دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

بررسی زیررده‌ای از توابع تقریبا محدب

نگارش

عاطفه عباسی

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

دکتر ابراهیم هاشمی

شهریور ۹۰

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

قبل از هرچیزخداوند را شاکرم که این موهبت را نصیب من نمود تا در وادی علم و دانش ، قدمی هرچند ناچیز بردارم.

ازاستاد راهنمایم آقای دکتر زیره به خاطرکمکهای بی‌دریغش صمیمانه تشکر می‌کنم .

همچنین مراتب تشکر و قدردانی خود را از استاد مشاورم آقای دکتر ابراهیم هاشمی ابراز می‌دارم.

از خداوند منان آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون برای این اساتید خواهانم.

چکیده

در این پایان نامه، به معرفی زیر رده‌های K_s، $K_s(\gamma)$، $K_s(\alpha,\beta)$... از رده‌ی توابع تقریبا محدب می‌پردازیم. در این خصوص، کران‌هایی برای توابع متعلق به این رده‌ها و مشتقات آنها می‌یابیم بعلاوه به تعیین کرانی برای ضرایب پرداخته و یک سری قضایا و روابط دیگری را برای رده‌های مذکور بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توابع تحلیلی، توابع تک ارز، توابع ستاره گون، توابع محدب، توابع تقریبا محدب

پیشگفتار

تابع یک به یک را تک ارز می‌نامند. از نظرتحلیلی تابع تک ارز مشتق مخالف صفردارد و از نظر هندسی تابع تک ارز خم های ساده را به خم های ساده می نگارد. مطالعات و تحقیقات فراوانی در جهت چگونگی ترکیب این خواص و خواص دیگر برای اثبات قضایایی که سرشت هندسی یا تحلیلی داشته باشند انجام گرفت.

توابعی که هم تحلیلی و هم تک ارزند، واجد خاصیت جالبی هستند که میدانهای همبند ساده را بر میدان های همبند ساده می‌نگارند.

سیلورمن [1] [۱۹۷۵] رده‌ی توابعی که در دیسک یکه‌ی باز تحلیلی و تک ارز می‌باشند را S نامید و با شرح کاملی از زیر رده‌های این رده به بررسی قضایای مربوط پرداخت.

گو [2] [۲۰۰۵] زیر رده‌ی K_s را مورد مطالعه قرار داد و افراد دیگری زیر رده‌ی فوق را تعمیم داده‌اند ونتایج بدست آمده توسط سیلورمن بر روی رده‌ی S را روی رده‌ی مذبور و تعمیم‌های آن بررسی کردند و بهترین نتایج را گرفتند. ما نیز در این پایان نامه دو زیر رده از رده‌ی توابع تقریبا محدب را معرفی و سپس چند قضیه را بیان و اثبات می‌کنیم.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که درفصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، به معرفی زیر رده‌ی K_s از رده‌ی توابع تقریبا محدب و چند تعمیم از آن پرداخته شده است.

در فصل سوم، دو زیر رده از رده‌ی توابع تقریبا محدب را معرفی می‌کنیم و قضایایی را در رابطه با این دو زیر رده بیان و اثبات می‌کنیم.

مراجع اصلی استفاده شده در این پایان نامه عبارتند از [۵] و [۱۸] و [۱۹] و [۲۰].

---
[1] Silverman
[2] Gao

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها ومفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

در این پایان نامه ازعلائم زیر استفاده می‌شود.

$\mathbb{N} = \{۱, ۲, \ldots\}$

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$: مجموعه اعداد مختلط

$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$

$U(r, z_\circ) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_\circ| \leq r\}$

این بخش شامل تعاریف و مفایم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. تابع $f(z)$ را در $z_\circ$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_\circ$ مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۱. یک مجموعه همبند و باز میدان نامیده می‌شود. آنرا با نماد D نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. نقطه $z_\circ$ را نقطه تکین تابع $f(z)$ گوییم اگر $f(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی نباشد ولی در هر همسایگی $z_\circ$ نقطه‌ای موجود باشدکه $f(z)$ در آن تحلیلی باشد.

تعریف ۴.۱.۱. نقطه تکین $z_\circ$ تنها نامیده می‌شود اگر همسایگی حول این نقطه موجود باشدکه $f(z)$ در تمام نقاط این همسایگی تحلیلی باشد.

قضیه ۵.۱.۱. (**ریمان** [1])[۱۵] فرض کنید $z_\circ$ نقطه تکین تنهای $f(z)$ باشد و $f(z)$ در همسایگی محذوف $z_\circ$ کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ را می‌توان در $z_\circ$ به گونه‌ای تعریف کرد که در این نقطه تحلیلی باشد.

تعریف ۶.۱.۱. تابع دو متغیره $u(x,y)$ را در D همساز گوییم اگر در سراسر D دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادله با مشتقات جزئی زیر صدق کند:

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} = \circ.$$

اثبات قضیه (۷.۱.۱) و (۸.۱.۱) و نتیجه (۹.۱.۱) را می‌توان در[۱۵] مشاهده نمود.

قضیه ۷.۱.۱. فرض کنید تابع $u(z)$ در دامنه‌ی همبند ساده ای شامل‌دیسک $U(r, z_\circ)$ همساز باشد، آنگاه

$$u(z_\circ) = \frac{۱}{۲\pi} \int_\circ^{۲\pi} u(z_\circ + re^{i\theta}) d\theta.$$

قضیه ۸.۱.۱. فرمول انتگرال**پواسن** [2]

فرض کنید تابع $u(z)$ در دامنه‌ی همبند ساده ای شامل دیسک $U(R, \circ)$ همساز باشد، آنگاه برای $z = re^{i\theta}$ که $r < R$، داریم:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{۱}{۲\pi} \int_\circ^{۲\pi} \frac{R^{۲} - r^{۲}}{R^{۲} - ۲rR\cos(\theta - \varphi) + r^{۲}} u(Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

نتیجه ۹.۱.۱. فرض کنید $f(z) = u(z) + iv(z)$ در دامنه‌ی همبند ساده ای شامل دیسک $U(R, \circ)$ تحلیلی باشد، آنگاه برای $z = re^{i\theta}$ که $r < R$ ، داریم :

$$v(re^{i\theta}) = \frac{۱}{۲\pi} \int_\circ^{۲\pi} \frac{۲rR\sin(\theta - \varphi)}{R^{۲} - ۲rR\cos(\theta - \varphi) + r^{۲}} u(Re^{i\varphi}) d\varphi + v(\circ).$$

تذکر ۱.۱. اگر تابع $f(z) = u + iv$ در دیسک $U(R, \circ)$ تحلیلی باشد از قضیه (۸.۱.۱) و نتیجه (۹.۱.۱)، بدست می‌آید:

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_\circ^{۲\pi} \frac{Re^{i\varphi} + re^{i\theta}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} u(Re^{i\varphi}) d\varphi + iv(\circ).$$

---

[1] Riemann
[2] poisson

تعریف ۱۰.۱.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n z^n$ که در U تحلیلی هستند و $Re\{f(z)\} > ۰$ را با P نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱.۱. فرض کنید $f(z) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n z^n$ در P باشد، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|a_n| \leq ۲$.

اثبات. اگر $f(z) = u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta})$ و $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ باشد، آنگاه

$$u(re^{i\theta}) = ۱ + \sum_{m=۱}^{\infty} (\alpha_m \cos m\theta - \beta_m \sin m\theta) r^m.$$

چون برای هر $n \neq m$

$$\int_۰^{۲\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \int_۰^{۲\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = ۰$$

و برای هر $m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_۰^{۲\pi} \sin m\theta \cos n\theta d\theta = ۰.$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\pi} \int_۰^{۲\pi} u(re^{i\theta}) \cos n\theta d\theta = \frac{۱}{\pi} \int_۰^{۲\pi} \alpha_n r^n \cos^۲ n\theta d\theta = \alpha_n r^n \qquad (۱.۱)$$

و

$$\frac{۱}{\pi} \int_۰^{۲\pi} u(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{۱}{\pi} \int_۰^{۲\pi} -\beta_n r^n \sin^۲ n\theta d\theta = -\beta_n r^n \qquad (۲.۱)$$

حال باضرب رابطه‌ی (۲.۱) در $-i$ و جمع آن با رابطه‌ی (۱.۱)، بدست می‌آید:

$$a_n r^n = (\alpha_n + i\beta_n) r^n = \frac{۱}{\pi} \int_۰^{۲\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

در نتیجه

$$|a_n|r^n \leq \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(re^{i\theta})|e^{-in\theta}|d\theta = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(re^{i\theta})d\theta. \qquad (۳.۱)$$

چون تابع $u(z)$ همساز است به‌موجب قضیه (۷.۱.۱) :

$$\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(re^{i\theta}) = ۲u(۰) = ۲. \qquad (۴.۱)$$

باجایگذاری (۴.۱) در (۳.۱) رابطه‌ی $|a_n|r^n \leq ۲$ بدست می‌آید و با $r \to ۱$ قضیه ثابت می‌گردد.

□

قضیه ۱۲.۱.۱. فرض کنید $f(z)$ در P باشد، آنگاه

$$\frac{۱-|z|}{۱+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{۱+|z|}{۱-|z|} \qquad (z \in U). \qquad (۵.۱)$$

اثبات. قرار دهید: $f(z) = u(z) + iv(z)$. بنا به تذکر (۱.۱):

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} \frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}u(Re^{i\varphi})d\varphi \qquad (|z| \leq R < ۱)$$

در نتیجه

$$|f(z)| \leq \frac{R+|z|}{R-|z|}\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(Re^{i\varphi})d\varphi. \qquad (۶.۱)$$

به‌موجب قضیه (۷.۱.۱) :

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(Re^{i\varphi}) = u(۰) = ۱. \qquad (۷.۱)$$

با جایگذاری (۷.۱) در (۶.۱)، داریم :

$$|f(z)| \leq \frac{R+|z|}{R-|z|}$$

و با $R \longrightarrow ۱$ در رابطه‌ِی بالا طرف راست نامساوی (۵.۱) ثابت می‌شود.

اثبات طرف چپ نامساوی(۵.۱) : چون برای هر $z \in U$، $f(z) \neq ۰$، تابع $g(z) = \frac{۱}{f(z)}$ در U تحلیلی است و $Reg(z) > ۰$. پس با بکاربردن طرف راست نامساوی (۵.۱) برای $g(z)$ داریم:

$$|g(z)| \leq \frac{۱+|z|}{۱-|z|}$$

در نتیجه

$$\left|\frac{۱}{f(z)}\right| \leq \frac{۱+|z|}{۱-|z|} \Longrightarrow |f(z)| \geq \frac{۱-|z|}{۱+|z|}.$$

و بدین ترتیب اثبات کامل است. □

لم ۱۳.۱.۱. فرض کنید تابع $f(z)$ در U تحلیلی باشد و $f(۰) = ۱$. اگر $Ref(z) > \alpha$ که $۰ \leq \alpha < ۱$، آنگاه

$$\frac{۱-(۱-۲\alpha)|z|}{۱+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{۱+(۱-۲\alpha)|z|}{۱-|z|} \quad (z \in U). \tag{۸.۱}$$

اثبات. قرار دهید:

$$g(z) = \frac{f(z)-\alpha}{۱-\alpha}$$

چون‌که $\alpha \neq ۱$، تابع $g(z)$ در U تحلیلی است. $g(۰) = ۱$ و $Reg(z) > \frac{\alpha-\alpha}{۱-\alpha} = ۰$. پس به‌موجب قضیه (۱۲.۱.۱):

$$|g(z)| \leq \frac{۱+|z|}{۱-|z|} \Longrightarrow \left|\frac{f(z)-\alpha}{۱-\alpha}\right| \leq \frac{۱+|z|}{۱-|z|}$$

بنابراین

$$|f(z)| - \alpha \leq \frac{(۱ + |z|)(۱ - \alpha)}{۱ - |z|}$$

درنتیجه

$$|f(z)| \leq \frac{۱ + |z|}{۱ - |z|}(۱ - \alpha) + \alpha = \frac{۱ + (۱ - ۲\alpha)|z|}{۱ - |z|}.$$

بدین ترتیب طرف راست نامساوی (۸.۱) ثابت می‌شود.

اثبات طرف چپ نامساوی (۸.۱): قراردهید:

$$g(z) = \frac{۱ - \alpha}{f(z) - \alpha},$$

چون‌که برای هر $z \in U$، $f(z) \neq \alpha$، تابع $g(z)$ در U تحلیلی است، $g(۰) = ۱$ و $Reg(z) > ۰$. پس به‌موجب قضیه (۱۲.۱.۱) :

$$|g(z)| \leq \frac{۱ + |z|}{۱ - |z|} \Longrightarrow \left|\frac{f(z) - \alpha}{۱ - \alpha}\right| \geq \frac{۱ - |z|}{۱ + |z|}$$

بنابراین

$$|f(z) - \alpha| \geq \frac{۱ - \alpha - (۱ - \alpha)|z|}{۱ + |z|} \Longrightarrow |f(z)| \geq \frac{۱ - \alpha - (۱ - \alpha)|z|}{۱ + |z|} + \alpha$$

که نتیجه می شود:

$$|f(z)| \geq \frac{۱ - (۱ - ۲\alpha)|z|}{۱ + |z|}.$$

و بدین ترتیب اثبات کامل است. □

لم ۱۴.۱.۱. (**شوارتز** [۳]) [۳] فرض کنید $f(z)$ در دیسک $U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ تحلیلی باشد و برای ثابت M، $|f(z)| \leq M$. اگر $f(z)$ در $z = ۰$ به تعداد دفعات m، صفر شود. در این صورت:

$$|f(z)| \leq \left(\frac{|z|}{R}\right)^m M \qquad (z \in U_R)$$

[۳] Schwarz

در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z)=\frac{M}{R^m}e^{i\alpha}z^m$$

به‌طوری که α ثابت است.

قضیه ۱۵.۱.۱. (**شوارتز - پیک** [۴])[۲] فرض کنید $f:U\longrightarrow U$ تحلیلی باشد، آنگاه برای هر $z\in U$:

$$\frac{|f'(z)|}{۱-|f(z)|^۲}\leq\frac{۱}{۱-|z|^۲}.$$

تعریف ۱۶.۱.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z)$ که در U تحلیلی هستند و با شرایط $f(۰)=۰$، $f'(۰)=۱$ نرمالیزه می‌گردند را با H نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $\omega(z)$ که در U تحلیلی می‌باشند و در شرایط $\omega(۰)=۰$ و $|\omega(z)|\leq|z|<۱$ صدق می‌کنند را با E نمایش می دهیم.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید توابع $f(z)$ و $F(z)$ در U تحلیلی باشند. $f(z)$ زیرترتیبی از تابع $F(z)$ است، اگر $\omega(z)\in E$ موجود باشد به‌طوری که $f(z)=F(\omega(z))$. در این صورت آنرا با $f\prec F$ نمایش می‌دهیم. درضمن اگر تابع F تک ارزباشد، آنگاه $f\prec F$ اگر و تنها اگر $f(۰)=F(۰)$ و $f(U)\subset F(U)$.

۲.۱ رده ی S

تعریف ۱.۲.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z)$ که در U تحلیلی و تک ارزند و با شرایط $f(۰)=۰$، $f'(۰)=۱$ نرمالیزه می‌گردند را با S نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f\in S$ که فرد می‌باشند را با $S^{(۲)}$ نمایش می‌دهیم.

لم ۳.۲.۱. فرض کنید $f(z)\in S$ باشد، آنگاه $z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}\in S$.

---
[۴] Schwarz-Pik

اثبات. قرار دهید : $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ و در نظر بگیرید

$$g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}=z\sqrt{1+a_2z^2+a_3z^4+\dots}.$$

تابع $g(z)$ در U تحلیلی است و $g(0)=0$ ، $g'(0)=1$.

اثبات تک ارزی: فرض کنیم $g(z_1)=g(z_2)$. در این صورت $f(z_1^2)=f(z_2^2)$ چون تابع $f(z)$ تک ارز است بنابراین $z_2^2=z_1^2$، یعنی‌که، $z_1=\pm z_2$. از آنجایی که $g(z)$ تابع فرد است، پس $z_1=-z_2$ موجب $g(z_1)=-g(z_2)$ است. بنابراین $z_1=z_2$ و تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. □

قضیه ۴.۲.۱. [۱۵] فرض کنید $g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}\in S$ باشد، آنگاه $|a_2|\leq 2$.

قضیه ۵.۲.۱. (پوشش) فرض کنید $f(z)\in S$ و برای $z\in U$، $f(z)\neq c$ که $c\in\mathbb{C}$، آنگاه $|c|\geq\frac{1}{4}$.

اثبات. قرار دهید $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ چون‌که $f(z)\neq c$، تابع

$$g(z)=\frac{cf(z)}{c-f(z)}=z+(a_2+\frac{1}{c})z^2+\dots$$

نیزمتعلق به S است. پس با بکار بردن قضیه (۴.۲.۱) برای $g(z)$ داریم:

$$\left|\frac{1}{c}+a_2\right|\leq 2\Longrightarrow|\frac{1}{c}|-|a_2|\leq 2$$

و با بکار بردن قضیه (۴.۲.۱) برای $f(z)$ نتیجه می شود:

$$\left|\frac{1}{c}\right|\leq 4\Longrightarrow|c|\geq\frac{1}{4}.$$

و قضیه ثابت است. □

لم ۶.۲.۱. فرض کنید $f(z)\in S$ و $z=re^{i\theta}$، آنگاه

$$Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}=r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|.$$

اثبات. چون‌که برای $|z| < 1$، $f'(z) \neq 0$، شاخه تابع $\log f'(z)$ در U تحلیلی است. پس

$$\frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = e^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}.$$

و با ضرب طرفین رابطه در r و محاسبه قسمت‌های حقیقی، نتیجه می شود:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| = Re \left\{ \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = Re \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}.$$

و لم ثابت می‌گردد. □

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنید $f(z) \in S$ باشد، آنگاه

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \qquad (|z| = r < 1).$$

اثبات. چون تابع

$$\omega = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z} \qquad (|z_0| < 1)$$

در U تحلیلی و تک ارز است و U را به خودش می‌نگارد. پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

نیز در U تحلیلی و تک ارز است اما $g(z)$ به رده S متعلق نیست، چون‌که $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد. در واقع

$$b_0 = g(0) = f(z_0),$$

$$b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1-|z_0|^2),$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}[f''(z_0)(1-|z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\overline{z_0}(1-|z_0|^2)].$$

با توجه به اینکه تابع

$$\frac{g(z)-b_0}{b_1} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \dots$$

در S است و با بکار بردن قضیه (۴.۲.۱) برای تابع فوق داریم : $|\frac{b_۲}{b_۱}| \leq ۲$، یعنی

$$\frac{۱}{۲}\left|\frac{f''(z_۰)}{f'(z_۰)}(۱-|z_۰|^۲)-۲\overline{z_۰}\right| \leq ۲. \tag{۹.۱}$$

چون‌که $z_۰$ عدد مختلط دلخواهی در U است، تغییر نمادی $z_۰ = z = re^{i\theta}$ را انجام می‌دهیم. سپس با ضرب طرفین (۹.۱) در $\frac{۲|z|}{۱-|z|^۲}$ داریم:

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{۲r^۲}{۱-r^۲}\right| \leq \frac{۴r}{۱-r^۲}$$

که نتیجه می‌شود:

$$\frac{۲r^۲-۴r}{۱-r^۲} \leq Re\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \leq \frac{۲r^۲+۴r}{۱-r^۲}. \tag{۱۰.۱}$$

با توجه به لم (۶.۲.۱)، رابطه‌ی (۱۰.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\frac{۲r-۴}{۱-r^۲} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| \leq \frac{۲r+۴}{۱-r^۲}. \tag{۱۱.۱}$$

با انتگرال‌یابی در (۱۱.۱) نسبت به r از ۰ تا r نتیجه می‌دهد:

$$\log(۱-r)-۳\log(۱+r) \leq \log|f'(re^{i\theta})| \leq \log(۱+r)-۳\log(۱-r)$$

و با نما رساندن رابطه‌ی بالا داریم:

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳}$$

و قضیه ثابت است. □

قضیه ۸.۲.۱. [۳] فرض کنید $f(z) \in S$ باشد، آنگاه

$$\frac{r}{(۱+r)^۲} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)^۲} \qquad (|z|=r<۱).$$

لم ۹.۲.۱. [۱۵] فرض کنید $f(z) \in S$ باشد، آنگاه

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{r}{1-r} \qquad (0<r<1).$$

قضیه ۱۰.۲.۱. فرض کنید تابع $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در S باشد، آنگاه برای هر n، $|a_n|<en$.

اثبات. از فرمول انتگرال **کشی** [۵] برای $n=2,3,\ldots$ داریم:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \qquad (0<r<1).$$

پس

$$|a_n|\leq\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

که از لم (۹.۲.۱) نتیجه می‌شود:

$$|a_n|\leq\frac{1}{r^{n-1}(1-r)}. \tag{۱۲.۱}$$

چون برای هر r در فاصله $0<r<1$ نامساوی (۱۲.۱) برقراراست، بهترین کرانی که می‌توان بدست آورد این است که در رابطه (۱۲.۱) کمینه سازی کنیم. با اینکار نتیجه می‌شود:

$$|a_n|\leq\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}=n(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}<en.$$

و اثبات کامل است. □

قضیه ۱۱.۲.۱. فرض کنید $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در S باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n، $|a_n|\leq n$.

[۵] Cauchy

اثبات. برای $z = re^{i\theta}$، $r < ۱$ قرار دهید:

$$Imf(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=۱}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌یابی از ۰ تا π نتیجه می‌شود:

$$\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} a_n r^n \sin^۲ n\theta d\theta = a_n r^n. \qquad (۱۳.۱)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+۱)\theta| = |\sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin\theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|\sin n\theta| \leq n|\sin\theta|$. لذا از رابطه‌ی (۱۳.۱) نتیجه می‌شود که:

$$|a_n r^n| \leq \frac{۲n}{\pi}\int_۰^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta. \qquad (۱۴.۱)$$

سپس نشان می‌دهیم $v(re^{i\theta}) \neq ۰$ $(۰ < r < ۱, ۰ < \theta < \pi)$:

$$۰ \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = ۲i\sum_{n=۱}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = ۲iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، می‌بایست در فاصله‌ی $۰ < \theta < \pi$ علامت جبری ثابت داشته باشد، لذا:

$$r = |a_۱ r| = \left|\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin\theta d\theta\right| = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} \left|v(re^{i\theta})\right| \sin\theta d\theta. \qquad (۱۵.۱)$$

با جایگزینی (۱۵.۱) در(۱۴.۱) رابطه‌ی $|a_n r^n| \leq nr$ بدست می‌آید و با $r \longrightarrow ۱$ قضیه ثابت می‌گردد. □

قضیه (۱۲.۲.۱) و (۱۳.۲.۱) را می‌توان در [۳] مشاهده نمود.

قضیه ۱۲.۲.۱. فرض کنید $f \in S^{(۲)}$ باشد، آنگاه

$$\frac{r}{۱+r^۲} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{۱-r^۲} \qquad (|z| = r < ۱).$$

قضیه ۱۳.۲.۱. فرض کنید $f \in S^{(۲)}$ باشد، آنگاه

$$\frac{۱-r^۲}{(۱+r^۲)^۲} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r^۲}{(۱-r^۲)^۲} \qquad (|z|=r<۱).$$

۳.۱ رده ی S^*

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به $z_۰$ ستاره گون گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به $z_۰$ وصل می‌کند در D قرار بگیرد (ر.ک ۱.۱).

تعریف ۲.۳.۱. تابع $f(z) \in S$ را نسبت به مبدا ستاره گون گوییم اگر U تحت تابع $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به مبدا ستاره گون است. این زیررده‌ی S را با S^* نمایش می‌دهیم.

لم ۳.۳.۱. فرض کنید $f(z) \in S$، در این صورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان ستاره گون بنگارد.

اثبات. ابتدا فرض کنید $f(z) \in S^*$. در نظر بگیرید $D_۱$ تصویر $|z| < ۱$ و $D_۲$ تصویر $|z| < r < ۱$ تحت تابع $f(z)$ باشد. اگر $\omega \in D_۱$، آنگاه برای $۰ < t < ۱$، $t\omega \in D_۱$ (چون $D_۱$ ستاره گون می‌باشد). پس تابع $g(z) = f^{-۱}(tf(z))$ در U تحلیلی است و در شرایط $|g(z)| < ۱$، $g(۰) = f^{-۱}(tf(۰)) = ۰$ صدق می‌کند. با بکار بردن لم شوارتز برای تابع $g(z)$ نتیجه می‌شود:

$$|g(z)| \leq |z|.$$

حال نقطه $\omega_۲ \in D_۲$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت برای نقطه $z_۲$ ای با $|z_۲| < r$، $\omega_۲ = f(z_۲)$ برای t دلخواه، $۰ < t < ۱$ داریم:

$$|f^{-۱}(t\omega_۲)| = |f^{-۱}(tf(z_۲))| = |g(z_۲)| \leq |z_۲| < r$$

و این بدین معنی است که $t\omega_۲$ در $D_۲$ قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی $\omega_۲$ ها و همه‌ی t ها، $۰ < t < ۱$ درست است، پس میدان $D_۲$ نسبت به مبدا ستاره گون است.