بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله دکتری

گرایش جبر

عنوان

گروهها و تجزیه پذیری

پژوهشگر

محمدرضا دهقان کروکی

استادان راهنما

دکتر غلامرضا رضایی زاده و دکتر محمدرضا درفشه

شهریور ۱۳۹۲

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،
به پاس قلب های بزرگشان، که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،
و به پاس ایثار و محبت های بی دریغشان، که هرگز فروکش نمی کند،
این مجموعه را به دوست عزیزم شوکران تقدیم می کنم.

اولین چکه ناودان بلند یک احساس را، در قالب کلامی از جنس تنفس با غنچه های معصوم یاس، به روی حجم سپید یک برگه می ریزم و آن را به لهجه های همه ی پروانه صفتهای این گیتی بی انتها به آستان نیلوفری دلهای زلال هدیه می کنم :

ای یزدان پاک تو را سپاس می گویم ،

که به حکمت بی انتهایت مرا یاری کردی ،

و به رحمت نعمتهایت را بر من تمام کردی ،

خانواده ای خوب به من عطا کردی که در هر حال پشتیبانی ام کنند و استادانی سر راهم نهادی تا دانش و علمشان را بی ریا در اختیارم بگذارند.

بر خود لازم می دانم از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این رساله مرا یاری نمودند، قدردانی نمایم . مراتب قدردانی و سپاس خود را از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی زاده و دکتر محمدرضا درفشه ابراز می نمایم.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان محمدرضا دهقان کروکی

شهریور ۱۳۹۲

اظهار نامه

در این رساله کلیهٔ مطالب بدون مرجع در فصل‌های چهارم و پنجم اصیل (Original) هستند و ضمناً مقاله‌های استخراج شده از فصول چهارم و پنجم به ترتیب

M. R. Darafsheh, G. R Rezaeezadeh and M. R. Dehghan Korukie, Non-factorizable groups, Italian Journal of Pure and Applied Matthematicd, to appear.

و

G. R Rezaeezadeh, M. R. Darafsheh and M. R. Dehghan Korukie, Simple groups which are the products of symmetrice or alternating groups with $L_3(4)$, submitted.

میباشند.

چکیده

در این پایان نامه به بررسی گروههای تجزیه ناپذیری که فراتینی این گروهها زیر گروهی نرمال ماکسیمال است، میپردازیم و نشان خواهیم داد این گروههای تجزیه ناپذیر به ازای شرایطی، گروههایی نیم ساده خواهند بود و همچنین در انتها به کند و کاوش در گروههای ساده ایی که حاصلضرب $L_{۳}(۴)$ و گروهی جایگشتی یا متناوبند، خواهیم پرداخت.

فهرست مطالب

مقدمه

در فصل اول این رساله به بیان تعاریف و پیشنیازهای مرتبط به فصول آینده میپردازیم. این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول به تفصیل، زیرگروه فراتینی و خواص مهم آن مورد بررسی قرار میگیرد. در بخش دوم به معرفی گروههای پوچتوان و حلپذیر میپردازیم و بخش سوم به مفهوم مهم و کلیدی گروههای جایگشتی اختصاص یافته است.
فصل دوم را با مفهوم حاصلضرب گروهها که پایه و شالوده ی این رساله است، شروع میکنیم و با بیان قضایا و تعاریف سعی میکنیم که دید روشن و واضحی از این مفهوم ارایه کنیم. در بخش دوم به مفهوم زیر گروه G^S و ارتباط آن با زیرگروه فراتینی میپردازیم.
فصل سوم را با گروههای خطی شروع کرده و سعی در کند و کاوش در این گروهها مینماییم. در بخش دوم این فصل قسمت عمده ی گروههای ساده ی متناهی را گنجاندیم و این گروهها را با توجه به مفهوم گروههای چند انتقالی بطور خلاصه فهرست بندی کردیم.

فصل چهارم را با تعاریف و مفاهیم مرتبط با تجزیه پذیری شروع میکنیم و این مفاهیم را با زیرگروه فراتینی پیوند میزنیم. در بخش دوم این فصل به گروههای تجزیه ناپذیری که فراتینی آنها شرایط خاصی دارد، میپردازیم.
فصل پنج را با ارایه ی لم ها و قضایایی که محرک اصلی ما برای طرح مساله ی ارایه شده در بخش بعد است، شروع میکنیم و در انتهای این فصل به رده بندی گروههای ساده ی متناهی که حاصلضرب $L_۳(۴)$ و گروهی متقارن یا متناوبند، میپردازیم.

فصل ۱

پیشنیازها

این فصل شامل سه بخش است که مقدمات و پیش نیازهای مرتبط با فصلهای آینده درآن ارایه شده است. در بخش اول این فصل به زیرگروه فراتینی میپردازیم وتعدادی از خواص آنرا بیان میکنیم، در بخش دوم خواص مقدماتی گروههای حلپذیر و پوچتوان بیان میشود و در بخش سوم مفاهیم مقدماتی گروههای جایگشتی مورد بررسی قرار میگیرد.

۱.۱ زیرگروه فراتینی

در این بخش به معرفی زیرگروه فراتینی و خواصی جالب و مفیدی از آن میپردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید M مجموعه ی زیر گروههای ماکسیمال گروه G باشد. اشتراک همه ی زیرگروه موجود در M زیر گروه فراتینی G یا $\Phi-$زیرگروه G نامیده میشود وآنرا با نماد $\Phi(G)$ نمایش میدهیم. اگر G زیرگروه ماکسیمالی نداشته باشد، قرار میدهیم $\Phi(G) = G$.

عنصر g از گروه G غیر مولد گفته میشود اگر $G =< g, X >$ دلالت کند بر $G =< X >$، جاییکه X زیر مجموعه ایی از G است. نشان میدهیم که $\Phi(G)$ مجموعه ی عناصر نامولد G است:

لم ۲.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهیا تولید شده است، آنگاه زیر گروه $\Phi(G)$ با مجموعه ی همه ی عناصر غیر مولد G برابر است.*

برهان. فرض کنید $g \in \Phi(G)$ و $G =< g, X >$ که $G \neq< X >$. چون g در $< X >$ قرار ندارد بنابراین زیر گروه ماکسیمال M از G شامل $< X >$ موجود است بطوریکه $g \notin M$. حال اگر $M < H \leq G$، آنگاه $g \in H$ و $H = G$. اما میدانیم $\Phi(G) \leq M$. در نتیجه $M =< g, X >= G$ که این یک تناقض

است.
برعکس فرض کنید g عنصری غیر مولد باشد که در زیر گروه فراتینی قرار ندارد. بنابراین گروه ماکسیمال M موجود است که $g \notin M$. بنابراین $G = < M, g > \neq M$. در نتیجه $G = M$ که تناقض است. $\square$

در لم بعدی خواص مقدماتی زیر گروه فراتینی مورد بررسی قرار گرفته است.

لم ۳.۱.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی باشد.*

۱. *اگر $N \lhd G$، $H \leq G$ و $N \leq \Phi(H)$، آنگاه $N \leq \Phi(G)$.*

۲. *اگر $K \lhd G$، آنگاه $\Phi(K) \leq \Phi(G)$.*

۳. *اگر $N \lhd G$، آنگاه $\Phi(\frac{G}{N}) \geq \frac{\Phi(G)N}{N}$. تساوی زمانی اتفاق می افتد که $N \leq \Phi(G)$.*

۴. *اگر A زیر گروهی نرمال و آبلی از G باشد بطوری که $\Phi(G) \cap A = 1$، آنگاه زیرگروه H موجود است بطوریکه $G = HA = \{ha | h \in H, a \in A\}$ و $H \cap A = 1$.*

برهان. فرض کنید $N \not\leq \Phi(G)$، بنابراین زیرگروه ماکسیمال M موجود است است بطوریکه $N \not\leq M$. در نتیجه $G = MN$. پس $H = H \cap (MN) = (H \cap M)N$. چون $N \leq \Phi(H)$ و طبق لم قبل عناصر $\Phi(H)$ غیر مولد هستند، داریم $H = H \cap M$ و لذا $H \leq M$. که متناقض با مفروضات است.
اگر در قسمت ۱، $N = \Phi(K)$ و $H = K$ قرار دهیم قسمت ۲ حاصل میشود.
قسمت ۳ با عضو گیری به راحتی حل میشود.
فرض کنید $G = HA$ و H نسبت به همه ی زیر گروههای K که در شرط $G = KA$ صدق میکنند مینیمال باشد. میدانیم $H \cap A \lhd H$ و $H \cap A \lhd A$. چون A آبلی است داریم $H \cap A \lhd HA = G$. اگر $H \cap A \leq \Phi(G)$، آنگاه قسمت ۱ نشان میدهد که $H \cap A \leq \Phi(G) \cap A = 1$. بنابراین میتوان فرض کرد $H \cap A \not\leq M$ که M زیر گروهی ماکسیمال از H است. در این حالت اخیر $H = M(H \cap A)$ و $G = HA = MA$، که متناقض با مینیمال بودن H است. $\square$

اکنون به بررسی عمیق تر فراتینی p-گروهها میپردازیم. در ادامه به بیان چندین لم و قضیه ی مفید که ما را در شناخت بهتر فراتینی p-گروهها و کاربرد فراتینی آنها به ویژه در ساخت فضاهای برداری خواهیم پرداخت.

لم ۴.۱.۱. *فرض کنید $\Phi = \Phi(G)$ زیر گروه فراتینی p-گروه G باشد. آنگاه گروه خارج قسمتی $\frac{G}{\Phi}$، گروهی آبلی است که هر عنصر آن در شرط $x^p = 1$ صدق میکند.*

برهان. به صفحه ۹۲ از [۳۸] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنید $\Phi(G)$ زیر گروه فراتینی p- گروه G باشد، فضای برداری $V = \frac{G}{\Phi(G)}$ را روی میدان F_p (میدانی p عضوی) در نظر بگیرید. فرض کنید $x_1, \ldots, x_n$ عناصری از گروه G با شد و $v_i = \Phi(G)x_i$ که $i = 1, \ldots, n$. اگر $|G : \Phi(G)| = p^d$، آنگاه:*

۱. *بعد فضای برداری V روی میدان p عضوی F_p برابر با d است.*

۲. *$G =< x_1, \ldots, x_n >$ اگر و تنها اگر فضای برداری V توسط بردارهای v_1، ...، v_n تولید شود. به علاوه اگر $G =< x_1, \ldots, x_n >$، آنگاه $n \geq d$.*

۳. *$p-$گروه G دقیقا توسط d عنصر تولید میشود. زیر مجموعه ی $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ گروه G را تولید میکند اگر و تنها اگر $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ پایه ایی برای فضای برداری V روی میدان p عضوی F_p باشد.*

برهان. به صفحه ۹۳ از [۳۸] مراجعه شود. $\square$

قضیه ی بالا به قضیه ی پایه برنساید [1] مشهور است. قضیه ی زیر کاربردی زیبا و کامل از قضیه ی پایه برنساید است.

قضیه ۶.۱.۱. *فرض کنید $\Phi(G)$ زیر گروه فراتینی $p-$گروه G باشد و داشته باشیم $|G : \Phi(G)| = p^d$ و $|G| = p^n$. اگر P مجموعه ی همه ی یکریختی های از G باشد که عناصر $\frac{G}{\phi(G)}$ را پایا نگه میدارد آنگاه:*

۱. *مجموعه ی P زیرگروهی نرمال از $Aut(G)$ (گروه یکریختیهای G) است و $\frac{Aut(G)}{P}$ با زیر گروهی از $GL(d,p)$ (گروه ماتریسهای وارونپذیر d بعدی روی میدانی p عضوی) یکریخت است.*

۲. *P یک $p-$زیرگروه از مرتبه ی کوچکتر از $p^{(n-d)d}$ است. بنابراین $|Aut(G)||p^m \prod_{i=1}^{d}(p^i - 1)$ بطوریکه $m = nd - \frac{d(d+1)}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.*

برهان. به [۳۸] مراجعه شود. $\square$

در دو نتیجه ی زیر چکیده و عصاره ی دو قضیه ی بالا بیان شده است.

نتیجه ۷.۱.۱. *فرض کنید G یک $p-$گروه باشد و ρ یکریخیت ایی از G. اگر مرتبه ی ρ نسبت به p اول باشد و ρ هر عنصر از $\frac{G}{\Phi(G)}$ را پایا نگه دارد، آنگاه $\rho = 1$.*

نتیجه ۸.۱.۱. *فرض کنید G یک $p-$گروه باشد و A زیرگروهی نرمال و آبلی دارای مرتبه ی ماکزیمال از گروه G باشد. اگر $|G| = p^n$ و $|A| = p^a$، آنگاه $2n \leq a(a+1)$.*

در انتهای این بخش به ارایه ی یک تعریف و چند لم که در فصول آینده از آنها استفاده خواهیم کرد میپردازیم.

تعریف ۹.۱.۱. گروه G کامل است هرگاه $G = G'$.

لم ۱۰.۱.۱. *فرض کنید N زیر گروه آبلی و نرمالی از G باشد. اگر $\frac{G}{N}$ گروهی کامل باشد، آنگاه G' کامل است.*

1. Burnside

برهان. فرض کنید همریختی φ، درونریختی طبیعی باشد، بدست می آوریم:

$$\frac{G}{N} = (\frac{G}{N})' = \frac{G'N}{N}.$$

بنابراین $G = G'N$. چون داریم $\frac{G'}{N\cap G'} \cong \frac{G}{N}$ گروهی کامل است با به کار بردن بحثی مشابه در میابیم $G' = G''(N\cap G')$. بنابراین خواهیم داشت $G = G''N$ و $\frac{G}{G''} \cong \frac{N}{N\cap G''}$. چون N آبلی است از لم قبل در میابیم $G' = G''$. □

۲.۱ گروههای پوچتوان و حلپذیر

تعریف ۱.۲.۱. گروه G را حلپذیر گوییم هرگاه دارای یک سری آبلی باشد یعنی سری زیرنرمالی به صورت

$$۱ = G_۰ \trianglelefteq G_۱ \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$$

موجود باشد بطوریکه خارج قسمتهای $\frac{G_{i+۱}}{G_i}$ آبلی باشند.

اگر G حلپذیر باشد طول کوتاهترین سری آبلی G را طول حلپذیری G گوییم. بنابراین طول حلپذیری G صفر است اگروتنها اگر $|G| = ۱$. همچنین گروههایی با طول حلپذیری حداکثر ۱ همان گروههای آبلی اند.

تعریف ۲.۲.۱. گروهی حلپذیر باطول حلپذیری ۲ را گروه فراآبلی گوییم.

در لم زیر تعدادی از خواص مقدماتی گروههای حلپذیر بیان شده است.

لم ۳.۲.۱. ۱. *هر زیرگروه و هر تصویر همریخت از یک گروه حلپذیر، حلپذیر است.*

۲. *فرض کنید N زیرگروه نرمالی از G باشد بطوریکه N و $\frac{G}{N}$ حلپذیر باشند، آنگاه G حلپذیر است.*

۳. *حاصلضرب هر تعداد متناهی از گروههای حلپذیر، حلپذیر است.*

قضیه زیر که به حدس برنساید معروف است و در سال ۱۹۶۳ توسط فیت [1] و تامسون [2] به اثبات رسید یکی از نتایج جالب در گروههای حلپذیر است.

قضیه ۴.۲.۱. *هر گروه متناهی با مرتبه ی فرد حلپذیر است.*

1. Feit
2. Thompson

چون موضوع مورد علاقه ی ما حاصلضرب گروهها است قسمت ۱ قضیه بعد برای ما جلب نظر میکند.

قضیه ۵.۲.۱. ۱. *در هر گروه G حاصلضرب دو زیرگروه نرمال حلپذیر، حلپذیر است.*

۲. *هر گروه متناهی حلپذیر دارای سری زیر نرمال است بطوریکه خارج قسمتهای آن دوری با مرتبه عددی اول اند.*

۳. *فرض کنید G گروهی حلپذیر متناهی و N زیر گروه نرمال مینیمال G باشد، آنگاه N آبلی مقدماتی است.*

تعریف ۶.۲.۱. گروه G را فوق حلپذیر گوییم اگر سری نرمالی داشته باشد که خارج قسمتهای آن دوری باشد.

واضح است که هر زیرگروه و هر خارج قسمت از یک گروه فوق حلپذیر، فوق حلپذیر است. در قضیه ی زیر میتوان یکی از معیارهای فوق حلپذیری را دید.

قضیه ۷.۲.۱. *گروه متناهی G فوق حلپذیر است اگروتنها اگر اندیس هر زیر گروه ماکسیمال G عددی اول باشد.*

برهان. به [۲۳] مراجعه شود. □

در قضایای زیر، مجموعه ایی از گروههای که حلپذیرند معرفی شده اند.

قضیه ۸.۲.۱. (برنساید) *فرض کنید G گروهی از مرتبه ی $p^a q^b$ باشد که p و q اعداد اولند، آنگاه G حلپذیر است.*

برهان. به [۲] مراجعه شود. □

قضیه ۹.۲.۱. (تامسون) *فرض کنید برای هر دو عضو x و y از G زیرگروه $< x, y >$ حلپذیر باشد، آنگاه G حلپذیر است.*

برهان. به [۱۴] مراجعه شود. □

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض کنید G گروهی با مرتبه ی ${p_1}^{a_1} \dots {p_t}^{a_t}$ باشد که p_i ها اعداد اول متمایزند و برای هر $i \in \{1, \dots, t\}$، زیرگروه H_i از G موجود باشد بطوریکه $|G : H_i| = {p_i}^{a_i}$، آنگاه G حلپذیر است.*

برهان. به [۱۴] مراجعه شود. □

در ادامه به تعریف گروههای پوچتوان و ارتباط این گروهها با گروههای حلپذیر میپردازیم.

تعریف ۱.۲.۱۱. گروه G را پوچتوان گوییم هرگاه دارای یک سری مرکزی باشد. یعنی سری نرمالی به صورت زیر داشته باشد:

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G \ , \ \frac{G_{i+1}}{G_i} \subseteq Z(\frac{G}{G_i}).$$

طول کوتاهترین سری مرکزی G را کلاس پوچتوانی G مینامیم. یک گروه پوچتوان از کلاس ۰ دارای مرتبه ۱ میباشد و گروههای پوچتوان باکلاس حداکثر ۱ آبلی هستند. به راحتی میتوان نشان داد که هر گروه پوچتوان، حلپذیر است. اما عکس این مطلب درست نیست به عنوان مثال S_3 یک گروه حلپذیر و غیر پوچتوان است.

در لم زیر لیستی از خواص مقدماتی گروههای پوچتوان ارایه شده است، بنابراین:

لم ۱.۲.۱۲. ۱. *هر زیرگروه و هر خارج قسمت از یک گروه پوچتوان، پوچتوان است.*

۲. *حاصلضرب مستقیم هر تعداد متناهی از گروههای پوچتوان، پوچتوان است.*

۳. *اگر G گروهی پوچتوان و N زیرگروه نرمال نابدیهی G باشد، آنگاه $N \cap Z(G) \neq 1$.*

۴. *اگر G گروهی پوچتوان و $H \lhd G$ ، آنگاه $H \neq N_G(H)$.*

۵. *اگر G گروهی متناهی باشد، آنگاه G پوچتوان است اگروتنها اگر $G' \leq \Phi(G)$.*

۶. *اگر G گروهی پوچتوان و N زیرگروه مینیمالی از G باشد، آنگاه $N \subseteq Z(G)$.*

۷. *اگر G گروهی پوچتوان و N زیرگروه ماکسیمال و آبلی از G باشد، آنگاه $N = C_G(N)$.*

۸. *اگر G متناهی باشد $\Phi(G)$ پوچتوان است.*

در ادامه با ارایه چند تعریف شرایط معادلی برای پوچتوانی بدست میاوریم.

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنید G یک گروه باشد. گوییم G در شرط نرمال ساز صدق میکند درصورتیکه به ازای هر زیرگروه محض H از G داشته باشیم $H \subset N_G(H)$.

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leq G$. گوییم H زیرگروه زیر نرمال G است هرگاه H در یک سری زیرنرمال از G ظاهر شود، در چنین حالتی مینویسیم $H \lhd \lhd G$.

حال آماده ایم شرایط معادلی برای پوچتوان بودن یک گروه ارایه کنیم.

لم ۱.۲.۱۵. *فرض کنید G گروهی متناهی باشد، آنگاه گزاره های زیر معادلند:*

۱. *G پوچتوان است.*

۲. G در شرط نرمالساز صدق میکند.

۳. هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است.

۴. G حاصلضرب مستقیم زیرگروههای سیلوی خود است.

برهان. به صفحه ۶ از [۳۵] مراجعه شود . $\square$

با اثبات لم زیر به پیشواز قضیه ی معروف گاشوتز [1] میرویم.

لم ۱.۲.۱۶. *(استدلال فراتینی [2]) فرض کنید H زیر گروه نرمال و متناهی از گروه G باشد و P، $p-$زیرگروه سیلویی از گروه H، آنگاه $G = N_G(P)H$.*

برهان. فرض کنید $g \in G$، آنگاه $P^g = g^{-1}Pg \leq H$ و P^g، $p-$زیرگروه سیلویی از H است. بنابراین $P^g = P^h$ به ازای hی در گروه H. در نتیجه $gh^{-1} \in N_G(P)$ و $g \in N_G(P)H$.

$\square$

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنید G یک گروه باشد. زیرگروه تولید شده توسط تمام زیرگروههای نرمال و پوچتوان G را زیرگروه فتینگ G مینامیم و با نماد $F(G)$ نمایش میدهیم.

قضیه ۱.۲.۱۸. *(گاشوتز) فرض کنید G یک گروه باشد.*

۱. *اگر $\Phi(G) \leq H \lhd G$ که H گروهی متناهی و $\frac{H}{\Phi(G)}$ پوچتوان باشد، آنگاه H پوچتوان است.*

۲. *فرض کنید $F(\frac{G}{\Phi(G)}) = \frac{K}{\Phi(G)}$. اگر G گروهی متناهی باشد، آنگاه $K = F(G)$ و $\frac{K}{\Phi(G)}$ حاصلضربی از گروههای آبلی و نرمال مینیمال $\frac{G}{\Phi(G)}$ است.*

برهان. به صفحه ی ۱۳۶ از [۱] مراجعه شود. $\square$

قضیه زیر رابطه ی بین زیرگروه فراتینی و پوچتوانی را بیان میکند.

قضیه ۱.۲.۱۹. *(ویلنت [3]) فرض کنید G گروهی متناهی باشد. آنگاه G پوچتوان است اگروتنها اگر $G' =< xyx^{-1}y^{-1}|x, y \in G >\leq \Phi(G)$.*

برهان. اگر M زیر گروه ماکسیمال نرمالی از گروه G باشد، آنگاه $\frac{G}{M}$ دارای مرتبه ایی اول است و $G' \leq M$. بنابراین $G \lhd M$ اگر و تنها اگر $G' \leq M$. همه ی زیر گروههای ماکسیمال G نرمال هستند اگر و تنها اگر $G' \leq \Phi(G)$.

$\square$

1. Gaschutz
2. Frattini Agrument
3. Wielandt

در قضیه مهم زیر درباره ی طول پوچتوانی حاصلضرب گروهها بحث میکنیم.

قضیه ۲۰.۲.۱. (*فیتینگ* [۱]) *فرض کنید M و N دو زیرگروه نرمال پوچتوان از گروه G باشند. اگر رده پوچتوانی M و N به ترتیب c و d باشند، آنگاه MN پوچتوان از رده ی حداکثر $c+d$ است.*

برهان. به [۲۳] مراجعه شود. □

قضیه ی زیر پل ارتباطی بین پوچتوانی و فوق حلپذیری است.

قضیه ۲۱.۲.۱. *فرض کنید G گروهی فوق حلپذیر باشد، آنگاه G' پوچتوان است.*

برهان. به [۲۳] مراجعه شود. □

حال با بازگشت به گروههای حلپذیر به بیان قضیه ی کارتر [۲] میپردازیم قضیه ایی که از جهاتی شبیه به قضایای سیلو در نظریه گروههای متناهی میباشد. اما ابتدا تعریف زیر را انجام میدهیم:

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه G باشد. H زیرگروه کارتر G است هرگاه H پوچتوان باشد و $H = N_G(H)$.

قضیه ۲۳.۲.۱. (*کارتر*) *فرض کنید G گروهی متناهی و حلپذیر باشد. آنگاه G حداقل یک زیرگروه کارتر دارد. بعلاوه، هر دو زیرگروه کارتر از G با هم مزدوجند.*

برهان. به [۲۳] مراجعه شود. □

در انتهای این مبحث بررسی بزرگترین زیرگروه نرمال و پوچتوان یک گروه متناهی میپردازیم.
اگر G گروهی متناهی باشد، براحتی دیده میشود که $F(G)$ زیرگروهی پوچتوان از G است و بزرگترین زیرگروه نرمال پوچتوان G میباشد که منحصر به فرد نیز هست.
برخی از خواص زیرگروه فیتینگ در لم زیر بیان شده است.

لم ۲۴.۲.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی باشد، آنگاه:*

۱. *اگر $K \lhd G$ داریم $F(K) \leq F(G)$.*

۲. *اگر $G \neq 1$ حلپذیر باشد، آنگاه $F(G) \neq 1$.*

۳. *اگر $G \neq 1$، آنگاه $C_G(F(G))$ شامل هر زیرگروه نرمال مینیمال G است.*

۴. *اگر G حلپذیر باشد، آنگاه $C_G(F(G)) \leq F(G)$.*

برهان. به [۳۵] مراجعه شود. □

1. Fitting
2. Carter

لم ۲۵.۲.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی و حلپذیر باشد، آنگاه $\frac{G}{F(G)}$ آبلی است.*

برهان. به [۳۵] مراجعه شود. □

لم ۲۶.۲.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی و حلپذیر و $F(G)$ دوری باشد. آنگاه G فوق حلپذیر است.*

برهان. به [۳۵] مراجعه شود. □

۳.۱ گروههای جایگشتی

فرض کنید Ω مجموعه ایی دلخواه و ناتهی باشد، عناصر Ω را نقطه مینامیم. منظور از یک جایگشت روی Ω، نگاشت دوسویی(یک به یک و پوشا) از Ω به Ω است. مجموعه ی همه ی این نگاشتها با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه میدهند که به آن گروه جایگشتی گوییم و آنرا با نماد $Sym(\Omega)$ نمایش میدهیم. در حالت خاص اگر $\Omega = \{۱, ۲, \ldots, n\}$، آنگاه $Sym(\Omega)$ را با نماد S_n نمایش میدهیم. معمولا S_n را گروه متقارن روی n حرف مینامیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه ایی ناتهی باشد، به ازای هر $\alpha \in \Omega$ و هر $x \in G$، فرض کنید عنصر $\alpha^x \in \Omega$(به عبارتی دیگر $(\alpha, x) \to \alpha^x$ تابعی از $\Omega \times G$ به Ω است). گوییم گروه G روی مجموعه ی Ω عمل میکند و مینویسیم $(G|\Omega)$ ، هرگاه داشته باشیم:

۱. $\forall\alpha \in \Omega$، $\alpha^۱ = \alpha$ (۱ عنصر همانی گروه G است).

۲. $\forall x, y \in G$ و $\forall\alpha \in \Omega$ $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$.

فرض کنید گروه G روی مجموعه ی ناتهی Ω عمل کند، آنگاه به ازای هر $x \in G$، نگاشت $\overline{x}$ از Ω با ضابطه ی $\alpha \to \alpha^x$ خواهیم داشت. بنابراین نگاشت $\rho : G \to Sym(\Omega)$ با ضابطه ی $\rho(x) =: \overline{x}$ را داریم و با استفاده از دو شرط تعریف بالا در میابیم ρ یک همریختی گروههاست.

تعریف ۲.۳.۱. هر همریختی از گروه G به $Sym(G)$ یک نمایش(جایگشتی) از G روی Ω مینامیم.

تناظری یک به یک بین عمل G روی Ω و نمایش G روی Ω وجود دارد. بنابراین عمل بر گروه و نمایش جایگشتی دو توصیف متفاوت از یک مفهوم هستند.

منظور از درجه یک عمل تعداد عناصر Ω است و منظور از هسته ی یک عمل هسته ی نمایش ρ است. گوییم یک عمل باوفا است هرگاه هسته ی نمایش $ker\rho = ۱$ باشد.

فرض کنید G روی مجموعه ی Ω عمل کند و α نقطه ایی از Ω باشد. منظور از مدار α در G که با نماد α^G نمایش میدهیم مجموعه ی $\{\alpha^x | x \in G\}$ است. مفهوم دیگری که نقش مهمی در مطالعه ی عمل یک گروه بازی میکند ثابت ساز است، منظور از ثابت ساز نقطه ی α، زیر گروه $G_\alpha = \{x \in G | \alpha^x = \alpha\}$ است.