-1})e(a^{-1})=e(a)\Rightarrow e(a)\,e(a^{-1})=e(a)$$

پس بنا بریکتایی $e(e(a))$ نتیجه می‌شود $e(a^{-1})=e(e(a))$ و لذا بنابر $e(a^{-1})=e(a)$.

اکنون ثابت می‌کنیم $a^{-1}a=e(a)$. بنابر (۱) و (۲) عنصر $(a^{-1})^{-1}\in G$ وجود دارد بطوری که $a^{-1}(a^{-1})^{-1}=e(a^{-1})$ حال داریم: