بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض- جبر

کاربردهایی ازابرگروه‌های تبدیلات

استاد راهنما: دکتر اکبر دهقان نژاد

استاد مشاور: دکترحسین خورشیدی

پژوهش و نگارش: راهله سادات هاشمی

دی ماه ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر عزیزم ، مادر مهربانم

و

همسرم

و تقدیم به

همه آنهایی که دوستشان دارم . . .

سپاس بی کران به درگاه یگانه یاورم ...

تشکر خاضعانه خود را از محضر استاد راهنمای محترم، جناب آقای دکتر اکبر دهقان نژاد، که سرپرستی این پایان نامه را به عهده داشتند ابراز می نمایم.

از استاد مشاور گرامی، آقای دکتر حسین خورشیدی بسیار سپاس گزارم.

همچنین از داوران گرامی، آقای دکتر ودادی و آقای دکتر دواز، کمال قدردانی و سپاس را دارم.

از پدرم، مادرم و همه عزیزانم که در طول این مسیر مشوق و همراهم بودند، صمیمانه تقدیر و تشکر می کنم.

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی خانم راحله سادات هاشمی دانشجوی کارشناسی ارشد

رشته/گرایش: ریاضی محض

تحت عنوان: کاربردهایی از ابرگروه‌های تبدیلات

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ ۸۷/۱۰/۳ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۵ به حروف نوزده ونیم و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	اکبر دهقان نژاد	
استاد/ استادان مشاور:	حسین خورشیدی	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	بیژن دواز	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	محمدرضا ودادی	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: علی محمد حاجی شعبانی

امضاء:

چکیده

یکی از مهمترین عوامل گسترش نظریه ابرساختارها، تعمیم مفهوم کلاسیک گروه است. از آنجا که گروه تبدیلات در شاخه‌های مختلف ریاضیات اهمیت فوق العاده ای دارد، ریاضیدانان ، تعمیم گروه تبدیلات در زمینه ابرساختارها را از نقطه نظرهای متفاوت عنوان کردند. در این پایان‌نامه بعد از ذکر مقدماتی از نظریه ابرساختارها ، دیدگاه معدن‌شکاف و هوسکوا را در مورد عمل یک ابرساختار روی یک مجموعه مطرح می‌کنیم. ضمن این‌که تعمیمی از تعریف هوسکوا را ارائه می‌دهیم، با مقایسه هر دو تعریف نتیجه می‌گیریم که تحت شرایط خاصی هر دو تعریف معادلند. همچنین مثال‌هایی از ریاضیات کاربردی ذکر کرده و ابرگروه انتقال (فضای الحاقی ناجابجایی) را که دسته ویژه‌ای از ابرساختارها هستند، توصیف می‌نماییم . در نهایت به ازای هر تعریف، روشی را برای ساختن یک فضای الحاقی توسط عمل یک ابرگروه روی یک مجموعه بیان می کنیم.

واژه‌های کلیدی: ابرگروه تبدیلات، نیم‌ابرگروه تبدیلات، فضای تحمل، عمل تعمیم‌یافته، T-ابرگروه تبدیلات، فضای الحاقی.

فهرست مندرجات

مقدمه

نظر به این‌که کاربرد عمل یک گروه روی یک مجموعه در علوم مختلف نظیر فیزیک، شیمی، هندسه و علوم فنی ومهندسی چشمگیر است در پی تعمیم مفاهیم گروه در حیطه ابرساختارها، ریاضیدانان بر آن شدند که به توسیع این مفاهیم بپردازند. در سال‌های اخیر عمل یک ابرگروه روی یک مجموعه از دو دیدگاه متفاوت توسط معدن‌شکاف [?] و اسکوا[۸] مورد بررسی قرارگرفته است. در تعریف نخست، نگاشت $\psi : G \times X \to \mathcal{P}^*(X)$ و در تعریف دوم نگاشت $\pi = G \times X \to X$ به‌عنوان عمل یک ابرگروه روی یک مجموعه، هر کدام تحت شرایطی ارائه شده‌اند. مطلب قابل توجه این‌که هر دو تعریف به روش مشابهی برای ساختن یک فضای الحاقی مورد استفاده قرار می‌گیرند که هر دو ساختار همراه با ذکر مثال‌هایی به تفصیل بیان شده‌اند.

فصل اول این پایان‌نامه به بیان مفاهیم بنیادی از نظریه ابرساختارها اختصاص دارد. در فصل دوم ابتدا مقدماتی از جایگشت‌های تعمیم‌یافته را ذکر کرده و سپس ابرگروه M_X شامل همه جایگشت‌های تعمیم‌یافته را توصیف می‌کنیم. بعد از آن عمل تعمیم‌یافته یک ابرگروه روی یک مجموعه را تعریف می‌کنیم. همچنین نمایش جایگشتی یک ابرگروه را توصیف کرده و با ذکر دو قضیه رابطه آن با عمل تعمیم‌یافته یک ابرگروه روی یک مجموعه را شرح می‌دهیم و مثال‌های متعددی پیرامون این مباحث ذکر می‌کنیم. در فصل سوم تعریف اسکوا در مورد عمل یک ابرگروه روی یک مجموعه را ارائه می‌دهیم و مثال‌هایی از ریاضیات کاربردی از این نوع عمل را بیان می‌کنیم. در این فصل فضای مجاورت را تعریف کرده و با استفاده از این مطلب که رابطه مجاورت روی یک مجموعه در واقع یک رابطه تحمل روی مجموعه توانی است یک ابرگروه تبدیلات با فضای پایه تحمل را معرفی می‌کنیم. در نهایت قضیه انطباق را بیان نموده و شرح می‌دهیم که این

قضیه گویای این واقعیت است که مجموعه زمینه و ابرگروه زمینه یک ابرگروه تبدیلات معرفی شده، معادلند. در فصل چهار نتایجی از هر دو تعریف و کاربرد آن‌ها در ساختن یک فضای الحاقی را بررسی می‌کنیم. در واقع τ- ابرگروه تبدیلات را تعریف کرده و با ذکر قضیه‌ای نشان می‌دهیم تحت شرایطی یک فضای الحاقی است. همچنین به کمک عمل تعمیم‌یافته روی یک مجموعه ابرعملی را تعریف کرده و نشان می‌دهیم که ابرساختار حاصل یک فضای الحاقی است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم مقدماتی که در طول پایان‌نامه مورد نیاز است را ارائه می‌کنیم.

۱.۱ ابرساختارها

۱.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم H یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{P}^*(H)$ خانواده تمام زیر مجموعه‌های ناتهی H است. هرتابع $* : H \times H \to \mathcal{P}^*(H)$ را یک ابرعمل روی H می‌نامیم. اگر "$*$" یک ابرعمل روی H باشد، به $(H,*)$ یک ابرساختار یا ابرگروه‌وار گوییم. اگر $x \in H$ و A و B زیرمجموعه‌های ناتهی H باشند، آن‌گاه

$$A * B = \bigcup_{\substack{a\in A \\ b\in B}} a * b\ ,\ A * x = A * \{x\}\ ,\ x * B = \{x\} * B.$$

۲.۱.۱ تعریف.

ابرگروه‌وار $(H,*)$ یک ابرگروه نامیده می‌شود هرگاه

۱) ابرعمل "$*$" شرکت پذیر باشد، یعنی برای هر $x, y, z \in H$ تساوی $x*(y*z) = (x*y)*z$ برقرار باشد.

۲) ابرعمل " $*$ " دراصل موضوع تکثیر صدق کند. به عبارت دیگر برای هر $a \in H$، $a * H = H = H * a$.

اگر $(H, *)$ فقط در شرط (۱) صدق کند، آن‌را یک نیم‌ابرگروه و اگر تنها در شرط(۲) صدق کند، آن‌را یک شبه‌ابرگروه می‌نامند. همچنین ابرگروه‌وار $(H, *)$ تعویض‌پذیر است هرگاه، برای هر $x, y \in H$، داشته‌باشیم $x * y = y * x$.

۳.۱.۱ مثال.

اولین مثالی که انگیزه تعریف ابرگروه‌ها به‌عنوان تعمیمی از مفهوم گروه بود توسط مارتی در سال ۱۹۳۴ به شرح زیر مطرح شد:

فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه دلخواهی از G است. مجموعه $\frac{G}{H} = \{xH | x \in G\}$ همراه با ابرعمل $\odot$ که به صورت زیر تعریف می‌شود یک ابرگروه است.

$$\bar{x} \odot \bar{y} = \{\bar{z} | z \in \bar{x}\bar{y}\} \ , \ \bar{x} = xH.$$

۴.۱.۱ مثال.

برای توصیف ابرگروه‌ها در حالتی که متناهی باشند مشابه گروه‌ها می‌توان جدول کیلی را به‌کار برد:

برای $H = \{a, b, c\}$ ابرگروه $(H, *)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$*$	a	b	c
a	$\{a\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$
b	$\{b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$
c	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

۵.۱.۱ تعریف.

ابرگروه $(H,*)$ را یک ابرگروه توسیعی گویند اگر، به‌ازای هر $a,b \in H$، رابطه $\{a,b\} \subseteq a*b$ برقرار باشد .

۶.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم $(H,*)$ یک ابرگروه باشد. به ازای هر $a,b \in H$ مجموعه $b\backslash a = \{x \in H|\ a \in b*x\}$ را توسیع چپ و $a/b = \{x \in H|\ a \in x*b\}$ را توسیع راست می نامند.

اگر $(H,*)$ جابجایی باشد آن‌گاه توسیع چپ و راست معادلند.

۷.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $(H,*)$ یک برگروه‌واره باشد. ابرگروه H در اصل موضوع انتقال صدق می‌کند، اگر برای هر چهار عضو دلخواه $a,b,c,d \in H$ که $b/a \cap c\backslash d \neq \emptyset$ آن‌گاه $a*d \cap b*c \neq \emptyset$.

۸.۱.۱ تعریف.

ابرگروه $(H,*)$ را که در اصل موضوع انتقال صدق می‌کند، یک ابرگروه انتقال گوییم. یک ابرگروه انتقال جابجایی را فضای الحاقی گویند.

۹.۱.۱ مثال.

مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و ابرعمل $\star : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathcal{P}^*(\mathbb{Z})$ که به ازای $a,b \in \mathbb{Z}$ به صورت

$a \star b = \{x \in \mathbb{Z} | a + b \leq x\}$ تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم. $(\mathbb{Z}, \star)$ یک ابرگروه است. اگر به ازای $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ دلخواه $y \in a/b \cap c/d$ آن‌گاه کافی است قرار دهیم $z = a + c - y$ که در این صورت $z \in a \star d \cap b \star c$ و در نتیجه $(\mathbb{Z}, \star)$ یک فضای الحاقی است.

۱.۱.۱۰ تعریف.

فرض کنیم $(G, *)$ و $(H, \star)$ دو ابرگروه‌وار باشند. نگاشت $f : H \to G$ را که در آن برای هر $x, y \in H$، رابطه شمول $f(x \star y) \subseteq f(x) * f(y)$ برقرار باشد، یک همریختی شمول گوییم.

اگر به ازای هر $x, y \in H$ داشته باشیم $f(x \star y) = f(x) * f(y)$ آن‌گاه f را یک همریختی می‌نامیم و G, H را همریخت گوییم.

اگر همریختی f یک به یک و پوشا باشد آن‌گاه آن‌را یکریختی ابرگروه‌ها گوییم.

۱.۱.۱۱ تعریف.

فرض کنیم $(H, \star)$ یک ابرگروه باشد. نگاشت $f : H \to H$ یک درون‌ریختی قوی گفته می‌شود اگر برای هر $x, y \in H$، $f(x \star y) = f(x) \star f(y)$.

۱.۱.۱۲ تعریف.

فرض کنیم X یک مجموعه و $(H, \star)$ یک ابرگروه باشد. نگاشت $\pi : H \times X \longrightarrow X$ را که برای هر $s, t \in H$ و $x \in X$، $\pi(s, \pi(t, x)) \in \pi(s \star t, x)$ ($\pi(s \star t, x) = \{\pi(u, x) \mid u \in s \star t\}$)، در نظر می‌گیریم. آن‌گاه (X, H, π) را یک ابرگروه تبدیلات با فضای پایه گسسته و یا به‌طور خلاصه ابرگروه تبدیلات گسسته می‌نامند.

منظور از فضای پایه گسسته این است که به ازای هر $x, y \in X$، اگر ρ یک رابطه دوتایی باشد،

$$x \rho y \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad x = y.$$

قابل ذکر است که به ازای هر $A \subseteq X$، قرار می‌دهیم $\pi(t, A) = \{\pi(t, x) \mid x \in A\}$.

۱۳.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $X \neq \emptyset$ و τ یک رابطه انعکاسی و تقارنی باشد، آن‌گاه τ را یک رابطه تحمل و (X,τ) را، یک فضای تحمل می‌نامیم.

۱۴.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم (X,τ) یک فضای تحمل (فضای تحمل زمینه) و $(H,\star)$ یک نیم‌ابرگروه (نیم‌ابرگروه زمینه) باشد و نگاشت $\pi : H \times X \to X$ در شرایط (۱) و (۲)، صدق کند:

۱) برای هر $x \in X$ و $s,t \in H$، $\pi(s,\pi(t,x)) \in \pi(t \star s,x)$؛

۲) اگر $x,y \in X$ به طوری که $x\tau y$ آن‌گاه، برای هر $g \in H$، $\pi(g,x)\tau\pi(g,y)$

آن‌گاه (X,H,π) را نیم‌ابرگروه تبدیلات با فضای تحمل زمینه می‌نامیم.

شرط (۱) را GMAC[1] می‌نامند.

۱۵.۱.۱ مثال.

فرض کنیم $(G,*)$ یک گروه و H زیرگروه نرمال G باشد. به ازای هر $a,b \in G$ تعریف می‌کنیم $a \star b = \{a*b\}$. اگر قرار دهیم $X = G/H$ و $\pi : G \times X \to X$ را به صورت طبیعی $\pi(a,gH) = agH$ تعریف کنیم آن‌گاه π در شرط $GMAC$ صدق می‌کند و (X,G,π) یک ابرگروه تبدیلات گسسته است.

۱۶.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم (X_i,τ_i) فضای تحمل و $(H_i,*_i)$ ابرگروه و سه‌تایی $T_i = (X_i,H_i,\pi_i)$ به ازای $i = 1,2$ ابرگروه‌های تبدیلات با فضای تحمل زمینه هستند. زوج (h_X,h_H) از نگاشت‌ها را همریختی بین ابرگروه تبدیلات T_1 و ابرگروه تبدیلات T_2 گویند اگر:

۱) نگاشت h_X همریختی بین فضاهای تحمل X_1 و X_2 باشد، یعنی برای هر $x,y \in X_1$ به‌طوری‌که $x\tau_1 y$ آن‌گاه $h_X(x)\tau_2 h_X(y)$؛

[1] General Mixed Associative Condition

۲) نگاشت $h_H : H_1 \to H_2$ یک همریختی شمول باشد؛

۳) برای هر $x \in X_1$ و $u \in H_1$، $h_X(\pi_1(x,u)) = \pi_2(h_X(x), h_H(u))$.

۲.۱ ابرساختارهای ضعیف

یکی از موضوعاتی که در سال‌های اخیر مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است نظریه ابرساختارهای ضعیف است که تحت عنوان H_v— ساختارها معرفی می‌شوند. در اصول موضوع این ساختارها اشتراک ناتهی جایگزین تساوی می‌شود. این مبحث در سال ۱۹۹۰ توسط وجیوکلیس [۱] مطرح شد. در این بخش تعاریف مقدماتی از این نظریه را ذکر می‌کنیم.

۱.۲.۱ تعریف

ابرگروه‌وار $(H, *)$ یک H_v— گروه است هرگاه،

۱) شرط شرکت‌پذیری ضعیف برقرار باشد، یعنی

به ازای هر $x, y, z \in H$، $x * (y * z) \cap (x * y) * z \neq \emptyset$.

۲) اصل موضوع تکثیر برقرار باشد، یعنی به ازای هر $x \in H$، $x * H = H * x = H$.

یک ابرگروه‌وار که فقط در شرط اول صدق کند یک H_v— نیم‌گروه نامیده می‌شود.

۲.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم $(H_1, *)$ و $(H_2, \star)$ دو H_v— گروه باشند. نگاشت $f : H_1 \to H_2$ را یک همریختی ضعیف گویند اگر به ازای هر $x, y \in H_1$، $f(x * y) \cap f(x) \star f(y) \neq \emptyset$.

۳.۲.۱ تعریف.

H_v— گروه $(H, \star)$ را یک H_b— گروه گویند اگر عمل گروهی . روی H وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x, y \in H$، $x.y \in x \star y$.

۴.۲.۱ تعریف.

ابرساختار $(H, \star)$ را در نظر می‌گیریم. اگر به ازای هر $a, b \in H$، $a \star b \cap b \star a \neq \emptyset$ آن‌گاه

[۱] Vougiouklis

$(H,\star)$ را جابجایی ضعیف گویند.

شرکت‌پذیری ضعیف و جابجایی ضعیف را به اختصار با $WASS$ و COW نشان می‌دهیم. مشابه تعریف زیر، در مقاله یا متنی مشاهده نشده است. به علت اهمیت نظریه ابرساختارهای ضعیف در جبر نوین، دراین راستا، تعریف ابرگروه تبدیلات را به‌صورت زیر تعمیم داده‌ایم.

۵.۲.۱ تعریف.

اگر H یک H_v-گروه و X یک مجموعه ناتهی باشد و نگاشت $\delta : H \times X \to X$ در شرط $GMAC$ صدق کند آن‌گاه (X, H, δ) را یک H_v-گروه تبدیلات گسسته گوییم.

۶.۲.۱ مثال.

فرض کنیم که $(H,\circ)$ یک H_b-گروه باشد و X یک مجموعه ناتهی و نگاشت δ عمل گروه H روی مجموعه X باشد که در آن $*$ عمل گروهی روی H است به‌طوری‌که به ازای هر $g,h \in H$، $g * h \in g \circ h$. به وضوح شرط $GMAC$ برقرار است. بنابراین (X, H, δ) یک H_v-گروه تبدیلات گسسته است.