دانشکده‌ی ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض/آنالیز

عنوان:

خاصیت $p-$ دگاوه از فضاهای تابعی و هندسه فضاهای L^p

استاد راهنما:

دکتر سید محمد مشتاقیون

استاد مشاور:

دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق

پژوهشگر:

محسن شریفی زارچی

مهرماه ۱۳۹۱

تقدیم به خانواده عزیزم و همه کسانی که مرا در این راه یاری رساندند.

تشکّر و قدردانی

سپاس خدای را که هر چه دارم از اوست به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم.

پس از سپاس بی‌قیاس از درگاه احدیت، بر خود لازم می‌دانم که از اساتید فرزانه‌ای که اینجانب را در مراحل تحقیق یاری نموده‌اند و در به ثمر رسیدن این اثر سهم داشته‌اند، قدردانی و تشکر نمایم.

از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر سید محمد مشتاقیون که در طول نگارش این پایان‌نامه بنده را با بزرگواری یاری نموده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین از استاد مشاور جناب آقای دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق که در این پژوهش مرا همراهی نمودند، کمال تشکر را دارم. از اساتید محترم جناب آقای دکتر حمید مظاهری تهرانی به‌عنوان داور داخلی و سرکار خانم دکتر سلیمی به‌عنوان داور خارجی که زحمت مطالعه و تصحیح این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، تشکر می‌نمایم.

محسن شریفی زارچی

مهرماه ۱۳۹۱

چکیده

فضای باناخ X خاصیت دگاوه دارد اگر هر عملگر با رتبه یک $T : X \to X$ در معادله دگاوه $\|Id+T\| = 1 + \|T\|$ صدق کند. ثابت می‌شود که اگر فضای باناخ X خاصیت دگاوه داشته باشد، هر عملگر فشرده ضعیف نیز در معادله دگاوه صادق است همچنین در این حالت X و دوگان آن X^*، هر دو شامل یک نسخه از ℓ_1 خواهند بود. همچنین در حالت کلی‌تر به مطالعه خاصیت دگاوه از فضاهای X و Y که $X \subset Y$ و عملگرهای $T : X \to Y$ که در معادله $\|J + T\| = 1 + \|T\|$ صدق می‌کنند می‌پردازیم، که در آن $J : X \to Y$ نشاننده طبیعی است و منجر به این نتیجه می‌شود که یک فضای باناخ با خاصیت دگاوه در یک فضای با یک پایه نامشروط نشانده نمی‌شود. در ادامه یک توسیع طبیعی از خاصیت دگاوه برای فضاهای باناخ تابعی $p-$ محدب و کلاس‌های مرتبط با آن، بنام خاصیت $p-$ دگاوه، مورد بررسی قرار می‌گیرد و به عنوان یک کاربرد، با توسیع استدلال ارائه شده برای خاصیت دگاوه، نشان می‌دهیم که هیچ فضای بازتابی در این کلاس از فضاها قرار ندارند. در پایان نشان می‌دهیم که فضاهای $L^p(\mu)$ روی فضاهای با اندازه بدون اتم، می‌توانند بر حسب یک خاصیت هندسی از نوع $p-$ تحدبی که مرتبط با خاصیت دگاوه است، نشان داده شوند.

واژه‌های کلیدی: خاصیت دگاوه، خاصیت $p-$ دگاوه، فضای باناخ تابعی $p-$ محدب، اندازه بدون اتم

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل به ذکر تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت می‌پردازیم. در سراسر متن واژه‌های گردایه، خانواده و رده، مترادف مجموعه به‌کار می‌روند. گوی یکه X را با B_X و کره یکه آن را با S_X نشان می دهیم. همچنین فضاهای اندازه با سه تایی (Ω, Σ, μ) نشان داده شده است.

۱.۱ مقدمه‌ای بر آنالیز تابعی و نظریه عملگرها

اگر X و Y دو فضای نرمدار باشند و $T : X \to Y$ یک تبدیل خطی باشد نرم T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq ۱\}$$

$$\|T\| = inf\{C > ۰ : \|Tx\| \leqslant C\|x\|, \forall x \in X\}.$$

اگر $\|T\| < \infty$، T را یک عملگر خطی کراندار گوییم. مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با نماد $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. همچنین ثابت می‌شود که تبدیل خطی $T : X \to Y$ کراندار است اگر و فقط اگر پیوسته باشد [۱۸]. ثابت می‌شود که $B(X,Y)$ به همراه نرم تعریف شده در رابطه فوق یک فضای نرم‌دار است، علاوه بر این اگر Y یک فضای باناخ باشد آنگاه $B(X,Y)$ نیز یک فضای باناخ است.

تعریف ۱.۱.۱. عملگر $P: X \to X$ روی فضای باناخ X را یک عملگر تصویر گوییم اگر $P^۲ = P$ باشد. (که در آن $P^۲$ نمایش ترکیب عملگر P با خودش است.)

تعریف ۲.۱.۱. عملگر $T: X \to Y$ بین دو فضای نرمدار X و Y را یک عملگر طولپا گوییم اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|Tx\| = \|x\|$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار هستند. عملگر $T: X \to Y$ را یک یکریختی گوییم هرگاه T یک تبدیل خطی یک به یک و پیوسته (کراندار) باشد که معکوس آن $T^{-۱}: T(X) \to X$ نیز پیوسته باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم μ یک اندازه مثبت روی فضای اندازه Ω است و $۱ \le p < \infty$. فضای باناخ $L^p(\mu)$ متشکل از تمام (کلاسهای هم‌ارزی) توابع اندازه‌پذیر $T: \Omega \to F$ است که

$$\|T\|_p := (\int_\Omega |T|^p d\mu)^{\frac{۱}{p}} < \infty.$$

همچنین $L^\infty(\mu)$ فضای باناخ متشکل از تمام (کلاسهای هم‌ارزی) توابع اندازه‌پذیر تقریباً همه جا کراندار $T: \Omega \to F$ همراه با نرم

$$\|T\|_\infty := inf\{C > ۰ : \mu\{x \in \Omega : |T(x)| > C\} = ۰\},$$

می باشد. لازم به ذکر است که $L^p(\mu)$، $۱ \le p \le \infty$، در حقیقت یک فضای شبه نرم دار است. اما با این قرار داد که توابع تقریباً همه جا برابر را یکی بگیریم، گردایه تمام کلاسهای هم ارز حاصل با نرم مذکور تشکیل یک فضای باناخ می‌دهد.

اگر μ را اندازه شمارشی روی مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت در نظر بگیریم، در این صورت فضای باناخ $L^p(\mu)$ با $۱ \le p < \infty$، متشکل از تمام دنباله های مختلط $\{x_n\}$ می‌باشد به طوری که

$$\|\{x_n\}\|_p := (\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{۱}{p}} < \infty.$$

معمولاً در این حالت فضای $L^p(\mu)$ را با ℓ^p نمایش می دهند. همچنین $L^\infty(\mu)$ را با ℓ^∞ نمایش می‌دهند که متشکل از تمام دنباله‌های مختلط کراندار با نرم $\|\{x_n\}\|_\infty := sup_n\|x_n\|$ خواهد

بود. زیر فضایی از ℓ^∞ که از تمام دنباله های همگرا به صفر تشکیل شده باشد را با نماد $c_\circ$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. زیر مجموعه اندازه پذیر E از فضای اندازه (Ω, Σ, μ) را یک اتم گوییم هرگاه $\mu(E) > \circ$ و هیچ زیر مجموعه محض اندازه پذیر از E با اندازه مثبت موجود نباشد. فضای اندازه Ω را بدون اتم گوییم هرگاه Ω شامل هیچ اتم نباشد.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم X فضای نرم دار است. متناظر به هر $\varepsilon > \circ$، $x_\circ \in X$ و $x^* \in X^*$ تعریف می‌کنیم

$$U(x^*, x_\circ, \varepsilon) = \{x \in X : |x^*(x) - x^*(x_\circ)| < \varepsilon\}.$$

گردایه $\{U(x^*, x_\circ, \varepsilon) | x^* \in X^*, x_\circ \in X, \varepsilon > \circ\}$ تشکیل یک زیر پایه برای یک توپولوژی روی X می‌دهد که آن را توپولوژی ضعیف روی X نامیده و با نماد $\sigma(X, X^*)$ یا $w-$ توپولوژی نمایش می دهیم. همچنین فرض کنیم $U(x_\circ^*, x, \varepsilon) = \{x^* \in X : |x^*(x) - x_\circ^*(x)| < \varepsilon\}$ که در آن $x \in X$، $x_\circ^* \in X^*$ و $\varepsilon > \circ$. مجموعه $\{U(x_\circ^*, x, \varepsilon) : x_\circ^* \in X^*, x \in X, \varepsilon > \circ\}$ تشکیل یک زیر پایه برای یک توپولوژی روی X^* می دهد که آن را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می‌نامیم و با نماد $\sigma(X^*, X)$ و یا w^*- توپولوژی نمایش می دهیم.

قضیه ۷.۱.۱. (باناخ آلاقلو) هرگاه X یک فضای نرم دار باشد، B_{X^*} فشرده ضعیف ستاره است.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱۸] مراجعه شود. □

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم $T : X \to Y$ یک عملگر خطی و B_X گوی یکه بسته در X باشد. T را یک عملگر فشرده گوییم هرگاه $\overline{T(B_X)}$ در Y فشرده باشد و T فشرده ضعیف نامیده می‌شود هرگاه $\overline{T(B_X)}$ در Y فشرده ضعیف باشد. مجموعه همهٔ عملگرهای فشرده و فشرده ضعیف از X به Y را به ترتیب با $K(X, Y)$ و $W(X, Y)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. عملگر خطی $T : X \to Y$ را با رتبه متناهی گوییم هرگاه برد $T(X)$ از T با بعد متناهی باشد. مجموعه همهٔ عملگرهای خطی کراندار با رتبه متناهی از X به Y را با

$F(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و اگر $X=Y$ آن را با $F(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۱۰. اگر $T:X\to Y$ عملگری با رتبه یک باشد، آنگاه وجود دارد $x^*\in X^*$ و $y\in Y$ به‌طوری که

$$Tx=\langle x^*,x\rangle y \quad \forall x\in X.$$

یا به طور معادل می‌نویسیم $T=x^*\otimes y$.

همچنین اگر $T:X\to Y$ از رتبه متناهی باشد، آنگاه

$$Tx=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n y_n=\sum_{n=1}^{N}\langle x_n^*,x\rangle y_n \quad \forall x\in X.$$

قضیه ۱.۱.۱۱. فرض کنیم X,Y,Z فضاهای باناخ باشند. آنگاه

۱) $F(X,Y)\subset K(X,Y)$ و هر دو زیر فضای $B(X,Y)$ هستند.

۲) اگر $T\in K(X,Y)$ و $A\in B(Y,Z)$ آنگاه $AT\in K(X,Z)$.

۳) اگر $T\in K(X,Y)$ و $A\in B(Z,X)$ آنگاه $TA\in K(Z,Y)$.

خواص مشابهی برای عملگرهای فشرده ضعیف نیز برقرار است [۱۸].

تعریف ۱.۱.۱۲. زیر مجموعه C از یک فضای برداری X را محدب گوییم اگر برای هر $\lambda\in[0,1]$ و هر $x,y\in C$ داشته باشیم $\lambda x+(1-\lambda)y\in C$.

۱.۲ پایه شودر

تعریف ۱.۲.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای باناخ X را یک پایه شودر برای X گوییم هرگاه برای هر $x\in X$ یک دنباله منحصر به فرد از اسکالرها مثل $\{a_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n.$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از بردارها در فضای باناخ X باشد. سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگرای نامشروط است اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ برای هر جایگشت π از اعداد صحیح، همگرا باشد. یک پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از فضای باناخ X نامشروط نامیده می‌شود، اگر بسط هر $x \in X$ بر حسب پایه، یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$، همگرای نامشروط باشد.

قضیه ۳.۲.۱. سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگرای نامشروط است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح n وجود داشته باشد به طوری که برای هر مجموعه متناهی از اعداد صحیح مثبت σ که $min\{i \in \sigma\} > n$ است، $\sum_{t\in\sigma} \|x_t\| < \varepsilon$ باشد. در حالت خاص، اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگرای نامشروط باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعه متناهی σ، از اعداد طبیعی سری $\sum_{t\in\sigma} \|x_t\|$ کراندار است.

اثبات. اثبات در مرجع [۱۶]. □

اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه نامشروط از فضای باناخ X و σ یک زیر مجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد، آنگاه یک تصویر خطی کراندار P_σ روی فضای باناخ X وجود دارد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_\sigma(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n\in\sigma} a_n x_n.$$

این تصویر، تصویر طبیعی مرتبط با پایه نامشروط نامیده می‌شود.

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه نامشروط از فضای باناخ X است. اگر Q_σ تصویر متمم P_σ یعنی $Id - P_\sigma$ باشد، اصل کرانداری یکنواخت نتیجه می‌دهد که $sup_\sigma\|P_\sigma\|$ و $sup_\sigma\|Q_\sigma\|$ متناهی هستند. که در آن سوپریمم روی تمام زیرمجموعه‌های متناهی دلخواه σ از اعداد طبیعی گرفته می‌شود.

اثبات. اثبات در مرجع [۱۶]. □

قضیه ۵.۲.۱. اگر $B := \{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ یک پایه نامشروط برای X باشد و همچنین

$$V = sup\{\|P_A\| : \text{متناهی} A\}, W = sup\{\|Q_A\| : \text{متناهی} A\}$$

باشد، آنگاه $W \leqslant V$.

اثبات. اثبات در مرجع [۱۶]. □

فصل ۲

خاصیت دگاوه

۱.۲ مقدمه

در این فصل قصد داریم تا خاصیت دگاوه را معرفی کرده و سپس با بیان بعضی از قضایا و مثالهای مهم، بعضی از ویژگی‌های این خاصیت را مطرح کنیم. ضمناً یادآوری می‌گردد که میدان در نظر گرفته شده در سرتاسر این پژوهش میدان اعداد حقیقی است. یعنی ما تنها با اسکالرهای حقیقی سر و کار داریم.

۲.۲ مقدمه‌ای بر خاصیت دگاوه

در ابتدا یک ابزار هندسی را معرفی می‌کنیم که در این فصل و فصلهای بعد مکرراً از آن استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲.۲. اگر X یک فضای باناخ و X^* فضای دوگان آن باشد برش $S(x^*,\varepsilon)$ از B_X که با $x^* \in S_{X^*}$ و $\varepsilon > ۰$ مشخص می‌شود را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$S(x^*,\varepsilon) = \{x \in B_X : x^*(x) \geqslant ۱ - \varepsilon\}.$$

مثال ۲.۲.۲. اگر فضای $R^۲$ را در نظر بگیریم برش مورد نظر می‌تواند فضای محدود بین یک خط و دایره یکه که یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، باشد.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنیم X یک زیر فضایی از فضای باناخ Y و $J : X \to Y$ عملگر شمول است. جفت (X,Y) برای یک کلاس $M \subset L(X,Y)$ از عملگرها، خاصیت دگاوه دارد اگر برای هر $T \in M$،

$$\|J+T\| = 1 + \|T\|.$$

اگر $X = Y$ باشد، برای اختصار می‌گوییم که X برای یک کلاس M از عملگرها خاصیت دگاوه دارد. اگر M کلاس همه عملگرهای با رتبه یک باشد، فقط می‌گوییم که X خاصیت دگاوه دارد.

همچنین هرگاه رابطه بالا برقرار باشد، گوییم عملگر T در معادله دگاوه صادق است.

مثال ۴.۲.۲. فضاهای $L^1(\mu)$ و $L^\infty(\mu)$ که μ بدون اتم باشد، مثالهای مهمی از فضاهای با خاصیت دگاوه هستند. همچنین اگر K یک فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده بدون نقطه تنها باشد، آنگاه فضای باناخ تابعی $C(K)$، متشکل از همه توابع اسکالری پیوسته روی X، خاصیت دگاوه دارد. فضاهای ℓ^p با $p \geqslant 1$ خاصیت دگاوه ندارند.

اثبات. اثبات در مرجع [۱۴]. $\square$

لم زیر نشان می‌دهد که اگر T در معادله دگاوه صادق باشد، آنگاه λT برای هر $\lambda > 0$ نیز در معادله دگاوه صادق است. لذا اگر T در معادله دگاوه صادق باشد می‌توانیم فرض کنیم که نرم آن برابر یک است.

لم ۵.۲.۲. برای دو بردار u و v در یک فضای نرم دار داریم $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ اگر و فقط اگر رابطه $\|\alpha u + \beta v\| = \alpha\|u\| + \beta\|v\|$ برای هر $\beta, \alpha > 0$ برقرار باشد.

اثبات. فرض کنیم برای دو بردار u و v در یک فضای نرم دار، داشته باشیم

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$$

و $\alpha, \beta > 0$. با استفاده از وضعیت تقارن می‌توانیم فرض کنیم $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$.

اکنون توجه کنید که

$$\|\alpha u+\beta v\| = \|\alpha(u+v)-(\alpha-\beta)v\| \geqslant \alpha\|u+v\|-(\alpha-\beta)\|v\|$$
$$= \alpha(\|u\|+\|v\|)-(\alpha-\beta)\|v\| = \alpha\|u\|+\beta\|v\|.$$

این نتیجه مورد نظر را به‌دنبال دارد. □

توجه کنید در برقراری معادله دگاوه اگر کلاس M از عملگرها یک مخروط باشد به این معنی که برای هر $T \in M$ و هر $\alpha > ۰$، $\alpha T \in M$، آنگاه کافی است رابطه فقط برای همه $T \in M$ که $\|T\| = ۱$ است، برقرار باشد.

قضیه ۶.۲.۲. اگر X^* خاصیت دگاوه داشته باشد، X نیز خاصیت دگاوه دارد.

اثبات. فرض کنیم X^* خاصیت دگاوه داشته باشد و T عملگری با رتبه یک باشد. بنابر قضیه (۱۰.۱.۱)، $x_\circ \in X$ و $x_\circ^* \in X^*$ وجود دارد به‌طوری که

$$Tx = x_\circ^*(x)x_\circ \quad \forall x \in X.$$

این نتیجه می‌دهد

$$\langle T^*x^*, x\rangle = \langle x^*, Tx\rangle = x_\circ^*(x)\langle x^*, x_\circ\rangle = \langle x^*(x_\circ)x_\circ^*, x\rangle$$
$$\Rightarrow T^*x^* = x^*(x_\circ)x_\circ^*.$$

این یعنی T^* از رتبه یک است. در نتیجه با استفاده از خاصیت دگاوه X^* داریم

$$\|I+T\| = \|(I+T)^*\| = \|I+T^*\| = ۱+\|T^*\| = ۱+\|T\|.$$

□

توجه کنید که عکس قضیه بالا نادرست است، برای مثال $X = C[۰,۱]$ در نظر بگیرید که دارای خاصیت دگاوه است ولی دوگان آن خاصیت دگاوه ندارد مرجع [۱۴].

در اینجا یک لم کلیدی این تحقیق را بیان می‌کنیم که برای بررسی خاصیت دگاوه

فضاهای باناخ، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در فصل‌های بعد، لم‌های مشابهی بیان و اثبات خواهند شد که در بحث نسخه‌های دیگر خاصیت دگاوه اهمیت پیدا می‌کنند.

لم ۷.۲.۲. فرض کنیم (X, Y) خاصیت دگاوه داشته باشد. آنگاه

۱) برای هر $y_۰ \in S_Y$ و هر برش $S(x_۰^*, \varepsilon_۰)$ از B_X، برش دیگر $S(x_۱^*, \varepsilon_۱) \subset S(x_۰^*, \varepsilon_۰)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in S(x_۱^*, \varepsilon_۱)$ نامساوی $\|x + y_۰\| \geqslant ۲ - \varepsilon_۰$ برقرار است.

۲) برای هر $x_۰^* \in S_{X^*}$ و برای هر w^*–برش $S(y_۰, \varepsilon_۰)$ از B_{Y^*} (که $y_۰ \in S_Y \subset S_{Y^{**}}$)، w^*– برش دیگر $S(y_۱, \varepsilon_۱) \subset S(y_۰, \varepsilon_۰)$ از B_{Y^*} وجود دارد به‌طوری که برای هر $y^* \in S(y_۱, \varepsilon_۱)$ نامساوی $\|x_۰^* + y^*\| \geqslant ۲ - \varepsilon_۰$ برقرار است.

اثبات. از آنجا که هر دو قسمت در یک مدل بسیار مشابه اثبات می شوند ما تنها قسمت (۱) را اثبات می‌کنیم. عملگر با رتبه یک $T : X \to Y$ را به صورت $Tx = x_۰^*(x)y_۰$ تعریف می‌کنیم که بنا به فرض در معادله دگاوه صادق است. بنا بر لم (۵.۲.۲) می‌توانیم فرض کنیم که نرم T برابر یک است. آنگاه

$$\|J^* + T^*\| = \|J + T\| = ۱ + \|T\| = ۲$$

بنابرتعریف نرم عملگر $J^* + T^*$، یک تابعک $y^* \in S_{Y^*}$ وجود دارد به طوری که

$$\|J^*y^* + T^*y^*\| \geqslant ۲ - \varepsilon_۰$$

و $y^*(y_۰) \geqslant ۰$. قرار می‌دهیم

$$x_۱^* = \frac{J^*y^* + T^*y^*}{\|J^*y^* + T^*y^*\|}, \quad \varepsilon_۱ = ۱ - \frac{۲ - \varepsilon_۰}{\|J^*y^* + T^*y^*\|}.$$

آنگاه برای هر $x \in S(x_۱^*, \varepsilon_۱)$ داریم

$$x_۱^*(x) = \frac{\langle (J^* + T^*)y^*, x\rangle}{\|J^*y^* + T^*y^*\|} > (۱ - \varepsilon_۱),$$

$$\langle (J^* + T^*)y^*, x\rangle \geqslant (۱ - \varepsilon_۱)\|J^*y^* + T^*y^*\| = ۲ - \varepsilon_۰.$$