دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه دکتری

ریاضی محض

نتایجی در بهترین زوج تقریبی

استاد راهنما: دکتر حمید مظاهری تهرانی

استادان مشاور: دکتر سید محمد مشتاقیون و دکتر علی دلاور خلفی

پژوهش و نگارش: محمد رضا حدادی

بهمن ماه ۱۳۸۹

تقدیم به محضر حضرت ولی عصر (عج)

قدردانی و تشکر

با حمد و سپاس به درگاه ایزد یکتا که کسب علم و معرفت را راه رسیدن به کمال واقعی قرار داد و به لطف و کرم خویش قبول کرد تا این حقیر به گوشه‌ای از اقیانوس بی پایان مجهولاتم پی ببرم. بر خود لازم می‌دانم که از لطف همیشگی خانواده عزیزم که بدون حمایت‌ها و تشویق‌های آنها رسیدن به این مرحله از زندگی برایم ناممکن بود کمال تشکر را داشته باشم.

همچنین وظیفه خود می‌دانم از زحمات فراوان و دلسوزانه استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر حمید مظاهری تهرانی کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از دیگر اساتید بزرگوارم جناب آقایان دکتر مشتاقون، دکتر دلاور و دکتر مدرس به جهت همه کمک‌های بی‌دریغی که در طی این مسیر نسبت به بنده روا داشته اند سپاس‌گذاری می‌نمایم. همچنین از زحمات خانم‌ها عابدینی و عباسی‌زاده تشکر و قدردانی می‌کنم. در پایان از دوستان عزیز و همکلاسی‌های گرانقدرم دکتر مهدی دهقانیان، خانم دکتر سلیمی، هادی جاویدزاده، محمد لباف قاسمی، جواد حمزه نژاد، منصور زارعی و شاهرخ عیسی زاده که گذران زندگی تحصیلی‌ام را با خاطرات خوش از ایشان به یادگار دارم، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به بررسی مفهوم بهترین زوج تقریبی به عنوان تعمیمی از مفهوم بهترین تقریب پرداخته و همچنین به عنوان حالت خاصی از مفهوم بهترین زوج تقریبی، نقطه تقریبی را معرفی می‌کنیم و نتایج به‌دست آمده در فضاهای متریک و فضاهای متریک مخروطی را ارائه می‌نماییم. در ادامه تعمیم دیگری از مفهوم بهترین تقریب یعنی بهترین f-تقریب را معرفی و نتایج بدست آمده را نیز ارائه می‌نماییم. در پایان نیز به ارائه مفهوم مرکز مجانبی و رابطه آن با مسئله نقطه ثابت می‌پردازیم.

مقدمه

مسئله بهترین تقریب یکی از مسائل مهم در آنالیز تابعی است که اهمیت بسیاری در مباحث کاربردی به‌ویژه کنترل بهینه دارد که در این پایان‌نامه به ارائه و بررسی تعمیم‌های گوناگونی از این مفهوم می‌پردازیم.

این پایان‌نامه مشتمل بر پنج فصل به قرار زیر می‌باشد.

فصل اول به بیان تعاریف، قضایا و مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز سایر فصول اختصاص یافته است. در فصل دوم به بررسی مفهوم بهترین زوج تقریبی به عنوان تعمیمی از مفهوم بهترین تقریب پرداخته و همچنین به عنوان حالت خاصی از مفهوم بهترین زوج تقریبی، نقطه تقریبی را معرفی می‌کنیم و نتایج به‌دست آمده در فضاهای متریک و مشبکه‌های باناخ را ارائه می‌نماییم. در فصل سوم به ارائه نتایجی در مورد مفهوم بهترین زوج تقریبی و نقطه تقریبی در فضاهای متریک و فضاهای متریک مخروطی می‌پردازیم. بررسی تعمیم دیگری از مفهوم بهترین تقریب یعنی بهترین f- تقریب در فضاهای برداری نیز در فصل چهارم مورد توجه قرار گرفته است. در فصل پایانی نیز ابتدا به معرفی نگاشت مرکز مجانبی پرداخته و سپس رابطه‌ی بین مرکز مجانبی و نقطه ثابت نگاشت ها را در فضای باناخ بررسی می‌کنیم و نتایج جدید بدست آمده را ارائه می‌نماییم.

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

در این فصل تعاریف و پیش نیازهای لازم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد، گنجانده شده است. در سراسر متن فرض بر آن است که خواننده با مفاهیم آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی آشناست. برای فضای برداری X گوی یکه و کره یکه را به ترتیب با B_X و S_X، دوگان X را با X^* و دوگان دوم آن را با X^{**} نمایش می‌دهیم. فصل حاضر مشتمل بر پنج بخش است که در آن ابتدا به معرفی فضاهای نرمدار خاص مثل فضاهای به‌طور یکنواخت محدب می‌پردازیم. در ادامه به‌ترتیب مفاهیم بهترین تقریب، بهترین زوج تقریبی، مشبکه‌های باناخ و همچنین مفهوم فضای متریک مخروطی را معرفی می‌کنیم. در پایان نیز مفهوم مرکز مجانبی و شعاع مجانبی را ارائه می‌نماییم.

۱.۱ بهترین تقریب

در این بخش ابتدا به تعریف بهترین تقریب و مجموعه تقریبی می‌پردازیم و در ادامه بعضی از نتایج مورد نیاز در فصل‌های بعدی را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. [۳۶] فرض کنیم X یک فضای متریک، K زیر مجموعه بسته‌ای از X و $x \in X$ باشد. نقطه $k_\circ \in K$ را بهترین تقریب برای $x \in X$ در K گوییم هرگاه

$$d(x,k_\circ) = d(x,K) := \inf_{k\in K} d(x,k).$$

مجموعه همه بهترین تقریب‌های x در K را با $P_K(x)$ نمایش می دهیم.

فرض کنیم X یک فضای متریک و K زیر مجموعه بسته از X باشد. K را در X تقریبی گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ حداقل یک بهترین تقریب $k_\circ \in K$ موجود باشد. اگر برای هر $x \in X$ یک بهترین تقریب یکتا در K موجود باشد گوییم K در X یکتایی است.

لم ۲.۱.۱. [۳۶] فرض کنیم X یک فضای نرمدار، W زیر فضای بسته در X، $w_\circ \in W$ و $x \in X \setminus W$ باشد. آنگاه $w_\circ \in P_W(x)$ اگر و تنها اگر $\phi \in X^*$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\phi(x-w_\circ) = \|x-w_\circ\|,\ \|\phi\| = ۱,\ \phi|_W = \circ.$$

لم ۳.۱.۱. [۱۸] فرض کنیم X یک فضای نرمدار، W زیرمجموعه بسته و محدب از X، $w_\circ \in W$ و $x \in X \setminus W$ باشد. آنگاه $w_\circ \in P_W(x)$ اگر و تنها اگر $\phi \in X^*$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\phi(x - w_\circ) = \|x - w_\circ\|, \ \|\phi\| = ۱, \ Re\ \phi(w_\circ) = \max \ Re\ \phi(W).$$

۲.۱ زوج تقریبی

در این بخش ابتدا به تعریف زوج تقریبی و نقطه تقریبی می‌پردازیم و در ادامه بعضی از نتایج مورد نیاز در فصل‌های بعد را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱. [۳۶] فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از فضای متریک X باشند. زوج $(x,y) \in A \times B$ را که در آن $d(x,y) = dist(A,B)$ بهترین زوج تقریبی برای A و B نامیم و قرار می‌دهیم

$$Prox(A,B) = \{(x,y) \in A \times B : d(x,y) = dist(A,B)\}.$$

تعریف ۲.۲.۱. [۱۸] فرض کنیم، A و B دو زیر مجموعه از X و T نگاشتی از $A \cup B$ به $A \cup B$ باشد به‌طوری‌که $T(A) \subseteq B$ و $T(B) \subseteq A$. عنصر $x \in A \cup B$ را بهترین نقطه تقریبی نسبت به A و B برای T گوییم اگر $d(x,Tx) = dist(A,B)$ و قرار می‌دهیم

$$P_T(A,B) := \{x \in A \cup B : d(x,Tx) = dist(A,B)\}.$$

بدیهی است که اگر $x \in A \cup B$ بهترین نقطه تقریبی باشد و $x \in A \bigcap B$ باشد، آنگاه x یک نقطه ثابت برای نگاشت T است. از این رو هنگامی که معادله $Tx = x$ جواب نداشته باشد، یعنی نگاشت T نقطه ثابت نداشته باشد، بهترین نقطه تقریبی یک جواب تقریبی از این مسئله خواهد بود.

تعریف ۳.۲.۱. [۱] فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه ناتهی از فضای متریک X باشند و $۰ < k < ۱$. نگاشت $T : A \cup B \to A \cup B$ را انقباضی دوری گوییم اگر

۱) برای هر $x, y \in X$، $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + (1 - k)dist(A, B)$.

۲) $T(A) \subseteq B$ و $T(B) \subseteq A$.

مثال ۴.۲.۱. [۱] فرض کنیم $A,\ B$ زیر مجموعه های از l^1 تعریف شده به صورت زیر باشند

$$A = \{(1 + k^{2n})e_{2n} \quad : \quad n \in N\},$$

$$B = \{(1 + k^{2n+1})e_{2n+1} \quad : \quad n \in N\}.$$

همچنین فرض می‌کنیم

$$T((1 + k^{2n})e_{2n}) = (1 + k^{2n+2})e_{2n+1},$$

$$T((1 + k^{2n-1})e_{2n-1}) = (1 + k^{2n})e_{2n}.$$

آنگاه T یک نگاشت انقباض دوری روی $A \cup B$ است.

در ادامه بعضی از نتایج به‌دست آمده مورد نیاز در مورد زوج تقریبی و نقطه تقریبی را ارائه می‌نماییم. یادآوری می‌شود که زیر مجموعه K از X را به‌طور کراندار فشرده گوییم اگر هر دنباله کراندار در K یک زیردنباله همگرا در K داشته باشد.

لم ۵.۲.۱. [۱] فرض کنیم X یک فضای متریک، A و B دو زیر مجموعه به‌طور کراندار فشرده از X باشند. آنگاه $Prox(A, B) \neq \emptyset$.

لم ۶.۲.۱. [۱] فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه از فضای متریک X، $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت انقباضی دوری و $x_0 \in A \cup B$ باشند. آنگاه برای دنباله $x_n = T^n x_0$

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, Tx_n) = dist(A, B).$$

لم ۷.۲.۱. [۱] فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه از فضای متریک X و $T : A \cup B \to A \cup B$ یک نگاشت انقباضی دوری باشند. اگر A یا B به‌طورکراندار فشرده باشد آنگاه نگاشت T یک نقطه تقریبی دارد یعنی $x \in A \cup B$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$d(x, Tx) = dist(A, B).$$

لم ۸.۲.۱. [۱] فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه از فضای متریک X، $T: A\cup B \to A\cup B$ یک نگاشت انقباضی دوری و $x_0 \in A\cup B$ باشند. تعریف می‌کنیم $x_n = T^n x_0$. آنگاه دنباله‌های $\{x_{2n}\}$ و $\{x_{2n+1}\}$ کراندار هستند.

یادآوری می‌شود که فضای نرمدار X را به‌طور یکنواخت محدب گوییم اگر برای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in S_X$ که $\|\frac{x+y}{2}\| > 1-\delta$، آنگاه

$$\|x-y\| < \epsilon.$$

لم ۹.۲.۱. [۱] فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه بسته و محدب از فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب X و $T: A\cup B \to A\cup B$ یک نگاشت انقباضی دوری باشد. آنگاه نگاشت T یک نقطه تقریبی یکتا دارد.

تعریف ۱۰.۲.۱. [۳۶] فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از فضای متریک X باشند و

$$A_0 = \{x \in A: \ d(x,y) = dist(A,B), \exists y \in B \ \}.$$

اگر B_0 نیز مشابه A_0 تعریف می‌شود.

لم ۱۱.۲.۱. [۲۵] فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌های بسته و محدب از فضای انعکاسی X باشند به‌طوری که A کراندار. آنگاه A_0 و B_0 ناتهی هستند.

لم ۱۲.۲.۱. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از فضای نرمدار X باشند. آنگاه

الف) $Prox(\alpha A, \alpha B) = |\alpha| Prox(A,B)$

ب) $Prox(A+z, B) = Prox(A, B-z)$

ج) اگر A یا B کراندار باشد آنگاه $Prox(A,B)$ کراندار است.

چ) اگر A و B بسته باشند آنگاه $Prox(A,B)$ بسته است.

ح) اگر A و B محدب باشند آنگاه $Prox(A,B)$ محدب است.

خ) اگر A_0 فشرده و B بسته باشد آنگاه B_0 بسته است.

برهان. اثبات قسمت‌های الف تا ح به سادگی و با محاسبات مستقیم انجام می‌شود.
خ) فرض کنیم $\{b_k\}$ دنباله‌ای در B_0 باشد به‌طوری‌که $b_k \to b$. چون $B_0 \subseteq B$ و B بسته است داریم $b \in B$. چون برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $b_n \in B_0$ لذا $a_n \in A_0$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(a_n, b_n) = dist(A,B)$. بنابراین $\{a_n\}$ دنباله‌ای در A_0 و چون A_0

فشرده است آنگاه عضو $a \in A_۰$ و زیر دنباله $\{a_{n_k}\}$ وجود دارند که $a_{n_k} \to a$. بنابراین $dist(A,B) = \lim_{k\to\infty} d(a_{n_k}, b_{n_k}) = dist(A,B)$ و لذا $b \in B_۰$. $\square$

تذکر ۳۱.۲.۱. در قسمت (ج) گزاره قبل فرض کرانداری یکی از مجموعه‌های A یا B الزامی است. برای مثال فرض کنیم $X = \mathbb{R}^۲$ مجهز به نرم اقلیدسی باشد و

$$A = \{(x, ۰) : x \in \mathbb{R}\}, B = \{(x, ۱) : x \in \mathbb{R}\}.$$

آنگاه $Prox(A,B) = \{((x,۰),(x,۱)) : x \in \mathbb{R}\}$ که زیر مجموعه‌ای بیکران از $A \times B$ است. همچنین در قسمت (خ) گزاره قبل فرض فشردگی مجموعه $A_۰$ الزامی است. برای مثال فرض کنیم

$$A = \{(x, -۱) : ۰ < x < ۱\}, B = \{(x, ۱) : x \in \mathbb{R}\}.$$

آنگاه داریم $Prox(A,B) = \{((x,-۱),(x,۱)) : ۰ < x < ۱\}$ که زیر مجموعه‌ای بسته از $A \times B$ نیست.

۳.۱ مشبکه‌های باناخ

در این بخش به یادآوری مفهوم مشبکه‌های باناخ و خواصی از آن که در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌پردازیم. لازم به ذکر است که تعریف این بخش از مرجع [۲۹] آورده شده است.

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه به طور جزئی مرتب $(X, \leq)$ را مشبکه گوییم اگر برای هر $x, y \in X$، $\sup\{x,y\}$ و $\inf\{x,y\}$ در X موجود باشند.
در این حالت می‌نویسیم

$$x \wedge y = \inf\{x,y\},\ x \vee y = \sup\{x,y\}.$$

مشبکه $(X, \leq)$ را مشبکه برداری گوییم هرگاه X یک فضای برداری نیز باشد. در این حالت برای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم

$$|x| = x \vee (-x).$$

همچنین در مشبکه برداری $(X, \leq)$ دو عنصر $x, y \in X$ را مجزا گوییم هرگاه $|x| \wedge |y| = ۰$.

تعریف ۲.۳.۱. نرم $\|.\|$ روی مشبکه برداری $(X,\leq)$ را نرم مشبکه‌ای گوییم هر گاه برای هر $x,y\in X$ که داشته باشیم $|x|\leq|y|$ آنگاه $\|x\|\leq\|y\|$.

تعریف ۳.۳.۱. مشبکه برداری مجهز به نرم مشبکه‌ای را مشبکه برداری نرمدار گوییم. مشبکه برداری نرمدار تام را مشبکه باناخ گوییم.

در ادامه به معرفی یکی از معروفترین مشبکه‌های باناخ می‌پردازیم.

مثال ۴.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک فشرده و $C(X)$ فضای باناخ تمام توابع پیوسته حقیقی مقدار روی X همراه با سوپریمم نرم $\|.\|_\infty$ باشد. برای هر $f,g\in C(X)$ تعریف می‌کنیم

$$f\leq g \Leftrightarrow f(x)\leq g(x)\quad \forall x\in X.$$

در این صورت برای هر $f,g\in C(X)$

$$(f\vee g)(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad x\in X$$

$$(f\wedge g)(x)=\min\{f(x),g(x)\},\quad x\in X.$$

چون f و g پیوسته هستند، $f\wedge g$ و $f\vee g$ پیوسته هستند. بنابراین $(C(X),\leq)$ یک مشبکه برداری است. در حقیقت $(C(X),\leq,\|.\|_\infty)$ یک مشبکه باناخ است.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم $(X,\leq)$ یک مشبکه برداری باشد. عنصر $\mathbf{1}\in X$ را یکه قوی گوییم، اگر برای هر $x\in X$، $0<\lambda\in\mathbb{R}$ موجود باشد به‌طوری‌که $x\leq\lambda\mathbf{1}$. حال نرم روی مشبکه برداری را برای هر $x\in X$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|x\|=\inf\{\lambda>0:\ |x|\leq\lambda\mathbf{1}\}.\qquad (*)$$

در این حالت بدیهی است که برای هر $x\in X$، $|x|\leq\|x\|\mathbf{1}$.

لم ۶.۳.۱. [۲۹] فرض کنیم $(X,\leq)$ یک مشبکه برداری، $\mathbf{1}\in X$ یکه قوی باشد و برای هر $x\in X$

$$\|x\|=\inf\{\lambda>0:\ |x|\leq\lambda\mathbf{1}\}.$$

آنگاه $(X,\leq,\|.\|)$ یک مشبکه برداری نرمدار است.

تعریف ۱.۳.۷. فرض کنیم $(X, \leq)$ یک مشبکه برداری نرمدار با نرم تعریف شده $(*)$، $b \in X$ و $r > 0$ باشد. آنگاه تعریف می‌کنیم

$$U(b, r) = \{y \in X : \|b - y\| \leq r\}.$$

لم ۱.۳.۸. [۲۹] فرض کنیم $(X, \leq)$ یک مشبکه برداری نرمدار با نرم تعریف شده $(*)$ ، $b \in X$ و $r > 0$ باشد. آنگاه

$$U(b, r) = \{y \in X : b - r\mathbf{1} \leq y \leq b + r\mathbf{1}\}.$$

۴.۱ فضاهای متریک مخروطی

در این بخش به معرفی فضای متریک مخروطی می‌پردازیم و فرض می‌کنیم E یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۱.۴.۱. [۳۵] فرض می‌کنیم E یک فضای باناخ باشد. زیرمجموعه ناتهی P از E را یک مخروط گوییم هرگاه

الف) P بسته باشد و $P \neq \{0\}$.

ب) برای هر دو اسکالر نامنفی a و b و هر $x, y \in P$، داشته باشیم $ax + by \in P$.

ج) $P \cap (-P) = \{0\}$.

رابطه‌های $\leqslant$ و $\ll$ به ترتیب روی E به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in P, \quad x, y \in E,$$

$$x \ll y \Leftrightarrow y - x \in int\ P, \quad x, y \in E.$$

مخروط P را نرمال گوییم اگر ثابت $K > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in E$، اگر $0 \leqslant x \leqslant y$ آنگاه

$$\|x\| \leq K\|y\|.$$

کوچکترین ثابت موجود و صادق در رابطه فوق را ثابت نرمال گوییم. همچنین مخروط P را منظم گوییم هرگاه هر دنباله صعودی از بالا کراندار، در آن همگرا باشد.

تعریف ۲.۴.۱. [۳۵] فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و E یک فضای باناخ باشد که نسبت به مخروط P مرتب شده باشد. نگاشت $d : X \times X \to E$ را یک متر مخروطی گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in X$،

الف) $0 \leqslant d(x, y)$ و $0 = d(x, y)$ اگر و فقط اگر $x = y$.

ب) $d(x, y) = d(y, x)$.

ج) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

مجموعه X همراه با یک متر مخروطی را یک فضای متریک مخروطی گوییم.

در ادامه مثالی از یک فضای متریک مخروطی نرمال را ارائه می‌دهیم.

مثال ۳.۴.۱. [۳۵] فرض کنیم $E = \ell^1$، $P = \{\{x_n\}_{n\geq 1} \in \ell^1 : x_n \geq 0, \forall n \geq 1\}$ و (X, ρ) یک فضای متریک دلخواه باشد. برای هر $x, y \in X$ تعریف می‌کنیم $d(x, y) = \{\frac{\rho(x,y)}{2^n}\}_{n\geq 1}$. آنگاه به سادگی دیده می‌شود که (X, d) یک فضای متریک مخروطی است.

در مثال فوق دیده می‌شود که فاصله دو عضو فضای X لزوماً یک عدد حقیقی مثبت نیست بلکه یک دنباله است و همچنین فاصله بین دو عضو را می‌توان به‌صورت یک تابع، ماتریس، عملگر و غیره درنظر گرفت.

تعریف ۴.۴.۱. [۳۵] فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک مخروطی باشد. دنباله $\{x_n\}$ در X را همگرا گوییم اگر $x \in X$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $c \in E$ که $c \gg 0$، عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n \geq N$، $d(x_n, x) \ll c$ و با نماد $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ نمایش می‌دهیم. دنباله $\{x_n\}$ را یک دنباله کشی گوئیم هرگاه برای هر $c \in E$ با $c \gg 0$ عدد طبیعی مانند N موجود باشد به‌طوری که به ازای هر $n, m \geq N$،

$$d(x_n, x_m) \ll c.$$

همچنین فضای متریک مخروطی (X, d) را یک فضای متریک مخروطی کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در آن فضا همگرا باشد. لازم به ذکر است که دنباله $\{x_n\}$ را کراندار گوییم اگر $M \gg 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$d(0, x_n) \ll M.$$

با توجه به تعمیم مفهوم متر به متر مخروطی بعضی از نتایج موجود در فضاهای متریک به فضاهای متریک مخروطی تعمیم داده شده است که از نظر کاربرد اهمیت بسیاری دارد. از این رو هدف از بیان آن ارائه بعضی نتایج بهترین نقاط تقریبی از فضاهای متریک به فضاهای متریک مخروطی می‌باشد.

۵.۱ مرکز مجانبی

در این بخش تعاریف و مقدمات لازم برای فصل آخر از جمله مرکز مجانبی و شعاع مجانبی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۱. [۸] فرض کنید C زیر مجموعه ناتهی از فضای نرمدار X و $\{x_n\}$ دنباله‌ی کراندار در X باشد.

۱) تابعک $r_a(.,\{x_n\}) : X \to R^+$ را با ضابطه‌ی

$$r_a(x,\{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| \ , \ x \in X,$$

تعریف می‌کنیم.

۲) شعاع مجانبی ، دنباله $\{x_n\}$ نسبت به C را اینفیمم مقادیر $r_a(.,\{x_n\})$ روی C تعریف می‌کنیم و با $r_a(C,\{x_n\})$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$r_a(C,\{x_n\}) := \inf_{x\in C} r_a(x,\{x_n\}).$$

۳) نقطه‌ی $z \in C$ را مرکز مجانبی دنباله $\{x_n\}$ نسبت به C می‌نامیم هرگاه داشته باشیم

$$r_a(z,\{x_n\}) = r_a(C,\{x_n\}).$$

مجموعه تمام مرکز مجانبی‌های دنباله $\{x_n\}$ نسبت به C را با $Z_a(C,\{x_n\})$ نشان می‌دهیم. این مجموعه ممکن است تهی، منفرد یا بینهایت نقطه داشته باشد. در حقیقت، اگر دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x \in C$ باشد آنگاه

$$Z_a(C,\{x_n\}) = \{x\}$$

و اگر دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x \notin C$ باشد آنگاه

$$r_a(C,\{x_n\}) = d(x,C)$$

و

$$Z_a(C,\{x_n\}) = \{y \in C : \|x-y\| = d(x,C)\} = P_C(x).$$

تعریف ۲.۵.۱. گوییم فضای توپولوژیکی X دارای خاصیت توپولوژیکی نقطه ثابت است اگر هر نگاشت پیوسته $T : X \longrightarrow X$ دارای نقطه ثابت باشد.

قضیه ۳.۵.۱. [۲۴] زیرمجموعه محدب K از فضای باناخ X، دارای خاصیت توپولوژیکی نقطه ثابت است اگر و تنها اگر فشرده باشد.

قضیه ۴.۵.۱. (قضیه شودر[۱]) [۳] هر زیرمجموعه ناتهی، محدب و فشرده K از فضای باناخ X دارای خاصیت توپولوژیکی نقطه ثابت می‌باشد.

تعریف ۵.۵.۱. فرض کنیم C یک زیر مجموعه ناتهی از فضای توپولوژیک X و D یک زیر مجموعه ناتهی از C باشد. آنگاه نگاشت پیوسته $r : C \to D$ نگاشت انقباض گوییم اگر $r^{۲} = r$ باشد. در این حالت مجموعه D را انقباضی از C گوییم.

قضیه ۶.۵.۱. (اصل انقباض باناخ) [۲۴] فرض کنید X فضای متریک کامل و $T : X \longrightarrow X$ نگاشت انقباض باشد. آنگاه نگاشت T دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است و برای هر $x_{\circ}$ در X دنباله تکراری $(T^n x_{\circ})$ به سمت نقطه ثابت مذکور همگراست.

---

[۱] $Schauder$