دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض - آنالیز ریاضی

موضوع:

مدول‌های هیلبرت روی C^*-جبرها

استاد راهنما:

دکتر کوروش نوروزی

استاد مشاور:

دکتر هاشم پروانه مسیحا

نگارش:

خشایار شمس الکتابی

بهمن ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

تشکر و قدردانی

در این‌جا لازم می‌دانم از آقای دکتر کوروش نوروزی استاد راهنمای خود، برای تشویق در انتخاب موضوع و راهنمایی‌های ایشان در نگارش این پایان‌نامه و به پایان رساندن آن تشکر کنم. همچنین از آقای دکتر هاشم پروانه مسیحا استاد مشاور خود بابت کمک‌ها و حمایت‌های ایشان سپاس‌گزارم. در پایان از آقای دکتر اسداله آقاجانی و خانم دکتر ملیحه حسینی بابت مطالعه این پایان‌نامه نهایت تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه C^*-هیلبرت مدول‌ها[۱] مورد بررسی قرار خواهند گرفت. ابتدا C^*-جبرهای جابجایی[۲] را به کمک نمایش گلفاند-نایمارک[۳] ارایه کرده و یک نمایش تابعی[۴] برای C^*-جبرهای ناجابجایی به کمک کلاف‌های کیلری[۵] پیشنهاد خواهد شد. در ادامه مدول‌های روی یک C^*-جبر ارایه شده و مشابه قضیه سر-سوان[۶] برای C^*-جبرهای جابجایی، آن‌ها به کمک کلاف‌های برداری[۷] نمایش داده می‌شوند. همچنین C^* -هیلبرت مدول‌ها معرفی خواهند شد و این ساختار جدید با کمک مترهای هرمیتی[۸] روی یک کلاف برداری مناسب نمایش داده خواهد شد.

کلمات کلیدی: C^*-جبر، C^*-هیلبرت مدول، کلاف برداری، مدول پروژکتیو، کلاف کیلری[۹]، پیوند[۱۰]، فضای یکنواخت، متر هرمیتی، منیفلد کیلر، قضیه گلفاند-نایمارک، قضیه سر-سوان.

---
[۱] C^*-hilbert modules
[۲] commutative C^*-algebras
[۳] Gelfand-Naimark representation
[۴] functional representation
[۵] Kahler bundle
[۶] Serre-Swan theorem
[۷] vector bundle
[۸] hermitian metric
[۹] Kahler bundle
[۱۰] connection

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان‌نامه با محوریت بررسی C^*-جبرها و مدول‌های[۱] روی این جبرها، نمایش هندسی این اشیا جبری را می‌آوریم.

در بخش پیش‌نیازها ابتدا فضاهای توپولوژیک را بررسی می‌کنیم تا بعدا با معرفی جبر توابع پیوسته روی این فضاها جبرهای جابجایی را نمایش دهیم. سپس فضاهای یکنواخت[۲] را مطالعه می‌کنیم که در نمایش جبرهای ناجابجایی ظاهر می‌شوند. کلاف‌های برداری به‌صورت طبیعی در مطالعه مدول‌ها بوجود می‌آیند زیرا برش‌های[۳] این کلاف‌های برداری در هر دو حالت جابجایی و ناجابجایی با تعریف یک عمل مناسب، یک ساختار مدولی به ما می‌دهند. در پایان کمی مطالبی از جبر آورده و مدول‌های آزاد[۴] و پروژکتیو[۵] را معرفی می‌کنیم که به ترتیب نقش کلاف‌های بدیهی[۶] و کلاف‌های برداری را در این‌جا دارند.

در فصل منیفلدهای کیلری[۷]، با تعریف منیفلد مختلط[۸] بوسیله یک ساختار مختلط[۹] که در یک معادله صدق می‌کند شروع کرده و در نهایت به تعریف منیفلدهای کیلری می‌رسیم. این منیفلدها در نمایش تابعی (نمایش یک جبر به‌عنوان جبری از توابع روی یک فضای مناسب) جبرهای ناجابجایی مطرح می‌شوند و ۲-فرمی[۱۰]، متر[۱۱] و پیوند[۱۲] روی این منیفلدها در نمایش مذبور مورد اهمیت است.

در فصل ۳ C^*-جبرها را بررسی می‌کنیم که این پایان‌نامه در مورد این اشیا و مدول‌های روی آن می‌باشد. ابتدا تعاریف مقدماتی این جبرها را آورده سپس به نمایش آن‌ها و به‌خصوص نمایش‌های تحویل‌ناپذیر آن‌ها می‌پردازیم و ارتباط آن‌ها را با ایده‌آل‌ها و تابعک‌های خطی مثبت بررسی می‌کنیم. این بخش در قلب پایان‌نامه قرار می‌گیرد و از اهمیت به‌سزایی برخوردار است.

در فصل ۴ C^*-هیلبرت مدول‌ها، تعاریف اولیه و ایده‌هایی که در شکل گیری آن موثر بوده‌اند را می‌آوریم. به مثال‌های هندسی توجه می‌شود و ارتباط این مدول‌ها را با مترهای هرمیتی مشخص می‌کنیم. خواهیم دید که بسیاری از ایده‌های فضاهای هیلبرت در این‌جا نیز کار می‌کند و در مواردی تفاوت اصولی بین فضاهای هیلبرت و هیلبرت مدول‌ها که خود تعمیمی از فضاهای هیلبرت هستند وجود دارد.

---

[۱] modules
[۲] uniform space
[۳] sections
[۴] free modules
[۵] projective
[۶] trivial bundle
[۷] Kahler manifolds
[۸] complex manifold
[۹] complex structure
[۱۰] 2-form
[۱۱] metric
[۱۲] connection

سپس روی جبرهای جابجایی متمرکز می‌شویم و نمایش این جبرها و مدول‌های روی آن و هیلبرت مدول‌ها را آورده و نشان می‌دهیم برای تمام این مفاهیم معادل‌های هندسی جالبی وجود دارد و می‌توان این تناظرها را به حالت ناجابجایی گسترش داد. این بخش هدف این پایان‌نامه را در بدست آوردن یک تصویر هندسی از مفاهیم C^*-جبرها به‌تصویر می‌کشد. در پایان با آوردن مقاله الیوت و کاوامورا [۴] این پایان‌نامه را به‌پایان می‌رسانیم. امید است این پایان‌نامه بتواند زمینه‌های مشترک میان هندسه و آنالیز را بازگو کند.

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱.۱ فضاهای توپولوژیک

در این بخش به مطالعه فضاهای توپولوژیک می‌پردازیم و فضاهای منظم[۱] و نرمال[۲] تعریف می‌شوند. عمده توجه ما به لم اریزن[۳] خواهد بود. سپس به قضیه گسترش تیتزه[۴] و افراز یکه[۵] خواهیم پرداخت. در بخش مربوط به فضاهای یکنواخت[۶] می‌توان به این واقعیت که هر فضای هاسدورف موضعا فشرده[۷]، یک فضای یکنواخت است، پرداخت.
مرجع ما برای مطالب این فصل کتاب توپولوژی مانکرز [۱۰] خواهد بود.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد با این خاصیت که هر مجموعه تک نقطه‌ای در آن بسته است. دراین‌صورت:
گوییم X هاسدورف[۸] است، اگر برای هر دو نقطه متمایز مانند p و q، دو زیرمجموعه باز مجزا مانند U و V موجود باشند به‌طوری‌که $p \in U$ و $q \in V$.
گوییم X منظم است، اگر برای هر زیرمجموعه بسته A و نقطه p خارج آن، دو باز مجزا مانند U و V موجود باشند به‌طوری‌که $A \subseteq U$ و $p \in V$.
گوییم X نرمال است، اگر برای هر دو زیرمجموعه بسته و مجزای A و B، دو باز مجزا مانند U و V موجود باشند به‌طوری‌که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$.

[۱] regular spaces
[۲] normal
[۳] Urysohn lemma
[۴] Tietze extension
[۵] partition of unity
[۶] uniform space
[۷] locally compact hausdorf
[۸] hausdorf

از آن‌جا که در بالا این فرض را آوردیم که هر نقطه یک مجموعه بسته باشد، پس به‌وضوح هر فضای نرمال، منظم است و هر فضای منظم، هاسدورف است. از آن‌جا که در تعریف بالا، شرایطی در ارتباط با جدا کردن مجموعه‌ها و نقاط مطرح است، به اصول بالا، اصول جدا سازی می‌گویند.

لم ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد با این خاصیت که هر نقطه آن بسته است. در این‌صورت:
الف. X منظم است اگر و تنها اگر برای هر نقطه p و همسایگی U از آن یک همسایگی V از p موجود باشد با این شرط که $\overline{V} \subseteq U$.
ب. X نرمال است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه بسته A و هر همسایگی U از A یک همسایگی V از A موجود باشد با این شرط که $\overline{V} \subseteq U$.

برهان. الف. فرض کنید X منظم است. اگر p یک نقطه از X باشد و U یک همسایگی از آن باشد آن‌گاه با فرض $A = U^c$ همسایگی‌های V از p و $V_۱$ از A موجودند به‌طوری‌که $V \cap V_۱ = \emptyset$. چون $V_۱$ باز است پس $V_۱^c$ بسته است. بنابراین $\overline{V} \subseteq V_۱^c \subseteq U$.
برعکس فرض کنید که برای هر نقطه p و همسایگی U از آن یک همسایگی V از p با شرط $\overline{V} \subseteq U$ موجود باشد. نشان می‌دهیم که X منظم است. فرض کنید p یک نقطه و A یک مجموعه بسته باشد. ازاین‌صورت A^c باز است و طبق فرض همسایگی V از p موجود است به‌طوری‌که $\overline{V} \subseteq A^c$. حال فرض کنید $U = \overline{V}^c$ در این‌صورت U و V دو همسایگی مناسب برای احراز شرایط منظم بودن را به ما می‌دهند.
ب. اگر X نرمال باشد و A یک زیر مجموعه بسته باشد و $A \subseteq U$ باز باشد. پس $B = U^c$ بسته است. از نرمال بودن فضا نتیجه می‌شود که باز V شامل A و $V_۱$ شامل B موجودند به‌طوری‌که $V \cap V_۱ = \emptyset$. در این‌صورت $\overline{V} \subseteq V_۱ \subseteq U$.

برعکس فرض کنید که برای هر زیر مجموعه بسته مانند A و همسایگی U از A یک همسایگی V از A موجود باشد به‌طوری‌که $\overline{V} \subseteq U$. نشان می‌دهیم که X نرمال است. فرض کنید که A و B دو زیر مجموعه بسته و مجزا از X باشند. حال B^c باز است و شامل A است. پس بنابر فرض همسایگی U از A موجود است به‌طوری‌که $\overline{U} \subseteq B^c$. حال با فرض $V = \overline{U}^c$، U و V دو همسایگی مناسب برای احراز شرایط نرمال بودن را به ما می‌دهند و حکم تمام است. □

قضیه ۱.۱.۱. [۱۰] الف. هر زیرفضا از یک فضای هاسدورف، هاسدورف است و حاصل ضرب فضاهای هاسدورف نیز هاسدورف است.
ب. هر زیر فضا از یک فضای منظم، منظم است و حاصل ضرب فضاهای منظم، منظم است.

لازم به ذکر است که زیر فضای فضاهای نرمال، نرمال است ولی حاصل ضرب فضاهای نرمال لزوما نرمال

نیست.
برای دیدن مثال‌هایی از فضاهای منظم که نرمال نیستند به [۱۰] مراجعه کنید.

قضیه ۲.۱.۱. [۱۰] هر فضای منظم با یک پایه شمارا، نرمال است.

قضیه ۳.۱.۱. [۱۰] هر فضای متری پذیر، نرمال است.

لم ۲.۱.۱. اگر Y یک زیرفضای فشرده از فضای هاسدورف X باشد و x_0 در Y نباشد، آنگاه مجموعه‌های باز و مجزای U و V موجود هستند به‌طوری‌که به ترتیب شامل x_0 و Y می‌باشند.

برهان. چون X هاسدورف است، برای هر $y \in Y$ همسایگی‌های مجزای V_y و U_y به ترتیب از y و x_0 موجود می‌باشند. از آن‌جایی‌که Y فشرده است، پوشش متناهی $V_{y_1}, \cdots, V_{y_n}$ از Y موجود است. حال با فرض $V = \bigcup V_{y_i}$ و $U = \bigcap U_{y_i}$ به همسایگی‌های مورد نظر می‌رسیم. □

قضیه ۴.۱.۱. هر فضاهای فشرده و هاسدورف، منظم هستند.

برهان. از آن‌جا که زیرفضاهای بسته فضاهای فشرده و هاسدورف، فشرده هستند پس با بکاربردن لم ۲.۱.۱ قضیه ثابت می‌شود. □

قضیه ۵.۱.۱. فضاهای فشرده و هاسدورف، نرمال هستند.

برهان. فرض کنید X یک فضای فشرده و هاسدورف باشد. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه بسته و مجزای X باشند. بنابر ۴.۱.۱، X منظم است. پس برای هر $a \in A$، همسایگی‌های مجزای U_a و V_a به ترتیب شامل a و B موجودند. چون A فشرده است پس $a_1, \cdots, a_n$ موجودند به‌طوری‌که $U_{a_1}, \cdots, U_{a_n}$، A را می‌پوشاند. قرار می‌دهیم

$$U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n} \qquad , \qquad V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_n}$$

در این‌صورت U و V بازهای مجزا و بترتیب شامل A و B می‌باشند. این برهان نرمال بودن X را به پایان می‌رساند. □

لم ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای موضعا فشرده و هاسدورف باشد. اگر X فشرده نباشد قرار می‌دهیم $X^+ = X \cup \{\infty\}$ که در آن ∞ یک نقطه مجزا از X است. و توپولوژی X^+ را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که همه بازهای X در این‌جا نیز باز باشند و برای هر زیرفضای فشرده A، $A^c \cup \{\infty\}$ نیز باز باشند. در این‌صورت X^+ فشرده است و نگاشت شمول $i : X \longrightarrow X^+$ هومیومورفیسم است یعنی یک به یک باز و پیوسته و نه لزوما پوشا است.

برهان. بنابر تعریف توپولوژی X^+، i باز است. حال اگر یک باز X^+ مانند U را در نظر بگیریم. اگر U شامل ∞ نباشد که به وضوح تصویر معکوس آن باز خواهد بود. اگر U شامل ∞ باشد پس U به‌صورت اجتماع A^c با ∞ است که در آن A فشرده است. حال $i^{-1}(U) = A^c$ که به روشنی باز است. پس i پیوسته نیز هست. یک به یکی i نیز آشکارا برقرار است.
برای فشردگی فرض کنید $\{U_i\}$ یک پوشش باز X باشد. بنابراین i ای موجود است که $\infty \in U_i$. اینک بنابر تعریف بازهای X^+ Aی فشرده‌ای هست که $U_i^c = A$. چون A فشرده است پس اندیس‌های $j_1, \cdots, j_n$ موجودند که $U_{j_1}, ..., U_{j_n}$، A را می‌پوشاند. اینک آشکارا $U_i, U_{j_1}, \cdots, U_{j_n}$، X^+ را می‌پوشانند. و این فشردگی X^+ را نشان می‌دهد. □

تعریف ۲.۱.۱. اگر X یک فضای موضعا فشرده و هاسدورف باشد که فشرده نیست در این‌صورت X^+ را فشرده سازی تک نقطه‌ای X می‌نامیم.

قضیه ۶.۱.۱. هر فضای موضعا فشرده و هاسدورف نرمال است.

برهان. فرض کنید که X یک فضای موضعا فشرده و هاسدورف باشد. در این‌صورت X^+ بنابر ۵.۱.۱ نرمال است. اما $X \subseteq X^+$ است و زیرفضاهای فضاهای نرمال نرمال هستند. □

حال به یکی از عمیق‌ترین قضایای توپولوژی می‌رسیم. لم اریزن، لم پر کاربردی است که همه جا چه به صورت مستقیم و چه غیر مستقیم خود را نشان می‌دهد. ایده اثبات آن در این است که ما با حفظ ترتیب شمولی می‌توانیم یک خانواده از بازهای اطراف یک نقطه را با بازه $[0, 1]$ اندیس‌گذاری کنیم. همین قدرت اندیس‌دار کردن بازهای حول یک نقطه در فضاهای نرمال به ما کمک می‌کند که این فضاها را به صورت فضاهای یکنواخت ببینیم.

قضیه ۷.۱.۱. [۱۰] فرض کنید X یک فضای نرمال باشد. همچنین A و B دو زیرفضای بسته و مجزای X باشند. فرض کنید $[a, b]$ یک بازه بسته در اعداد حقیقی باشد. در این‌روی نگاشت پیوسته

$$f : X \longrightarrow [a, b]$$

موجود است به‌طوری‌که $f(x) = a$ برای هر x در A، و $f(x) = b$ برای هر x در B.

قضیه ۸.۱.۱. (قضیه گسترش تیتزه).[۱۰] فرض کنید X یک فضای نرمال باشد. فرض کنید A یک زیرفضای بسته X باشد. الف. هر نگاشت پیوسته از A بتوی بازه بسته $[a, b]$ از $\mathbb{R}$ می‌تواند به یک نگاشت پیوسته از تمام X بتوی $[a, b]$ گسترش یابد.
ب. هر نگاشت پیوسته از A بتوی $\mathbb{R}$ می‌تواند به یک نگاشت پیوسته از X بتوی $\mathbb{R}$ گسترش یابد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید $\{U_۱, \cdots, U_n\}$ یک پوشش باپایان از فضای نرمال X باشد. یک خانواده اندیس گذاری شده از نگاشت‌های پیوسته

$$\phi_i : X \longrightarrow [۰, ۱] \qquad (i = ۱, \cdots, n),$$

یک افراز یکه ساخته شده با $\{U_i\}$ نامیده می‌شود، اگر

$$(۱) \quad support(\phi_i) \subset U_i \ (i = ۱, \cdots, n).$$

$$(۲) \quad \Sigma_{i=۱}^{n} \phi_i(x) = ۱ \ \ (x \in X).$$

قضیه ۹.۱.۱. (وجود افراز یکه[۱]) فرض کنید $\{U_۱, \cdots, U_n\}$ یک پوشش باپایان از فضای نرمال X باشد. دراین‌صورت یک افراز یکه ساخته شده با $\{U_i\}$ وجود دارد.

برهان. گام ۱. نخست ما نشان می‌دهیم که می‌توانیم از روی پوشش $\{U_i\}$ یک پوشش باز $\{V_۱, \cdots, V_n\}$ روی X بسازیم بگونه‌ای که برای هر i، $\overline{V}_i \subset U_i$.

ما این کار را بکمک استقرا انجام می‌دهیم. نخست، یادآور می‌شویم که مجموعه

$$A = X - (U_۲ \cup \cdots \cup U_n)$$

زیرمجموعه بسته‌ای از X هست. از آن‌جاکه $\{U_۱, \cdots, U_n\}$، X را می‌پوشاند، مجموعه A مشمول در مجموعه باز $U_۱$ است. با توجه به نرمال بودن، می‌توان مجموعه باز $V_۱$ مشمول در A را بگونه‌ای انتخاب کرد که $\overline{V}_۱ \subset U_۱$.
آن‌گاه مجموعه $\{V_۱, U_۲, \cdots, U_n\}$، X را می‌پوشاند.

در حالت کلی، فرض کنید مجموعه‌های باز $V_۱, \cdots, V_{k-۱}$ بگونه‌ای باشند که

$$\{V_۱, \cdots, V_{k-۱}, U_k, U_{k+۱}, \cdots, U_n\}$$

X را بپوشاند. فرض کنید

$$A = X - (V_۱ \cup \cdots \cup V_{k-۱} \cup U_{k+۱} \cup \cdots \cup U_n).$$

آن‌گاه A زیرمجموعه بسته‌ای از X است که مشمول در مجموعه باز U_k می‌باشد. V_k را بگونه‌ای انتخاب کنید مشمول A باشد و $\overline{V}_k \subset U_k$. آن‌گاه $\{V_۱, \cdots, V_{k-۱}, V_k, U_{k+۱}, \cdots, U_n\}$، X را می‌پوشاند. در گام nام از استقرا، گزاره ما ثابت می‌شود. گام ۲. اینک ما قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $\{U_۱, \cdots, U_n\}$ یک پوشش باز از X باشد. یک پوشش باز $\{V_۱, \cdots, V_n\}$ از X را بگونه‌ای که $\overline{V}_i \subset U_i$ برای هر i انتخاب می‌کنیم. سپس

[۱] partition of unity

یک پوشش باز $\{W_1, \cdots, W_n\}$ از X را بگونه‌ای که $\overline{W}_i \subset V_i$ برای هر i انتخاب می‌کنیم. با کمک لم اریزن، برای هر i نگاشت پیوسته

$$\psi_i : X \longrightarrow [0, 1]$$

بگونه‌ای که $\psi_i(\overline{W}_i) = \{1\}$ و $\psi_i(X - V_i) = \{0\}$. از آن‌جایی‌که $\psi_i^{-1}(R - \{0\})$ مشمول در W_i است، ما داریم

$$support(\psi_i) \subset \overline{V}_i \subset U_i.$$

از آن‌جاکه مجموعه $\{W_i\}$، X را می‌پوشاند، مجموع $\Psi(x) = \Sigma_{i=1}^{n} \psi_i(x)$ برای هر x مثبت است. بنابراین، ما می‌توانیم تعریف کنیم، برای هر j

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)}.$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که نگاشت‌های $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ همان افراز یکه مطلوب می‌باشند. □

۲.۱ فضاهای یکنواخت

برای نمایش C^*-جبرها به فضاهای یکنواخت[1] برخورد می‌کنیم و شرط پیوستگی یکنواخت برای توابع مورد بررسی لازم می‌شود. پس تعاریف و مقدمات لازم برای این فضاها را در این‌جا می‌آوریم. فضاهای متریک حالت خاصی از آن‌چیزی است که ما آن‌را فضای یکنواخت می‌نامیم. برای مطالعات بیشتر کتاب‌های استاندارد توپولوژی مانند [۱۲] پیشنهاد می‌شود. مرجع ما در این بخش کتاب الپرانتیس [۱] می‌باشد.
پیش از آن‌که فضاهای یکنواخت را تعریف کنیم، فضای متریک (X, d) را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$U(\varepsilon) = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

دراین‌صورت هر $U(\varepsilon)$ یک رابطه دوتایی روی X است و یک زیرمجموعه باز از $X \times X$ است. خانواده $\{U(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ خاصیت‌های زیر را دارا می‌باشد:

۱. $\bigcap_{\varepsilon > 0} U(\varepsilon) = \{(x, x) : x \in X\}$.
۲. $U(\varepsilon_1) \cap U(\varepsilon_2) = U(\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\})$.
۳. $U(\varepsilon) = U^{-1}(\varepsilon)$، که در آن $U^{-1}(\varepsilon) = \{(x, y) : (y, x) \in U(\varepsilon)\}$.

[1] uniform space

۴. $U(\varepsilon/۲) \circ U(\varepsilon/۲) \subset U(\varepsilon)$، که در آن $\circ$ همان ترکیب روابط است یعنی
$$U(\varepsilon/۲) \circ U(\varepsilon/۲) = \{(x,z) | \exists y, (x,y) \in U(\varepsilon/۲), (y,z) \in U(\varepsilon/۲)\}$$
۵. $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : (x,y) \in U(\varepsilon)\}$.

یادآوری می‌کنیم که خانواده $\{U(\varepsilon) : \varepsilon > ۰\}$ یک پایه فیلتر است (این یعنی، شامل مجموعه تهی نیست و خاصیت اشتراک متناهی را داراست).
ما می‌توانیم تعریف پیوستگی یکنواخت را با این مجموعه‌ها انجام دهیم. یعنی، یک نگاشت $f : X \to Y$ بین فضاهای متریک پیوسته یکنواخت است اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، یک $\delta > ۰$ موجود باشد بگونه‌ای که $(x,y) \in U_X(\delta)$ نتیجه دهد که $(f(x), f(y)) \in U_Y(\varepsilon)$. همچنین یک دنباله $\{x_n\}$ کوشی است اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، یک nای طبیعی باشد بگونه‌ای که اگر $k, m > n$ نتیجه دهد $(x_k, x_m) \in U(\varepsilon)$. فضاهای یکنواخت معرفی شدند تا مفهوم نگاشت‌های پیوسته یکنواخت را تعمیم دهند.
بگذارید تا یکنواختی قطری یا یکنواختی روی یک مجموعه ناتهی X را با یک خانواده ناتهی $\mathbb{U}$ از زیرمجموعه‌های $X \times X$ بدین صورت تعریف کنیم:

۱. $U \in \mathbb{U}$ نتیجه دهد که $\{(x,x) \in X \times X : x \in X\} \subset U$.
۲. $U_۱, U_۲ \in \mathbb{U}$ نتیجه دهد $U_۱ \cap U_۲ \in \mathbb{U}$.
۳. $U \in \mathbb{U}$ نتیجه می‌دهد که $V \circ V \subset U$ به ازای یک $V \in \mathbb{U}$.
۴. $U \in \mathbb{U}$ نتیجه دهد که $V^{-۱} = \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in V\} \subset U$ به ازای یک $V \in \mathbb{U}$.
۵. $U \in \mathbb{U}$ و $U \subset V$ نتیجه دهد که $V \in \mathbb{U}$.

یادآوری می‌کنیم که یک یکنواختی یک فیلتر است و یک پایه برای یکنواختی $\mathbb{U}$ یک پایه فیلتر برای $\mathbb{U}$ در $X \times X$ است. برای یک فضای متریک (X,d)، مجموعه $U(\varepsilon)$ که در بالا گفته شد یک پایه برای یکنواختی متریک روی X است.
یک یکنواختی مانند $\mathbb{U}$ روی یک مجموعه ناتهی X یک توپولوژی را این‌چنین تعریف می‌کند. یک $U \in \mathbb{U}$ را بگیرید، قرار دهید $U[x] = \{y \in X : (x,y) \in U\}$. دراین‌صورت مجموعه $\{U[x] : U \in \mathbb{U}\}$ یک پایه همسایگی در x است. توپولوژی بدست آمده با این پایه همسایگی را توپولوژی تولید شده با $\mathbb{U}$ می‌نامند. یک مجموعه G در این توپولوژی باز است اگر و تنها اگر برای هر $x \in G$ یک $U \in \mathbb{U}$ موجود باشد بگونه‌ای که $U[x] \subset G$.

لم ۱.۲.۱. توپولوژی بدست آمده با $\mathbb{U}$ هاسدورف است اگر و تنها اگر $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U = \{(x,x) : x \in X\}$.

برهان. فرض کنید این توپولوژی هاسدورف باشد و $x, y \in X$ بگونه‌ای که $x \neq y$. دراین‌صورت $U, V \in \mathbb{U}$ موجودند که $U[x] \cap V[y] = \emptyset$. قرار می‌دهیم $W = U \cap V$ دراین‌صورت $W[x] \cap W[y] = \emptyset$ بنابراین $(x, y) \notin W$ پس $(x, y) \notin \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ و این به ما می‌گوید که $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U = \{(x, x) : x \in X\}$.

برعکس فرض کنید $\cap \mathbb{U} = \{(x, x) : x \in X\}$ و $x, y \in X$ بگونه‌ای که $x \neq y$. دراین‌صورت چون $(x, y) \notin \cap \mathbb{U}$ پس $U \in \mathbb{U}$ موجود است بگونه‌ای که $(x, y) \notin U$. همچنین بنابر خاصیت ۴ از فضاهای یکنواخت $V \in \mathbb{U}$ موجود است بگونه‌ای که $V^{-1} \subset U$ بنابراین $(y, x) \notin V$. حال با فرض $W = U \cap V$ داریم که $(x, y) \notin W$ و $(y, x) \notin W$ اینک بنابر خاصیت ۳ از یکنواختی $V \in \mathbb{U}$ موجود است بگونه‌ای که $V \circ V \subset W$. اینک با قرار دادن $G = V \cap V^{-1}$ نشان می‌دهیم که $G[x] \cap G[y] = \emptyset$.

فرض کنید $z \in G[x] \cap G[y]$ دراین‌صورت $(x, z) \in G$ و $(y, z) \in G$. چون G متقارن است داریم $(z, y) \in G$ پس

$$(x, y) = (z, y) \circ (x, z) \in G \circ G \subset V \circ V \subset W = U \cap V \subset U$$

که یک تناقض است و این حکم را ثابت می‌کند. □

یک نگاشت $f : (X, \mathbb{U}_X) \to (Y, \mathbb{U}_Y)$ بین دوفضای یکنواخت، پیوسته یکنواخت است اگر برای هر $U \in \mathbb{U}_Y$ یک $V \in \mathbb{U}_X$ باشد بگونه‌ای که اگر $(x, z) \in V$ داشته باشیم $(f(x), f(z)) \in U$.

لم ۱.۲.۲. هر نگاشت پیوسته یکنواخت، پیوسته است.

برهان. فرض کنید $f : (X, \mathbb{U}_X) \to (Y, \mathbb{U}_Y)$ یک نگاشت پیوسته یکنواخت باشد. فرض کنید $U[y]$ یک باز پایه در Y باشد. از آن‌جاکه f پیوسته یکنواخت است پس $V \in \mathbb{U}_X$ هست بگونه‌ای که $f(V) \subset U$. اینک قرار می‌دهیم $G = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} V[x]$ دراین‌صورت آشکارا $f(G) \subset U[y]$ و حکم تمام است. □

در این‌جا چند گزاره از کتاب ویلارد [۱۲] را می‌آوریم که آن‌ها را اثبات نخواهیم کرد.

قضیه ۱.۲.۱. [۱۲] یک یکنواختی با یک شبه متر (یعنی تمام خصوصیات یک متر را دارد غیر از احتمالا این‌که ممکن است فاصله دونقطه متمایز صفر شود) ساخته می‌شود اگر و تنها اگر یک پایه شمارا داشته باشد.

قضیه ۲.۲.۱. [۱۲] یک یکنواختی با یک متر ساخته می‌شود اگر و تنها اگر پایه شمارا داشته و هاسدورف باشد.

قضیه ۳.۲.۱. [۱۲] دو متر d و ρ روی X یک یکنواختی را تولید می‌کنند اگر و تنها اگر دو ثابت مثبت c و C موجود باشند بگونه‌ای که $cd(x, y) \leq \rho(x, y) \leq Cd(x, y)$ برای هر $x, y \in X$.

به مانند فضاهای توپولوژیک در این‌جا نیز می‌توانیم از مفهوم ضعیف‌ترین یکنواختی سخن به میان آورد.
فرض کنید X یک مجموعه دلخواه و $(Y, \mathbb{U}_Y)$ یک فضای یکنواخت باشد. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از نگاشت‌ها باشد بگونه‌ای که $f_i : X \to Y$ برای هر $i \in I$. دراین‌صورت یک یکنواختی روی X می‌توان ساخت که کم‌ترین عضو را داشته باشد با این‌حال تمام نگاشت‌های f_i در آن یکنواخت پیوسته باشند. برای این منظور یکنواختی تولید شده توسط $f_i^{-1}(U) = \{(x,z) : (f_i(x), f_i(z)) \in U\}$ که در آن $i \in I$ و $U \in \mathbb{U}$ را زمخت‌ترین(ضعیف‌ترین) یکنواختی روی X بدست آمده بکمک خانواده $\{f_i\}$ می‌نامند.
آشکارا با این یکنواختی تمام نگاشت‌های f_i پیوسته یکنواخت هستند. همچنین می‌دانیم هر یکنواختی روی X که در آن تمامf_i پیوسته یکنواخت باشند باید شامل این یکنواختی باشد.
وقتی $\mathbb{R}$ را به عنوان یک فضای متریک به یکنواختی مجهز کنیم و مجموعه‌ای از نگاشت‌ها را از X بتوی آن در نظر بگیریم روند ساخت بالا را می‌توان به مانند زیر توضیح داد:
اگر f یک نگاشت از مجموعه مورد نظر باشد و $\varepsilon > 0$ آنگاه $\{(x,y) \in X \times X : |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$ را به عنوان یک عضو یکنواختی خود معرفی می‌کنیم. مجموعه تمام این‌چنین مجموعه‌هایی به ما یک یکنواختی می‌دهد.
مثلا اگر یک فضای فشرده و هاسدورف داشته باشیم و تمام توابع پیوسته بتوی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیریم یکنواختی حاصل این خصوصیت را دارد مجموعه تمام نگاشت‌های پیوسته یکنواخت با مجموعه تمام نگاشت‌های پیوسته یکسان هستند که اثبات آن بعدا می‌آید.
قضیه زیر ارتباط میان یکنواختی و توپولوژی را بگونه کامل آشکار می‌کند.

قضیه ۴.۲.۱. [۱۲] یک فضای توپولوژیک X با یک یکنواختی ساخته می‌شود اگر و تنها اگر کاملا منظم باشد. یعنی برای هر زیرمجموعه بسته A و هر نقطه p یک نگاشت پیوسته $f : X \longrightarrow [0,1]$ موجود باشد که $f(A) = \{1\}$ و $f(p) = 0$.

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد. اگر $\mathbb{U}$ یکنواختی تولید شده بوسیله $C(X)$ (مجموعه همه نگاشت‌های پیوسته از X بتوی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد دراین‌صورت مجموعه همه نگاشت‌های پیوسته یکنواخت همان $C(X)$ است.

برهان. پیش‌تر در ۲.۲.۱ نشان داده‌ایم که هر نگاشت پیوسته یکنواخت، پیوسته است. پس تنها باید نشان دهیم که هر نگاشت پیوسته نیز پیوسته یکنواخت است.
اگر $f : X \to \mathbb{R}$ یک نگاشت پیوسته باشد بنابر تعریف یکنواختی $\mathbb{U}$ روی X، f پیوسته یکنواخت نیز هست که این برهان را تمام می‌کند. □

در این‌جا به ارایه یک قضیه و ایده‌های اثبات آن می‌پردازیم.

قضیه ۶.۲.۱. فرض کنید X یک فضای فشرده و هاسدورف باشد. اگر $\mathbb{U}$ زمخت‌ترین یکنواختی بدست آمده از $C(X)$ باشد آن‌گاه توپولوژی بدست آمده از این توپولوژی با توپولوژی نخستین روی X یکسان است.

برهان. فرض کنید $f \in C(X)$ و $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ باشد. اینک باز پایه $\{y : |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$ بنابر پیوستگی f آشکارا بازی از X است.
برای آن‌طرف قضیه به این نکته اشاره می‌کنیم که در جلوتر در بخش نظریه جابجایی به آن خواهیم پرداخت و آن این‌که اگر X یک فضای فشرده وهاسدورف باشد آن‌گاه $f^{-1}((a,b))$ که در آن $f \in C(X)$ یک زیرپایه برای توپولوژی X تشکیل می‌دهند. این بازهای پایه در توپولوژی بدست آمده از $\mathbb{U}$ نیز باز هستند. □

دو گزاره بالا این ایده را به ما می‌دهند که در فضاهای فشرده و هاسدورف می‌توان بجای توپولوژی به ساختار یکنواختی فضا توجه کرد. یعنی می‌توان به فضاهای فشرده و هاسدورف تنها به عنوان فضای یکنواخت نگاه کرد بدون آن‌که چیزی را در مورد این فضاها از دست بدهیم. این روش نگریستن به فضاهای توپولوژیک فشرده وهاسدورف جلوتر به ما کمک می‌کند تا یک نمایش مناسب برای C^*-جبرها ارایه دهیم.

۳.۱ کلاف‌های برداری

مرجع ما برای این بخش کتاب کلاف‌های برداری[۱] آلن هچر [۵] می‌باشد. این مفهوم هندسی برای مطالعه مدول‌ها و هیلبرت مدول‌ها بسیار کلیدی و اساسی است. در نهایت هدف این است که به کمک این اشیا یک نمایش برای مدول‌ها پیدا کنیم. این روش یعنی یافتن تناظر بین جبر و هندسه بسیار مفید بوده و کارآیی فراوانی خواهد داشت.
برای دادن ایده‌های کلاف‌های برداری، نخست به بردارهای مماس[۲] ۲-کره S^2 در $\mathbb{R}^3$ می‌پردازیم. در هر نقطه $x \in S^2$ یک صفحه مماس[۳] P_x وجود دارد. این یک فضای برداری ۲-بعدی با نقطه x به عنوان بردار صفر 0_x می‌باشد. بردارهای $v_x \in P_x$ را می‌توان به عنوان پیکان‌هایی با یک سر در x فرض کرد. اگر ما یک بردار v_x در P_x را بعنوان یک بردار در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیریم، آن‌گاه بنابر آنچه در جبر خطی خوانده‌ایم می‌توانیم v_x را با بردارهای موازی آن یکی بدانیم. به خصوص می‌توانیم به روشی یکتا آن را با برداری با ابتدا در مبدا $\mathbb{R}^3$ یکی بگیریم.

[۱] vector bundles
[۲] tangent vector
[۳] tangent plane

اینک می‌توانیم نگاشت $\tau : TS^2 \to \mathbb{R}^3$ را که در آن TS^2 مجموعه تمام بردارهای مماس v_x برای xهای در S^2 است را تعریف کنیم. این نگاشت آشکارا پوشاست ولی یک‌به‌یک نیست. اینک نگاشت $TS^2 \to S^2 \times \mathbb{R}^3$، $v_x \mapsto (x, \tau(v_x))$ یک به یک است و می‌توانیم به آن توپولوژی القایی از $S^2 \times \mathbb{R}^3$ را بدهیم.

بنابراین TS^2 نخست یک فضای توپولوژیک است سپس اجتماع مجزای فضاهای برداری P_x برای هر $x \in S^2$ است. بنابراین ما می‌توانیم به TS^2 با یک خانواده پیوسته از فضاهای برداری اندیس شده با S^2 نگاه کنیم.

ساده‌ترین خانواده پیوسته از فضاهای برداری ۲−بعدی پارامتری شده بوسیله S^2 همان $S^2 \times \mathbb{R}^2$ می‌باشد. آیا TS^2 نیز چنین هست؟ اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم باید بپرسیم آیا یک هومیومورفیسم[1] $h : TS^2 \to S^2 \times \mathbb{R}^2$ وجود دارد بگونه‌ای که هر صفحه P_x را به صفحه $\{x\} \times \mathbb{R}^2$ با یک یکریختی فضاهای برداری ببرد؟

به یک بعد پایین‌تر توجه می‌کنیم جایی که می‌توان به TS^1 بردارهای مماس به دایره یکه S^1 در $\mathbb{R}^2$ نگاه کرد. در این گزینه یک میدان برداری[2] ناصفر پیوسته از بردارهای مماس بر S^1 وجود دارد. اگر $x \in S^1$ یک عدد یکه مختلط باشد و v_x انتقال بردار ix از مبدا به x باشد، آن‌گاه هومیومورفیسم $S^1 \times \mathbb{R} \to TS^1$ با فرستادن (x, t) به tv_x که در آن $\{x\} \times \mathbb{R}$ به خط مماس در x با یک یکریختی خطی می‌رود نگاشت مطلوب می‌باشد. بنابراین TS^1 براستی با $S^1 \times \mathbb{R}$ یکسان است.

از این‌جا به بعد هرجا سخن از نگاشت به‌میان آمد منظور ما نگاشت پیوسته است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید که E و B دو فضای توپولوژیک باشند در این‌صورت یک کلاف برداری n−بعدی یک نگاشت $p : E \to B$ به‌همراه یک ساختار برداری حقیقی روی $p^{-1}(b)$ برای هر $b \in B$، بگونه‌ای شرط بدیهی بودن موضعی برقرار باشد: یک پوشش از B با مجموعه‌های باز U_α بگونه‌ای که یک هومیومورفیسم $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که $p^{-1}(b)$ را به $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ با یک یکریختی فضاهای برداری برای هر $b \in U_\alpha$ ببرد. هر یک از h_αها را بدیهی سازی موضعی[3] کلاف برداری می‌نامند. فضای B را فضای پایه[4] می‌نامند، E را فضای کلی[5] و فضاهای برداری $p^{-1}(b)$ تارها[6] هستند.

بگونه هم‌ارز ما می‌توانیم از کلاف‌های برداری مختلط سخن بگوییم.

در این‌جا چند مثال از کلاف‌های برداری می‌آوریم.

مثال ۱.۳.۱. کلاف برداری ضربی یا بدیهی[7] $E = B \times \mathbb{R}^n$ که در آن p تصویر[8] روی مولفه اول است.

[1]homeomorphism
[2]vector fields
[3]local trivialization
[4]base space
[5]total spaces
[6]fibers
[7]trivial bundle

مثال ۲.۳.۱. اگر E خارج‌قسمت $I\times\mathbb{R}$ با یکسان‌سازی $(\circ,t)\sim(1,-t)$ باشد، آن‌گاه تصویر $I\times\mathbb{R}\to I$ یک نگاشت $p:E\to S^1$ را القا می‌کند و (E,p,S^1) کلاف برداری ۱-بعدی یا کلاف خطی[1] است. از آن‌جایی‌که E با نوار موبیوس[2] یکسان است آن‌را کلاف موبیوس[3] می‌نامیم.

مثال ۳.۳.۱. کلاف مماسی[4] کره یکه S^n در $\mathbb{R}^{n+}$ یک کلاف برداری $p:E\to S^n$ است. جایی که $E=\{(x,v)\in S^n\times R^{n+1}|x\perp v\}$ است و ما به v بعنوان بردار مماس به S^n می‌اندیشیم. نگاشت $p:E\to S^n$ که (x,v) را به x می‌فرستد، نگاشت تصویر این کلاف برداری است.

مثال ۴.۳.۱. کلاف نرمال S^n در $\mathbb{R}^{n+1}$، یک کلاف خطی $p:E\to S^n$ است بگونه‌ای که E تشکیل شده از زوج $(x,v)\in S^n\times\mathbb{R}^{n+1}$ بگونه‌ای که v عمود بر صفحه مماس S^n در x است. به بیانی دیگر $v=tx$ به ازای $t\in\mathbb{R}$. نگاشت $p:E\to S^n$ نیز به‌صورت $p(x,v)=x$ تعریف می‌شود.

مثال ۵.۳.۱. صفحه تصویری[5] n-بعدی $\mathbb{R}P^n$، فضای تمام خطوط $\mathbb{R}^{n+1}$ گذرنده از مبدا است. از آن‌جایی‌که هر کدام از این خطوط در دو نقطه متقابل، S^n را قطع می‌کنند، ما می‌توانیم $\mathbb{R}P^n$ را با خارج‌قسمتی از S^n که هر دو نقطه متقابل را یکی می‌گیرند تعریف کنیم.
کلاف خطی طبیعی $p:E\to\mathbb{R}P^n$ که در آن E زیرفضایی از $\mathbb{R}P^n\times\mathbb{R}^{n+1}$ است که تشکیل شده از جفت‌های (l,v) با $v\in l$ و $p(l,v)=l$.

مثال ۶.۳.۱. کلاف خطی طبیعی روی $\mathbb{R}P^n$ یک مکمل متعامد دارد. فضای

$$E^{\perp}=\{(l,v)\in\mathbb{R}P^n\times\mathbb{R}^{n+1}|v\perp l\}$$

به همراه تصویر $p:E^{\perp}\to\mathbb{R}P^n$ با ضابطه $p(l,v)=l$، یک کلاف برداری با تارهایی که برابر زیرفضای عمود $l^{\perp}$ از بعد n است را تشکیل می‌دهند.

تعریف ۲.۳.۱. یک یکریختی بین کلاف‌های برداری $p_1:E_1\to B$ و $p_2:E_2\to B$ روی یک فضای پایه B یک هومیومورفیسم $h:E_1\to E_2$ بوده که هر تار $p_1^{-1}(b)$ را به تار متناظرش $p_2^{-1}(b)$ با یک یکریختی خطی می‌برد. بنابراین یک یکریختی تمام ساختارهای کلاف برداری راحفظ می‌کند. ما از نماد $E_1\approx E_2$ برای این‌که بگوییم E_1 و E_2 یکریخت هستند استفاده می‌کنیم.

[8] projection
[1] line bundle
[2] Mobius band
[3] Mobius bundle
[4] tangent space
[5] projective plane