بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رده‌بندی و رنگ‌آمیزی گراف‌های ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌های تعویض‌پذیر

سخنران: الهام شهبازی

زمان: چهارشنبه ۹۲/ ۱۱/ ۲ ساعت ۱۶ عصر

مکان: سالن کنفرانس دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر محمود بهبودی

۲– دکتر بهناز عمومی

۳– دکتر بیژن طائری

۴– دکتر عاطفه قربانی

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه تعویض‌پذیر و یکدار باشد. در این صورت ایدآل I از R را ایده‌آل پوچساز می‌گوییم هرگاه ایده‌آل ناصفر J از R وجود داشته باشد به طوری که $IJ = (0)$. مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های پوچ‌ساز حلقه‌ی R را با $\mathbb{A}(R)$ نشان می‌دهیم. گراف ایده‌آل پوچ‌کن گرافی است با مجموعه رئوس $\mathbb{A}(R)^* = \mathbb{A}(R)\setminus\{(0)\}$ که این گراف را با $\mathbb{AG}(R)$ نشان می‌دهیم و در این گراف دو رأس I و J را مجاور می‌گوییم اگر و تنها اگر $IJ = (0)$.

در این پایان‌نامه ارتباط بین خواص جبری و خواص گرافی $\mathbb{AG}(R)$ را بیان می‌کنیم. در این راستا ما به بررسی عدد خوشه‌ای و عدد رنگی گراف ایده‌آل پوچ حلقه‌ی تعویض‌پذیر R می‌پردازیم. به عنوان مثال نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه‌ی آرتینی و عدد خوشه‌ای $\mathbb{AG}(R)$ برابر ۲ باشد آن‌گاه R یک حلقه‌ی گورنشتاین است. همچنین حلقه‌های تعویض‌پذیری را که گراف ایده‌آل پوچ‌کن آنها کامل یا دوبخشی هستند، شناسایی می‌کنیم. به عنوان مثال نشان می‌دهیم که گراف ایده‌آل پوچ‌کن از یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر دوبخشی است اگر و تنها اگر $\mathbb{AG}(R)$ فاقد مثلث باشد.

کد رده‌بندی: ۰۵C۱۵، ۰۵C۶۹، ۱۳E۰۵، ۱۳E۱۰، ۱۶P۶۰

کلمات کلیدی: حلقه‌ی تعویض‌پذیر، مقسوم‌علیه صفر، پوچ‌ساز، گراف ایده‌آل پوچ‌کن، حلقه‌ی گورنشتاین

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

رده‌بندی و رنگ‌آمیزی گراف‌های ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌های تعویض‌پذیر

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

الهام شهبازی

استاد راهنما

دکتر محمود بهبودی

بهمن ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض خانم الهام شهبازی
تحت عنوان

رده‌بندی و رنگ‌آمیزی گراف‌های ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌های تعویض‌پذیر

در تاریخ ۲ /۱۱/ ۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر محمود بهبودی
۲– استاد مشاور	دکتر بهناز عمومی
۳– استاد داور۱	دکتر بیژن طائری
۴– استاد داور۲	دکتر عاطفه قربانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر فرید بهرامی

تقدیم به

روح پاکت که عالمانه به من آموختی چگونه در عرصه ی زندگی ایستادگی را تجربه کنم.

پدرم؛ اسطوره ی بزرگ زندگیم لحظه ای یادت مرا ترک نمی کند.

سپاس گزاری

سپاس خدای را که هرچه دارم از اوست. به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم.

با سپاس از مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج است و وجودش برایم همه مهر.

با تشکر از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر بهبودی که راهنمایی های صبورانه شان چون چراغی هدایت گر راهم بود

و با سپاس فراوان از همه ی کسانی که کلمه کلمه ی دانسته هایم را مدیون وجودشان هستم.

بهمن ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه تعویض‌پذیر و یکدار باشد. در این صورت ایدآل I از R را ایده‌آل پوچساز می‌گوییم هرگاه ایده‌آل ناصفر J از R وجود داشته باشد به طوری که $IJ = (0)$. مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های پوچساز حلقه‌ی R را با $\mathbb{A}(R)$ نشان می‌دهیم. گراف ایده‌آل پوچ‌کن گرافی است با مجموعه رئوس $\mathbb{A}(R)^* = \mathbb{A}(R)\backslash\{(0)\}$ که این گراف را با $\mathbb{AG}(R)$ نشان می‌دهیم و در این گراف دو رأس I و J را مجاور می‌گوییم اگر و تنها اگر $IJ = (0)$.

در این پایان‌نامه ارتباط بین خواص جبری و خواص گرافی $\mathbb{AG}(R)$ را بیان می‌کنیم. در این راستا ما به بررسی عدد خوشه‌ای و عدد رنگی گراف ایده‌آل پوچ حلقه‌ی تعویض‌پذیر R می‌پردازیم. به عنوان مثال نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه‌ی آرتینی و عدد خوشه‌ای $\mathbb{AG}(R)$ برابر ۲ باشد آن‌گاه R یک حلقه‌ی گورنشتاین است. همچنین حلقه‌های تعویض‌پذیری را که گراف ایده‌آل پوچ‌کن آنها کامل یا دوبخشی هستند، شناسایی می‌کنیم. به عنوان مثال نشان می‌دهیم که گراف ایده‌آل پوچ‌کن از یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر دوبخشی است اگر و تنها اگر $\mathbb{AG}(R)$ فاقد مثلث باشد.

کد رده‌بندی: ۰۵C۱۵، ۰۵C۶۹، ۱۳E۰۵، ۱۳E۱۰، ۱۶P۶۰

کلمات کلیدی: حلقه‌ی تعویض‌پذیر، مقسوم‌علیه صفر، پوچ‌ساز، گراف ایده‌آل پوچ‌کن، حلقه‌ی گورنشتاین

فصل ۱

مقدمه

مطالعه‌ی ساختارهای جبری مانند حلقه‌ها، گروه‌ها، نیم‌گروه‌ها و مدول‌ها به وسیله‌ی نظیر کردن آن‌ها به گراف، یکی از موضوعات مورد مطالعه در دهه‌های اخیر بوده است. برای مثال می‌توانید به مراجع [۴] و [۱۱] مراجعه کنید. در اینجا به اقتضای موضوع پایان‌نامه، اشاره‌ای کوتاه به تاریخچه‌ی مطالعه‌ی حلقه‌ها توسط گراف خواهیم داشت. این مطالعات از سال ۱۹۸۸ با مقاله‌ی بک [۱۰] آغاز شد. وی تمام عنصرهای حلقه را به عنوان رأس‌های گراف در نظر گرفت و دو رأس a و b را مجاور در نظر گرفت، هرگاه $ab = 0$، سپس به بررسی رنگ‌آمیزی این گراف‌ها پرداخت. اندرسون و نصیر [۷] در سال ۱۹۹۳ کار بک را ادامه دادند. شارما و بهاتوادکر در سال ۱۹۹۵ گراف دیگری به نام گراف هم‌ماکسیمال روی حلقه‌ی R تعریف کردند که رئوس آن عناصر R بودند. دو رأس a, b را مجاور نامیدند اگر و تنها اگر $Ra + Rb = R$. اندرسون و لوینگستون در سال ۱۹۹۸ [۶] رئوس گراف را به مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفر کاهش دادند و گراف مزبور را گراف مقسوم‌علیه صفر نامیدند. اخیرا اندرسون و بداوی [۸] در سال ۲۰۰۸ گراف جمعی حلقه‌ی R که رئوس آن عناصر R بودند را معرفی کردند. آنها دو رأس a, b را مجاور نامیدند اگر و تنها اگر $a + b \in Z(R)$. آن‌چه گفته شد، شرح مختصری بود بر مقالاتی که نقطه‌ی آغازین یک رویکرد جدید به مطالعه‌ی حلقه‌ها به وسیله‌ی گراف پرداخت اما مطالعه‌ی خواص چنین گراف‌هایی، در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته و ده‌ها مقاله در این زمینه موجود است که در این‌جا مجالی برای پرداختن به آن‌ها نیست.

اما در نظریه‌ی حلقه‌ها، خواص یک حلقه، بیش از آن‌که به عناصر آن بستگی داشته باشد، به رفتار ایده‌آل‌های آن بستگی دارد. این واقعیت ایده‌ی اصلی نگاهی جدید بر ساختارهای حلقه‌ها با نام گراف ایده‌آل پوچ‌کن می‌باشد. در این گراف که با $\mathbb{AG}(R)$ نشان داده می‌شود، رئوس گراف، ایده‌آل‌های ناصفر R هستند که دارای پوچ‌ساز غیر صفر می‌باشند و دو رأس I و J در این گراف با هم مجاورند هرگاه $IJ = (0)$.

این گراف برای اولین بار توسط بهبودی و راکعی در سال ۱۳۸۷ در مراجع [۱۱] و [۱۲] مطرح شد. بعد از مطرح شدن مفهوم گراف ایده‌آل پوچ‌کن، کارهایی در این زمینه به ترتیب زیر انجام شد.

در مرجع [۱۱] شرایط متناهی روی گراف ایده‌آل پوچ‌کن، مورد مطالعه قرار گرفت. به عنوان نمونه نشان داده شد که اگر R دامنه نباشد، آن‌گاه R نوتری است اگر و تنها اگر ایده‌آل‌های متناظر با رئوس گراف در شرط زنجیر صعودی

صدق کنند. به علاوه این مطلب ثابت شد که اگر R یک حلقه‌ی آرتینی یا تجزیه‌پذیر باشد آن‌گاه مجموعه‌ی رئوس گراف ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌ی R و مجموعه‌ی ایده‌آل‌های سره‌ی ناصفر R، دارای اندازه‌ی یکسان می‌باشند. پس گراف ایده‌آل پوچ‌کن یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر R دارای n رأس است، اگر و تنها اگر حلقه‌ی R دارای n ایده‌آل سره‌ی ناصفر باشد. در مرجع [۱۲] مطالعه‌ی گراف‌های ایده‌آل پوچ‌کن ادامه پیدا کرد و قطر این گراف مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین به رنگ‌آمیزی این گراف نیز اشاره‌ای مختصر گردید. سپس در مرجع [۵] حلقه‌هایی که گراف ایده‌آل پوچ‌کن آنها دارای گونای هندسی مثبت بودند، مشخص‌سازی شدند و اخیرا ایده‌آل‌های اول مینیمال و دورهای گراف ایده‌آل پوچ‌کن در مرجع [۲] مورد بررسی قرار گرفت.

اکنون در این پایان‌نامه که بر اساس مراجع [۱] و [۳] تنظیم گردیده است، در فصل ۳ ابتدا با بیان قضایایی نشان می‌دهیم گراف ایده‌آل پوچ‌کن چه حلقه‌هایی، یک گراف کامل خواهد شد. در ادامه‌ی این فصل حلقه‌هایی که گراف ایده‌آل پوچ‌کن آن‌ها مسیری خواهد شد را مشخص می‌کنیم و در آخر این فصل گراف ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌هایی که همه‌ی ایده‌آل‌های آن رئوس گراف هستند، شناسایی می‌کنیم.

در فصل ۴ [۳] این پایان‌نامه ابتدا به بررسی عدد خوشه‌ای و عدد رنگی گراف ایده‌آل پوچ‌کن از حلقه‌ی کسرها و سپس به بررسی عدد رنگی گراف ایده‌آل پوچ‌کن از حاصل ضرب مستقیم حلقه‌ها، می‌پردازیم. همچنین در این فصل نشان می‌دهیم که حلقه‌ی R در صورت داشتن چه ویژگی‌هایی، گراف ایده‌آل پوچ‌کن آن، یک گراف ایده‌آل پوچ‌کن کامل خواهد شد.

فصل ۲

پیش‌نیازها

۱.۲ پیش‌نیازهای جبری

در سراسر این پایان‌نامه حلقه‌ها یک‌دار و تعویض‌پذیر و مدول‌ها یک‌دار فرض می‌شوند.

حال نمادهای جبری مورد استفاده در این پایان نامه را بیان می‌کنیم.

الف) مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های ناصفر حلقه‌ی R را با نماد $\mathbb{I}(R)$ نمایش می‌دهیم.

ب) مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Spec}(R)$ نمایش می‌دهیم.

ج) مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Min}(R)$ نمایش می‌دهیم.

د) مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Max}(R)$ نمایش می‌دهیم.

و) مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R را با نماد $Z(R)$ نمایش می‌دهیم.

حال چند تعریف جبری و قضایای مربوط به آنها را که در ادامه‌ی کار مورد نیاز است، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد و I یک ایده‌آل از R باشد. در این صورت I را یک ایده‌آل پوچ‌ساز می‌گوییم هرگاه مجموعه‌ی $R \supseteq X \neq \{0\}$ وجود داشته باشد به طوری که $I = \mathrm{Ann}(X)$.

تعریف ۲.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت R را تقلیل یافته می‌گوییم، هرگاه هیچ عنصر پوچ‌توان مخالف صفری نداشته باشد. به عبارت دیگر اگر $a \in R$ به طوری که برای یک عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $a^n = 0$، آن‌گاه $a = 0$.

تعریف ۳.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایدال از R باشد. در این صورت رادیکال I را که با $\sqrt{I}$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}\ ;\ a^n \in I\}.$$

تعریف ۴.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی عناصر پوچ‌توان R را رادیکال پوچ R می‌نامیم و به صورت اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اول R تعریف می‌کنیم و با نماد $\mathrm{Nil}(R)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۵.۱.۲ اگر R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد آن‌گاه $\mathrm{Nil}(R) = (0)$.

تعریف ۶.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه و I و J دو ایده‌آل از R باشند. در این صورت ایده‌آل‌های I و J را هم-ماکسیمال می‌گوییم هرگاه داشته باشیم $I + J = R$.

قضیه ۷.۱.۲ [۹] (۱.۱۶) فرض کنیم R یک حلقه و I و J دو ایده‌آل از R باشند. در این صورت اگر $\sqrt{I}+\sqrt{J} = R$ آن‌گاه $I + J = R$.

تعریف ۸.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را رادیکال جیکوبسون R می‌نامیم و با $\mathrm{J}(R)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۹.۱.۲ [۱۷] (۸.۲۴) (لم ناکایاما) فرض کنید M یک مدول متناهی تولید روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر R و I یک ایده‌آل از R باشد به طوری که $I \subseteq J(R)$. در این صورت اگر $M = IM$ آن‌گاه $M = (0)$.

تعریف ۱۰.۱.۲ فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. در این صورت M را یک R-مدول ساده می‌گوییم هرگاه M، هیچ زیر مدول نابدیهی نداشته باشد.

تعریف ۱۱.۱.۲ ایده‌آل I از حلقه‌ی R را مینیمال می‌گوییم هرگاه I به عنوان R-مدول ساده باشد.

تعریف ۱۲.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت $\mathrm{Soc}(R)$ را مجموع همه‌ی ایده‌آل‌های مینیمال R تعریف می‌کنیم. اگر حلقه‌ی R فاقد ایده‌آل مینیمال باشد آن‌گاه $\mathrm{Soc}(R)$ را صفر تعریف می‌کنیم.

گزاره ۱۳.۱.۲ [۲۱] فرض کنیم M یک R-مدول دوری باشد. در این صورت M یک R-مدول ساده است اگر و تنها اگر $\mathrm{Ann}(M)$ یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد.

اثبات. بنا به رابطه‌ی $Rm \cong \frac{R}{\mathrm{Ann}(m)}$ اثبات به راحتی دیده می‌شود. ■

لم ۱۴.۱.۲ [۱۷] (لم بروئر) فرض کنیم I یک ایده‌آل مینیمال از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $I^2 = (0)$ یا برای یک عضو خود توان e از R داریم $I = Re$.

اثبات. فرض کنیم $I^2 \neq (0)$. در این صورت $0 \neq a \in I$ وجود دارد به طوری که $I.a \neq (0)$. در نتیجه $Ia = I$. بنابراین عنصر $e \in I$ وجود دارد که $a = ea$. حال مجموعه‌ی $A = \{x \in I \mid xa = 0\}$ را در نظر می‌گیریم. به وضوح A یک ایده‌آل از R است و $A \subseteq I$. از این رو $A = (0)$. از طرف دیگر $e^2 - e \in I$ و $(e^2 - e)a = (0)$. پس $e^2 - e = (0)$. در نتیجه وجود دارد $e \in I$ به طوری که $I = Re$. ■

قضیه ۱۵.۱.۲ [۱۶] (۲.۲) فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل یافته و P یک ایده‌آل اول از آن باشد. در این صورت P یک ایده‌آل اول مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $x \in P$، $y \in R \setminus P$ وجود داشته باشد به طوری که $xy = (0)$.

نتیجه ۱۶.۱.۲ [۱۶] فرض کنیم J یک ایده‌آل متناهی تولید از حلقه‌ی تقلیل یافته‌ی R باشد. در این صورت J مشمول در یک ایده‌آل اول مینیمال است اگر و تنها اگر $\mathrm{Ann}(J) \neq (0)$.

اثبات. فرض کنیم $J = (a_1, \dots, a_n)$. اگر J مشمول در یک ایده‌آل اول مینیمال مانند P باشد آن‌گاه طبق نتیجه‌ی ۱۵.۱.۲، $u_i \in R \setminus P$ وجود دارد به طوری که $u_i a_i = (0)$. که در آن $i = 1, \dots, n$. از این رو $u = u_1 u_2 \dots u_n$ یک عنصر ناصفر است که به $Ann(J)$ تعلق دارد. پس $\mathrm{Ann}(J) \neq (0)$. برای قسمت عکس فرض کنیم $\mathrm{Ann}(J) \neq (0)$. نشان می‌دهیم ایده‌آل اول مینیمال P از R وجود دارد به طوری که $\mathrm{Ann}(J) \nsubseteq P$.

از آن‌جایی که R یک حلقه‌ی تقلیل یافته است، بنابراین $\mathrm{Nil}(R) = (0)$. پس اگر برای هر P داشته باشیم $\mathrm{Ann}(J) \subseteq P$ آن‌گاه $\mathrm{Ann}(J) \in \cap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} P = (0)$. در نتیجه $\mathrm{Ann}(J) = (0)$ و این تناقض است. پس ایده‌آل اول مینیمال P وجود دارد به طوری که $\mathrm{Ann}(J) \nsubseteq P$. از طرفی چون $J.\mathrm{Ann}(J) = (0)$، بنابراین $J.\mathrm{Ann}(J) \subseteq P$ و چون $\mathrm{Ann}(J) \nsubseteq P$، در نتیجه $J \subseteq P$. ■

تعریف ۱۷.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت یک عضو $r \in R$، R-منظم نامیده می‌شود اگر $r \notin Z(R)$ و r نایکه باشد. یعنی R نه یکه، نه مقسوم‌علیه صفر باشد.

تعریف ۱۸.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک R-دنباله ، یک d-تایی مانند $r_1, ..., r_d$ در R است به طوری که برای هر $i \leq d$، $\overline{r_i} = r_i + R$، $\frac{R}{(r_1, r_2, ..., r_{i-1})}$-منظم باشد.

تعریف ۱۹.۱.۲ فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. درجه‌ی I در R، طول ماکسیمال R-دنباله‌ی مشمول در I است و با $\mathrm{grade}(I, R)$ نشان داده می‌شود. به ویژه اگر (R, m) یک حلقه‌ی موضعی باشد آن‌گاه درجه‌ی m در R، عمق R نامیده می‌شود و با $\mathrm{depth}(R)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲۰.۱.۲ فرض کنیم P یک ایده‌آل اول باشد. در این صورت ارتفاع P که با $\mathrm{ht}(P)$ نشان داده می‌شود، برابر با سوپریمم طول زنجیرهای $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P$ از ایده‌آل‌های اول R است به شرطی که این سوپریمم وجود داشته باشد. در غیر این صورت ∞ تعریف می‌شود. در حالت کلی اگر I یک ایده‌آل دلخواه از R باشد آن‌گاه ارتفاع I به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{ht}(I) = \mathrm{Inf}\{\mathrm{ht}(P) \mid P \in \mathrm{Spec}(R),\ I \subseteq P\}.$$

تعریف ۲۱.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت بعد R که با $\dim(R)$ نشان داده می‌شود، برابر با سوپریمم طول زنجیرهای $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_n$، از ایده‌آل‌های اول R است.

تعریف ۲۲.۱.۲ حلقه‌ی R را کوهن-مکولای می‌نامیم هرگاه برای هر ایده‌آل I از R داشته باشیم $\mathrm{grade}(I, R) = \mathrm{ht}(I)$.

تعریف ۲۳.۱.۲ [۱۳] فرض کنیم (R, m) یک حلقه‌ی موضعی آرتینی باشد در این صورت R یک حلقه‌ی گورنشتاین است اگر و تنها اگر $\dim_{R/m}(\mathrm{Ann}(m)) = 1$. یعنی بعد فضای برداری $\mathrm{Ann}(m)$ روی میدان R/m، برابر ۱ باشد.

قضیه ۲۴.۱.۲ [۱۳] فرض کنیم (R, m) یک حلقه‌ی موضعی آرتینی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند،

۱) R یک حلقه‌ی گورنشتاین است.

۲) برای هر ایده‌آل I از R، $I = \mathrm{AnnAnn}(I)$.

۳) برای هر دو ایده‌آل I و J از R، $I \cap J \neq (0)$.

تعریف ۲.۱.۲۵ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت n را که به ازای آن داشته باشیم $n.1_R = (0)$، مشخصه‌ی R می‌گوییم. در صورتی که چنین عددی وجود نداشته باشد، می‌گوییم R از مشخصه‌ی صفر است. به علاوه اگر R یک دامنه‌ی صحیح باشد آن‌گاه مشخصه‌ی R یا صفر یا عددی اول مانند p است.

تعریف ۲.۱.۲۶ فرض کنیم p یک عدد اول یا $p = (0)$ و L یک حلقه باشد. در این صورت حلقه‌ی L را حلقه‌ی ضریب می‌گوییم هرگاه یک حلقه‌ی موضعی نوتری باشد و تنها ایده‌آل ماکسیمال آن، مساوی pL و مشخصه‌ی این حلقه، توانی از p باشد.

تعریف ۲.۱.۲۷ فرض کنیم (R, m) یک حلقه‌ی موضعی و L زیر حلقه‌ای از آن باشد به طوری که داشته باشیم $\overline{R} = R/m$ و $\overline{L} = L/m$. در این صورت L برای R یک حلقه‌ی ضریب است، اگر L یک حلقه‌ی ضریب باشد و $\overline{L} = \overline{R}$. که در آن $- : R \longrightarrow R/m$ تابع استاندارد باشد.

تعریف ۲.۱.۲۸ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت R را حلقه‌ی ارزه‌ی گسسته می‌گوییم، هرگاه R یک دامنه‌ی ایده‌آل اصلی موضعی باشد.

در ادامه چند قضیه از حلقه‌های ضریب را که در مرجع [۱۴] آورده شده است، بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۱.۲۹ [۱۴] فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی باشد به طوری که ایده‌آل ماکسیمال آن پوچ‌توان باشد. در این صورت R شامل یک حلقه‌ی ضریب است.

قضیه ۲.۱.۳۰ [۱۴] فرض کنیم R یک حلقه‌ی ضریب با مشخصه‌ی p باشد که در آن p یک عدد اول یا $p = (0)$ است و L حلقه‌ی ضریب R باشد. در این صورت R یک میدان است. به‌علاوه اگر $\mathrm{char}L = p^n$ که در آن $p > 0$

و $n \geq 2$ آن‌گاه حلقه‌ی L به فرم $L = V/p^nV$ است که در آن V یک حلقه‌ی ارزه‌ی گسسته با مشخصه‌ی صفر و میدان خارج قسمتی آن با مشخصه‌ی p است.

در پایان این بخش صورت قضیه‌ی باقی‌مانده‌ی چینی، در نظریه حلقه‌ها را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳۱.۱.۲ [۲۲] فرض کنیم R یک حلقه و $I_1, \ldots, I_n$ ایده‌آل‌های هم- ماکسیمال از این حلقه باشند. در این صورت همریختی $\varphi : R \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} R/A_i$، با ضابطه‌ی $\varphi(r) = \prod_{i=1}^{n}(r + A_i)$ یک همریختی پوشاست. به ویژه چون هسته‌ی این همریختی برابر $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ می‌باشد، بنابراین $R/\bigcap_{i=1}^{n} I_i \cong \prod_{i=1}^{n} R/A_i$.

۲.۲ حلقه‌های نوتری و آرتینی

در این بخش قضایایی درباره‌ی حلقه‌های نوتری و آرتینی ارائه می‌کنیم.

نتیجه ۱.۲.۲ [۹] فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و $x_1, \ldots, x_n$ متغیر باشند. در این صورت بنا به قضیه‌ی پایه‌ای هیلبرت در مرجع [۹]، $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ نیز یک حلقه‌ی نوتری است.

گزاره ۲.۲.۲ [۹] فرض کنیم R یک حلقه‌ی آرتینی باشد. در این صورت هر عنصر آن یا مقسوم‌علیه صفر است یا وارون‌پذیر.

اثبات. فرض کنیم a یک عنصر از R باشد. در این صورت داریم $Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots$ چون حلقه‌ی R آرتینی است، بنابراین این زنجیر متوقف می‌شود. پس عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $Ra^n = Ra^{n+1}$. پس $r \in R$ وجود دارد به طوری که $a^n = ra^{n+1}$. در نتیجه $a^n(1 - ra) = 0$. در این صورت اگر $(1 - ra) = 0$ آن‌گاه $ra = 1$. پس a وارون‌پذیر است. اگر $(1 - ra) \neq 0$، از آن‌جایی که $a^0(1 - ra) \neq 0$ و $a^n(1 - ra) = 0$، بنابراین می‌توان فرض‌کنیم که n_0 کوچک‌ترین nای باشد که به ازای آن $a^{n_0}(1 - ra) = 0$. در نتیجه $a(a^{n_0-1}(1 - ra)) = 0$. پس a مقسوم‌علیه صفر است.

■

نتیجه ۳.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه‌ی آرتینی و m یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد. در این صورت $m \subseteq Z(R)$.

قضیه ۴.۲.۲ [۹] فرض کنیم R یک حلقه‌ی آرتینی باشد. در این صورت R به طور یکتا با حاصل‌ضرب تعداد متناهی حلقه‌ی موضعی آرتینی، یکریخت است.

قضیه ۵.۲.۲ [۹] فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت R آرتینی است اگر و تنها اگر یک حلقه‌ی نوتری با بعد صفر باشد.

قضیه ۶.۲.۲ [۹] فرض کنیم R یک حلقه‌ی آرتینی باشد. در این صورت رادیکال پوچ R یعنی $\mathrm{Nil}(R)$ پوچ‌توان است.

تعریف ۷.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت زیر مجموعه‌ی S از R را یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی می‌گوییم، هرگاه $۱ \in S$ و S تحت عمل ضرب بسته باشد.

تعریف ۸.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه و S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. در این صورت حلقه‌ی کسرهای R که با $S^{-۱}R$ یا R_S نمایش داده می‌شود، به صورت $S^{-۱}R = \{a/s \mid a \in R, s \in S\}$ می‌باشد. همچنین برای هر $a/s, b/t \in S^{-۱}R$ داریم $a/s = b/t$ اگر و تنها اگر $u \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $u(at - bs) = ۰$.

تعریف ۹.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه و $S = R \setminus Z(R)$. در این صورت $S^{-۱}R$ حلقه‌ی کامل نامیده و با نماد $T(R)$ نمایش داده می‌شود.

گزاره ۱۰.۲.۲ [۹] فرض کنیم R یک حلقه و S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. در این صورت همریختی حلقه‌ای

$$f : R \longrightarrow S^{-۱}R$$
$$a \longrightarrow a/۱$$

وجود دارد.

حال با توجه به گزاره‌ی ۱۰.۲.۲، دو تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۲.۲ فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. در این صورت ایده‌آل توسیع I که با نماد I^e نشان داده می‌شود، با توجه به نگاشت f در گزاره‌ی ۱۰.۲.۲ به صورت $I^e = \{a/s \mid a \in I,\ s \in S\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۲.۲.۲ فرض کنیم $S^{-۱}R$ حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S و J یک ایده‌آل از $S^{-۱}R$ باشد. در این صورت ایده‌آل انقباض J که با J^c نمایش داده می‌شود، با توجه به نگاشت f در گزاره‌ی ۱۰.۲.۲ به صورت $J^c = \{r \in R \mid r/۱ \in J\}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱۳.۲.۲ [۱۷] (۳.۱۱) فرض کنیم R یک حلقه و $S^{-۱}R$ حلقه‌ی کسرهای R باشد، که در آن S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R است. در این صورت ایده‌آل‌های اول $S^{-۱}R$ در تناظر یک به یک با ایده‌آل‌های اول R است که با S هیچ اشتراکی ندارند.

تعریف ۱۴.۲.۲ فرض کنیم P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R باشد و $S = R \setminus P$. در این صورت حلقه‌ی کسرهای R یعنی $S^{-۱}R$ را با نماد R_P نیز نمایش می‌دهیم.

نتیجه ۱۵.۲.۲ فرض کنیم P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R باشد. در این صورت مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول R_P در تناظر یک به یک با مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول R که مشمول در P هستند، می‌باشد.

مثال ۱۶.۲.۲ [۱۷] فرض کنیم R یک حلقه و P یک ایده‌آل اول R باشد. در این صورت R_P یک حلقه‌ی موضعی است.

می‌دانیم $R_P = S^{-۱}R$. حال مجموعه‌ی $m = \{a/s \mid a \in P\}$ را تعریف می‌کنیم. در این صورت m یک ایده‌آل از R_P است. اگر $b/t \notin m$ آنگاه $b \in S$. پس b/t یک عنصر یکه از R_P است. در نتیجه اگر I یک ایده‌آل از R باشد به طوری که $I \nsubseteq m$، آنگاه I شامل یک عنصر یکه از R_P است. از این رو $I = R_P$. پس R_P یک حلقه‌ی موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال m است.

قضیه ۱۷.۲.۲ [۲۰] فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل یافته و $\{P_\alpha\}_{\alpha \subset \Lambda}$ مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های اول مینیمال R باشد. دراین صورت،

۱) R_{P_α} میدان خارج قسمتی از R/P_α است.

۲) $\cup_\alpha P_\alpha$ مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه‌های صفر R است.

اثبات. فرض کنیم $O_\alpha = \{r \in R \mid \exists u \in R \setminus P_\alpha \ ; \ ur = ۰\}$. پس O_α یک ایده‌آل از R است و چون P_α یک ایده‌آل اول است، بنابراین $O_\alpha \subseteq P_\alpha$. ازآن‌جایی که طبق مثال ۱۶.۲.۲ داریم $P_\alpha R_{P_\alpha}$ تنها ایده‌آل اول از R_{P_α} است، پس هر عضو $P_\alpha R_{P_\alpha}$ پوچ‌توان است. یعنی اگر $p \in P_\alpha$، در این صورت $u \in R \setminus P_\alpha$ و $n > ۰$ وجود دارد به طوری که $up^n = (۰)$. در نتیجه $(up)^n = (۰)$ و چون R یک حلقه‌ی تقلیل یافته است، پس $ur = ۰$. از این رو