بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیأت داوران نسخه نهایی پایان نامه **خانم فهیمه آقامحمدی زمانی** رشته **ذرات بنیادی و نظریه میدانها** تحت عنوان **"اثر کوانتومی هال و نظریه چرن-سایمون"** را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجه کارشناسی ارشد و برگزاری جلسه دفاعیه در تاریخ **۱۳۹۱/۱۱/۲** مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱ – استاد راهنما	دکتر علی ایمان پور	دانشیار	
۲ – استاد ناظر داخلی	دکتر شاهرخ پرویزی	استادیار	
۳ – استاد ناظر داخلی	دکتر رضا عباسپور	استادیار	
۴ – استاد ناظر خارجی	دکتر امیرحسین فتح الهی	دانشیار	
۵ – نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر رضا عباسپور	استادیار	

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **فهیمه آقامحمدی زمانی** دانشجوی رشته **فیزیک** ورودی سال تحصیلی **۸۸** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم پایه** متعهد می شوم کلِیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۹۲/ ۳/ ۱۸

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **فیزیک** است که در سال **۱۳۹۱** در دانشکده **علوم پایه** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **علی ایمان‌پور** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب فهیمه آقامحمدی زمانی دانشجوی رشته فیزیک مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: فهیمه آقامحمدی زمانی

تاریخ و امضا:

۹۲/ ۳/ ۱۸

دانشگاه تربیت مدرّس
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد فیزیک ذرات بنیادی

اثر کوانتومی هال و نظریه چرن-سایمون

فهیمه آقامحمدی زمانی

استاد راهنما:

دکتر علی ایمان‌پور

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم

به تمام کسانی که دوستشان دارم

و

تمام کسانی که در بین ما حضور ندارند.

تشکر و قدردانی:

از جناب آقای دکتر ایمان پور که راهنمایی این تحقیق را بر عهده داشتند و با راهنمایی های صبورانه خود موجب به ثمر رسیدن این تحقیق گردیدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

اثر کوانتومی هال در سیستم‌های الکترونی دوبعدی در مرز مشترک بین دو نیمه‌رسانا یا بین یک نیمه‌رسانا و یک عایق در حد میدان‌های مغناطیسی شدید عمود بر سطح و در دماهای بسیار پایین رخ می‌دهد. اثر کوانتومی هال نتیجه مستقیم کوانتش ترازهای لاندائو و بی‌نظمی است. در حقیقت کوانتش هال به سبب پتانسیل ناخالصی نمونه آشکار می‌شود. اثر کوانتومی هال ویژگی‌هایی را نشان می‌دهد که به جزئیات سیستم بستگی ندارد.

اثر کوانتومی هال صحیح در دماهای پایین اتفاق می‌افتد و با تشکیل پلاتوها در مقاومت هال که در مقادیر مشخصی از میدان مغناطیسی کوانتیزه می‌شود مشخص می‌شود. اگر برهمکنش میان الکترون‌ها را هم در نظر بگیریم، اثر کوانتومی هال کسری را خواهیم داشت.

اگر بخواهیم اثر کوانتومی هال کسری را با استفاده از نظریه میدان بررسی کنیم می‌توانیم از نظریه میدان چرن-سایمون که یک میدان پیمانه‌ای آماری است، استفاده کنیم. مسئله سیستم‌های الکترونی دوبعدی در میدان مغناطیسی شدید با استفاده از تبدیل چرن-سایمون دقیقاً به یک مسئله بوزونی تبدیل می‌شود که در آن بوزون‌ها با یک میدان پیمانه‌ای جدید به همراه میدان الکترومغناطیسی جفت می‌شوند. نشان می‌دهیم که رسانندگی هال متناسب با ضریب کنش چرن-سایمون است و کوانتیزه می‌شود.

کلید واژه: اثر کوانتومی هال، نظریه میدان پیمانه‌ای چرن-سایمون، تابع موج لافلین، کوانتش رسانندگی، تابع پارش.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست جدول‌ها ..... ج
فهرست شکل‌ها ..... د

فصل ۱- اثر کوانتومی هال ..... د
۱-۱- مقدمه ۲
۱-۲- اثر کلاسیکی هال ۲
۱-۲-۱- مدل درود ۳
۱-۳- روش آزمایش ۶
۱-۴- اثر کوانتومی هال ۸
۱-۴-۱- اندازه‌گیری ثابت ساختار ریز ۱۱
۱-۴-۲- اثر کوانتومی هال صحیح ۱۲
۱-۴-۳- اثر کوانتومی هال کسری ۱۲
۱-۵- به سمت درک نظری (بحث کیفی) ۱۳

فصل ۲- حرکت الکترون در میدان مغناطیسی ۱۵
۲-۱- حرکت الکترون در مکانیک کلاسیک ۱۶
۲-۱-۱ -حرکت در میدان مغناطیسی ۱۶
۲-۱-۲ حرکت در حضور میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی ۱۹
۲-۱-۳- ناوردایی پیمانه‌ای ۲۰
۲-۲- حرکت الکترون در مکانیک کوانتومی ۲۱
۲-۲-۱- هامیلتونی الکترون آزاد در میدان مغناطیسی صفر ۲۱
۲-۲-۲- هامیلتونی برای میدان مغناطیسی غیرصفر ۲۱
۲-۳- حل کوانتومی الکترون آزاد در میدان مغناطیسی ۲۲
۲-۳-۱- ترازهای لاندائو غیرنسبیتی ۲۲
۲-۳-۲- تعیین ویژه حالت‌ها (توابع موج) ۲۸
۲-۳-۳- تخمین تبهگنی ۴۱
۲-۳-۴- الکترون در میدان خارجی ۴۴
۲-۴- کوانتش شار ۵۳
۲-۴-۱ کوانتش شار و اثر هال ۵۳
۲-۵- ناخالصی ۵۴

۲-۶- حرکت دو الکترون برهمکنشی در میدان مغناطیسی ۵۶
۲-۷- حرکت سه الکترون برهمکنشی در میدان مغناطیسی ۵۷
۲-۸- تعداد الکترون‌های زیاد و تابع موج لافلین ۵۸
۲-۹- بار کسری شبه ذرات لافلین ۶۲

فصل ۳- ویژگی‌های جمله چرن-سایمون ۶۵
۳-۱- جمله چرن-سایمون چیست؟ ۶۷
۳-۲- تبهگنی حالت پایه ۶۹
۳-۳- جمله ناوردای پیمانه‌ای جرمی ۶۹
۳-۴- رفتار تحت $\boldsymbol{C}$ و $\boldsymbol{P}$ و $\boldsymbol{T}$ ۷۱
۳-۵- جمله چرن-سایمون با شکست تقارن خودبخود ۷۲
۳-۶- ناوردایی لورنتس از ناوردایی پیمانه‌ای ۷۳
۳-۷- نظریه میدان توپولوژیک ۷۳

فصل ۴- توصیف اثر کوانتومی هال کسری با نظریه چرن-سایمون ۷۵
۴-۱- استخراج کنش چرن- سایمون ۷۷
۴-۱-۱- نگاشت مسئله‌ی فرمیونی به مسئله‌ی بوزونی ۷۷
۴-۲- ارتباط اثر کوانتومی هال با نظریه پیمانه ای چرن-سایمون ۸۴

نتیجه‌گیری ۸۶

پیشنهادات ۸۷

فهرست منابع و مآخذ ۸۸

فهرست جدول‌ها

عنوان صفحه

جدول ۲-۱ مقیاس معمولی در اثر کوانتومی هال در دمای $\boldsymbol{5 \circ K}$ در نمونه $\boldsymbol{GaAs}$ [۲۳] ۲۴

فهرست شکل‌ها

عنوان صفحه

شکل ۱-۱- شیب خط کمیت $\frac{1}{qne}$ را نشان می‌دهد. ۳
شکل ۱-۲ چینش آزمایش ۷
شکل ۱-۳- R_L و R_H به صورت تابعی از v ۷
شکل ۱-۴: افزایش دما سبب از بین رفتن پله‌های کوانتومی هال می‌شود و نمودار رسانندگی در حالت کوانتومی به نمودار رسانندگی در حالت کلاسیکی نزدیک می‌شود. پس شرط لازم برای دیده شدن اثرات کوانتومی پایین بودن دما تا صفر کلوین است. ۱۱
شکل ۲-۱ حرکت سیکلوترونی در مکانیک کلاسیک ۱۸
شکل ۲-۲ مسیر حرکت الکترون در میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی ۱۹
شکل ۲-۳ ترازهای لاندائو به صورت تابعی از میدان مغناطیسی $E_n = \hbar\omega_C\,(n+\frac{1}{2}) \propto B\,(n+\frac{1}{2})$ ۲۵
شکل ۲-۴ سطوح لاندائو. این نمودار تبهگنی ترازها را هم نشان می‌دهد. ۲۵
شکل ۲-۵ چگالی احتمال برای حالت $|n, m = 0>$ برای مقادیر مختلف n الف- چگالی تنها به شعاع $|z| = r$ بستگی دارد و در $r_0 = \sqrt{2jl}$ بیشینه می‌شود. ب- با رسم نمودار روی صفحه، تابع موج برای $n \geq 1$ شکل حلقه دارد. ۳۶
شکل ۲-۶نمایش سطوح لاندائو: الف) مورد پر شدگی صحیح ب) پر شدگی کسری ۳۸
شکل ۲-۷ نمایش پتاسیل برداری پیمانه لاندائو. ۳۹
شکل ۲-۸ الف) مدارهای تک‌ذره در پیمانه لاندائو در مستطیلی به ابعاد L_x و L_y. شرط مرزی تناوبی در جهت y فرض می‌شود. ب) مدارهای تک‌ذره در پیمانه متقارن [۸]. ۴۱
شکل ۲-۹ سطوح لاندائو الف) در غیاب میدان الکتریکی ب) در حضور میدان الکتریکی ۴۶
شکل ۲-۱۰ پتانسیل $V(x)$ ۴۷
شکل ۲-۱۱- پتانسیل در لبه‌های نمونه انرژی حالت‌های نزدیک لبه را افزایش می‌دهد و این انرژی‌ها سطح فرمی را قطع می‌کند. ۴۹
شکل ۲-۱۲ مدارهای پرشی ۵۰
شکل ۲-۱۳ نقاط چپ و راست پتانسیل الکتروشیمیایی را نشان می‌دهد. ۵۱
شکل ۲-۱۴ نمایش حالت‌های جایگزیده و حالت‌های گسترده ۵۵
شکل ۲-۱۵- ساختار شبه ذرات لافلین که به طور بی‌دررو شار از نقطه‌ای در نمونه عبور می‌کند. القای فاراده میدان الکتریکی سمتی $E(t)$ را ایجاد می‌کند که در چرخش جریان شعاعی $J(t)$ را تولید می‌کند. ۶۳

فصل ۱- اثر کوانتومی هال

۱-۱- مقدمه

از دیدگاه نظری، بررسی سیستم‌های کوانتومی هال نیاز به مفاهیم جدید برخی از نظریه‌های میدان‌های کوانتومی دارد مانند: کسری شدن بار، هندسه ناجابجایی و نظریه میدان‌های توپولوژیکی [۱]. قبل از بررسی اثر کوانتومی هال بهتر است که بدانیم اصلاً اثر کلاسیکی هال چیست و چگونه ایجاد می‌شود.

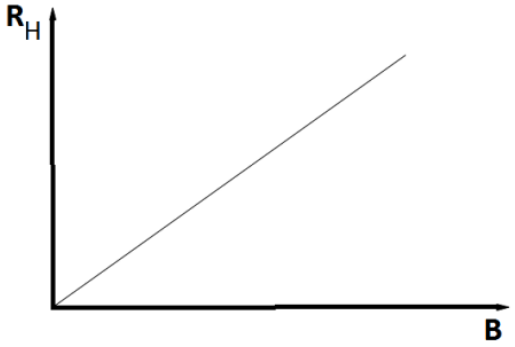
۱-۲- اثر کلاسیکی هال

اثر کلاسیکی هال منشأ ساده و روشنی دارد. زمانی که رسانای الکتریکی حامل جریان در معرض میدان مغناطیسی شدید عمود بر صفحه رسانا قرار می‌گیرد، ذرات باردار درون صفحه رسانا نیروی لورنتس را حس می‌کنند. ذرات حامل جریان به سمتی از نمونه می‌روند تا زمانی که اختلاف پتانسیلی که این جابجایی را ایجاد می‌کند با نیروی لورنتس موازنه شود. وجود ولتاژ عمود به جریان، اثر کلاسیکی هال نامیده می‌شود [۲].

کشف اثر هال به سال ۱۸۷۹ بر می‌گردد که ادوین هال[1] نشان داد مقاومت عرضی $\boldsymbol{R_H}$ در صفحه نازک فلزی به طور خطی با شدت میدان مغناطیسی عمود بر صفحه افزایش می‌یابد:

$$\boldsymbol{R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{qn_e}} \qquad ۱-۱$$

[1] Edwin Hall



شکل ۱-۱- شیب خط کمیت $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{qn_e}}$ را نشان می‌دهد.

$\boldsymbol{q}$ بار و $\boldsymbol{n_e}$ چگالی حامل‌های بار دو بعدی در نمونه است. این اثر به واسطه نیروی لورنتس که مسیر ذرات باردار را منحرف می‌کند آشکار شد و سبب ایجاد یک اختلاف چگالی بین دو سمت مخالف نمونه می‌شود.

امروزه از مقاومت کلاسیکی هال برای تعیین بار حامل‌ها و چگالی مواد رسانا استفاده می‌شود. حتی از این اثر برای اندازه‌گیری میدان مغناطیسی هم استفاده می‌شود. اثر کلاسیکی هال با مدل درود[1] هم می‌تواند درک شود. اکنون به توصیف این مدل می‌پردازیم.

۱-۲-۱- مدل درود

در میدان‌های مغناطیسی ضعیف، خواص مگنتوجابجایی گاز الکترونی دو بعدی توسط مدل درود توصیف می‌شود. بر اساس این مدل، مقاومت $\boldsymbol{R}$ دستگاه باید متناسب با $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_e}}$ باشد در حالی که $\boldsymbol{R_H}$ با $\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{n_e}}$ متناسب است. کاربرد نظریه درود برای میدان‌های مغناطیسی زیر $\boldsymbol{0/1\ T}$ است. نتایج این مدل در خارج از محدوده کوانتومی هال صحیح نیز معتبر است.

رسانندگی الکتریکی فلز در مدل درود الکترون در زمان میانگین $\boldsymbol{\tau}$ (زمان بین رویدادهای پراکندگی یا زمان پویش آزاد) قبل از اینکه با ناخالصی‌ها، نقایص شبکه و فونون‌ها به حالتی که سرعت میانگین صفر

[1] Drude model

دارد، پراکنده شود توسط میدان الکتریکی شتاب داده می‌شود. میانگین سرعت سوق الکترون به شکل زیر است:

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{F}_e \tau}{m^*} = -\frac{eE\tau}{m^*} \qquad ۲\text{-}۱$$

که $\vec{F}_e$ نیروی الکتریکی، E میدان الکتریکی و m^* جرم مؤثر الکترون است و بار الکترون را $e < 0$ در نظر می‌گیریم. بنابراین چگالی جریان به شکل زیر است:

$$\vec{j} = -n_e e \vec{v}_D = \sigma_0 \vec{E} \qquad ۳\text{-}۱$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m^*} \qquad ۴\text{-}۱$$

که σ_0 رسانندگی الکتریکی فلز و n چگالی الکترون است. در صورت وجود میدان مغناطیسی پایا رسانندگی و مقاومت ویژه به شکل تانسور در می‌آیند:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \qquad ۵\text{-}۱$$

بنابراین چگالی جریان و میدان الکتریکی به صورت زیر هستند:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad ۶\text{-}۱$$

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \qquad ۷\text{-}۱$$

بر اساس این مدل، الکترون‌های گاز الکترونی دوبعدی در اثر نیروهای خارجی بین رویدادهای پراکندگی با فرض این‌که هنوز τ زمان بین رویدادهای پراکندگی است، شتاب داده می‌شوند تا به سرعت رانش (سوق) برسند:

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{F}_B \tau}{m^*} \qquad ۸\text{-}۱$$

که در معادله ۱-۸، $\vec{F}_B$ نیروی لورنتس است. نیروی لورنتس از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F}_B = -e\left[\vec{E} + \frac{\vec{v}_D \times \vec{B}}{c}\right] \qquad ۹\text{-}۱$$

حال معادله ۱-۹ را در معادله ۱-۸ قرار می‌دهیم:

$$\vec{v}_D = -\frac{e\tau}{m^*}\left[\vec{E} + \frac{\vec{v}_D \times \vec{B}}{c}\right] \qquad ۱۰\text{-}۱$$

فرض بر این است که تمام الکترون‌ها با هم رانده می‌شوند. بنابراین چگالی جریان در شرایط پایا همچنان با معادله ۱-۳ توصیف می‌شود. همواره فرض می‌کنیم که میدان مغناطیسی عمود بر سطح نمونه و در راستای محور z است. معادله ۱-۳ را در معادله ۱-۱۰ قرار می‌دهیم:

$$\vec{E} = \frac{m^*}{n_e e^2 \tau}\vec{J} - \frac{B}{n_e e c}\hat{z} \times \vec{J} \qquad ۱۱\text{-}۱$$

و از طرفی با توجه به معادله‌ی ۱-۷ داریم:

$$\begin{aligned} \rho_{xx} = \rho_{yy} &= \frac{m^*}{n_e e^2 \tau} \\ \rho_{xy} = -\rho_{yx} &= \frac{B}{n_e e c} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} R \sim \rho_{xx} &\sim \frac{1}{n_e} \\ R_H \sim \rho_{xy} &\sim \frac{B}{n_e} \end{aligned} \qquad ۱۲\text{-}۱$$

پس ρ_{xy} تابعی خطی از میدان مغناطیسی است که شیب آن چگالی را می‌دهد. در این مدل ρ_{xx} مستقل از میدان مغناطیسی است در حالیکه ρ_{xy} متناسب با میدان مغناطیسی است.

می‌توانیم به صورت دقیق‌تری شکل تانسوری ρ و σ را به دست آوریم که برای این کار، معادلات حرکت را با استفاده از معادله ۱-۱۱ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{m^*}{n_e e^2 \tau} J_x + \frac{B}{n_e e c} J_y \\ E_y &= -\frac{B}{n_e e c} J_x + \frac{m^*}{n_e e^2 \tau} J_y \end{aligned} \qquad ۱۳\text{-}۱$$

در معادله‌های ۱-۱۳ قرار می‌دهیم:

$$\omega_C = \frac{eB}{m^* c} \qquad ۱۴\text{-}۱$$

که ω_C بسامد سیکلوترونی نامیده می‌شود. با استفاده از تعریف رسانندگی σ_0 (معادله ۱-۴)، معادلات ۱-۱۳ در صفحه xy به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \sigma_0 E_x &= J_x + (\omega_C \tau) J_y \\ \sigma_0 E_y &= -(\omega_C \tau) J_x + J_y \end{aligned} \qquad ۱۵\text{-}۱$$

با استفاده از معادله‌ی ۱-۷ می‌توانیم ρ را به شکل ماتریسی بنویسیم:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma_0}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\omega_C \tau} \\ -\boldsymbol{\omega_C \tau} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad ۱۶\text{-}۱$$

$$\boldsymbol{\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{\sigma_0}} \quad , \quad \boldsymbol{\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{\omega_C \tau}{\sigma_0}}$$

از معادله ۱-۱۶ می‌توانیم مقاومت ویژه هال را بنویسیم:

$$\boldsymbol{\rho_H = \frac{\omega_C \tau}{\sigma_0} = \frac{eB}{m^*} \tau \times \frac{m^*}{ne^2 \tau} = \frac{B}{nec}} \qquad ۱۷\text{-}۱$$

همان چیزی که مدل پیش‌بینی کرده است، به دست آمد. همچنین تانسور رسانندگی از ماتریس وارون مقاومت ویژه به دست می‌آید [۱]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho^{-1}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma_L} & \boldsymbol{-\sigma_H} \\ \boldsymbol{\sigma_H} & \boldsymbol{\sigma_L} \end{pmatrix} \qquad ۱۸\text{-}۱$$

$$\boldsymbol{\sigma_L = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_C \tau)^2}} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma_H = \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{\sigma_0 \omega_C \tau}{1 + (\omega_C \tau)^2}}$$

معادله‌های ۱-۱۶ و ۱-۱۸ به رابطه بین رسانندگی و مقاومت ویژه منجر می‌شوند:

$$\boldsymbol{\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{{\rho_{xx}}^2 + {\rho_{xy}}^2}} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma_{xy} = -\frac{\rho_{xy}}{{\rho_{xx}}^2 + {\rho_{xy}}^2}} \qquad ۱۹\text{-}۱$$

در حد فلز خالص با $\boldsymbol{\tau}$ بی‌نهایت، $\boldsymbol{\omega_C \tau \to \infty}$ پس داریم:

$$\boldsymbol{\lim_{\omega_C \tau \to \infty} \sigma_{xx} = 0} \quad , \boldsymbol{\lim_{\omega_C \tau \to \infty} \sigma_{xy} = \frac{nec}{B}} \qquad ۲۰\text{-}۱$$

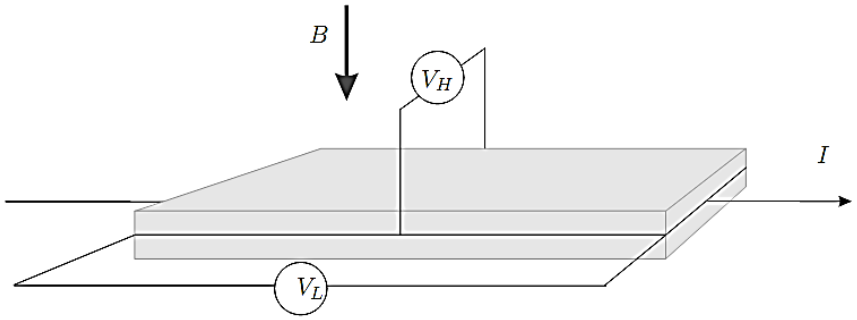
$$\boldsymbol{\rho = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B}{nec} \\ -\frac{B}{nec} & 0 \end{pmatrix}} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{nec}{B} \\ \frac{nec}{B} & 0 \end{pmatrix}} \qquad ۲۱\text{-}۱$$

رسانندگی قطری و مقاومت ویژه قطری صفر است [۴]. این شکلی است که در اثر کوانتومی هال می‌بینیم: جریان عمود به میدان الکتریکی اعمال شده است [۲].

۱-۳- روش آزمایش

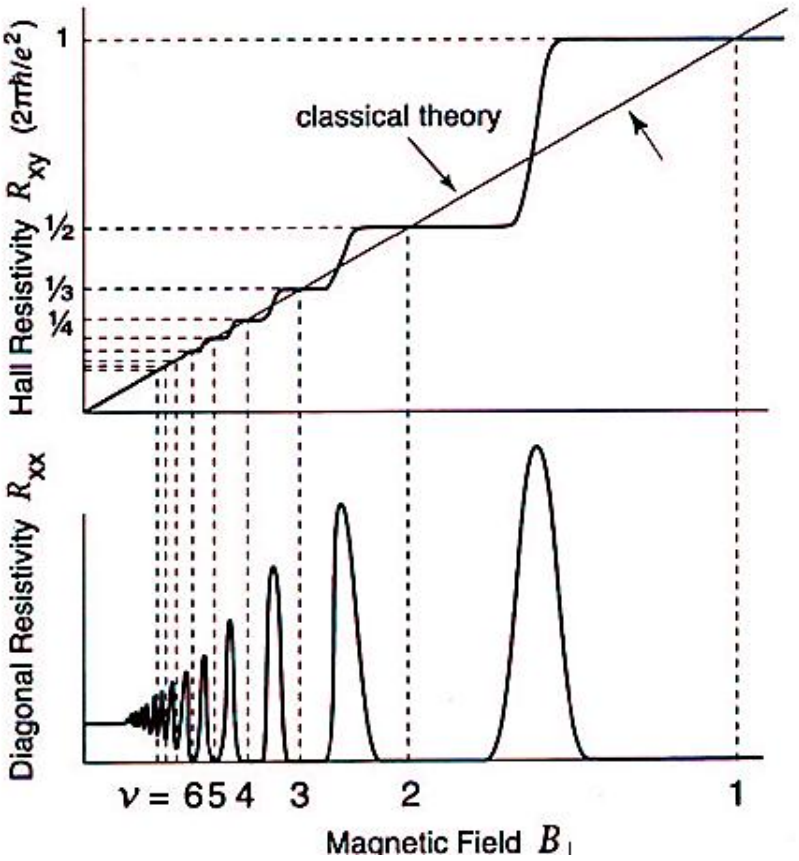
چینش آزمایش برای اثر کوانتومی هال، میله‌ای است که از جنس نیمه‌رسانا است. این میله شامل دو لایه از مواد متفاوت است که الکترون‌ها به مرز مشترک دو لایه جذب می‌شوند. دمای میله در حدود $\boldsymbol{110°mK}$ است. اگر نمونه به حد کافی سرد شود، درجه آزادی عمود به مرز مشترک بی‌اثر می‌شود و دستگاه دوبعدی می‌شود. دومین عنصر مهم میدان مغناطیسی شدید عمود به صفحه حرکت الکترون‌ها

است. میدان مغناطیسی شدید حالت اسپینی پلاریزه را در دستگاه ایجاد می‌کند (اسپین الکترون با میدان مغناطیسی خارجی هم‌جهت می‌شود).



شکل ۱-۲ چینش آزمایش

حال جریانی را در نمونه برقرار می‌کنیم. کمیت‌های ولتاژ اعمالی $\boldsymbol{V_L}$ ($\boldsymbol{L}$ برای طولی)، ولتاژ در جهت عمود $\boldsymbol{V_H}$ ($\boldsymbol{H}$ برای هال) و جریانی گذرنده از نمونه را می‌توانیم اندازه‌گیری کنیم. با این کمیت‌ها، مقاومت طولی $\boldsymbol{R_L}$ و مقاومت هال $\boldsymbol{R_H}$ محاسبه می‌شوند.



شکل ۱-۳- $\boldsymbol{R_L}$ و $\boldsymbol{R_H}$ به صورت تابعی از $\boldsymbol{\nu}$

اگر یکی از $\frac{n_e}{B}$ تغییر کند، مقاومت را مطابق شکل (۱-۳) به دست می‌آوریم. بر حسب تابعی از کسر $\frac{n_e h}{eB}$ یا $\frac{n_e}{B}$ پله‌هایی را در R_H می‌بینیم و برخلاف نمودار مقاومت هال کلاسیکی، خط راستی نیست [۲]. میانه پله‌ها در مقادیر صحیح ν قرار می‌گیرد.

۱-۴- اثر کوانتومی هال

اثر کوانتومی هال اولین بار در سال ۱۹۸۰ توسط فون کلیتزینگ[1] و همکارانش ج. دوردا[2]، و م. پپر[3] کشف شد. آنها ضمن مطالعه روی نمونه ماسفت[4]، به منظور مطالعه رفتار سطح بلورهای نیمه‌رسانا در شرایط عادی، مشاهده کردند مقاومت هال در دمای پایین و میدان مغناطیسی شدید، به صورت پله‌ای رفتار می‌کند [۱]. اثر کوانتومی هال دو پدیده بسیار متفاوت را پوشش می‌دهد: اثر کوانتومی هال صحیح و اثر کوانتومی هال کسری.

اثر کوانتومی هال حدی است که در آن در اثر میدان مغناطیسی قوی، آمیختگی ترازهای لاندائو با اختلال (بی نظمی) یا با برهمکنش الکترون- الکترون ضعیف در نظر گرفته می‌شود. پس حدی که پتانسیل اختلال، بسیار قوی‌تر از پتانسیل برهمکنش الکترون-الکترون است به رژیم کوانتومی هال صحیح مربوط می‌شود(سیستم بدون برهمکنش و بدون ناخالصی) و حدی که پتانسیل برهمکنش الکترون-الکترون بسیار قوی‌تر از پتانسیل اختلال است، به رژیم کوانتومی هال کسری مربوط می‌شود. یعنی خواص فیزیکی به نسبت پتانسیل اختلال به پتانسیل برهمکنش بستگی دارد.

دستگاه کوانتومی هال شامل دسته‌ای از الکترون‌های متحرک در صفحه در حضور میدان مغناطیسی B عمود بر صفحه است. در این سیستم میدان مغناطیسی به اندازه‌ای شدید است که اسپین الکترون‌ها کاملاً پلاریزه می‌شود، یعنی الکترون‌ها مانند فرمیون‌های بدون اسپین رفتار می‌کنند (به سبب هم‌جهت شدن اسپین با میدان مغناطیسی، تمام اسپین الکترون‌ها در یک راستا قرار می‌گیرند). اگر دمای نمونه به

[1] Von Klitzing
[2] Dorda
[3] Pepper
[4] Metal-Oxide-Silicon-Field-Effect-Transistors (MOSFET)