بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

حل عددی مسائل مقدار مرزی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی معمولی غیرخطی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

داود دمیرچلی

استاد راهنما:

دکتر علی فروش باستانی

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم خالصانه به

پدرم

قدردانی و تشکر

خداوند منان را شاکرم که شوق آموختن را در وجودم نهاد و در مسیر پر فراز و نشیب زندگی‌ام هیچگاه دلم را از عشق و امید به یاری و مساعدت خود تهی نکرد. اجر معنوی این اثر را به پدرم تقدیم می‌کنم که مانند کوهی استوار و با صلابت در تمامی لحظات همواره مشوق و حامی بنده در راه کسب علم و دانش بوده‌اند.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر علی فروش باستانی که در مسیر انجام این پژوهش همواره از راهنمایی‌های بجا و صبورانه ایشان استفاده و حض کامل را برده‌ام کمال تشکر و قدر دانی را دارم. افتخار شاگردی ایشان مسئولیت سنگینی خواهد بود که امیدوارم خداوند توفیق و توان ادای این مهم را چه در زمینه علمی و چه در زمینه اخلاقی در مابقی عمر این کمترین عطا فرماید. در نهایت از خانواده عزیزم که از مساعدت و دلگرمی ایشان در تهیه و تدوین این اثر بهره کامل را برده‌ام کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

چکیده

مسائل مقدار مرزی تصادفی، معادلات دیفرانسیل تصادفی شامل انتگرال‌ده‌های پیشگویی‌کننده نویز هستند. در واقع، این نوع از معادلات دیفرانسیل شامل انتگرال‌های ناسازگارند. با توجه به ذات پیشگوی این معادلات، ابزار اصلی بررسی وجود و یکتایی جواب این مسائل، حسابان ملیون است. در حالت کلی، جواب تحلیلی این مسائل به ندرت در دسترس است و در نتیجه استفاده از روش‌های عددی برای تقریب مسیرها و گشتاورهای جواب، یک نیاز اساسی است. در این پایان‌نامه، پس از معرفی روش‌های عددی موجود برای حل عددی این نوع از معادلات دیفرانسیل تصادفی از جمله روش توابع مکمل و روش پرتابی ساده، در راستای ارائه روش‌های کارا برای تقریب جواب مسائل مقدار مرزی تصادفی، روش پرتابی چندگانه پویا و روش تفاضلات متناهی را برای اولین بار گسترش می‌دهیم و نشان می‌دهیم این دو روش، ضمن برخورداری از دقت مناسب نسبت به دو روش موجود، به طور بامعنایی پایداری را بهبود می‌بخشند.

فهرست

۳ روش پرتابی برای مسائل مقدار مرزی تصادفی

۴ روش پرتابی چندگانه پویا

۵ روش تفاضلات متناهی برای حل عددی مسائل مقادیر مرزی تصادفی

مقدمه

در دو دهه اخیر پیشرفت‌های زیادی در مبحث نوپای معادلات دیفرانسیل تصادفی معمولی چه در زمینه تئوری و چه در زمینه حل عددی آنها صورت پذیرفته است. اما در مقایسه با این دسته از معادلات دیفرانسیل تصادفی، مسائل مقدار مرزی تصادفی، با توجه به پیچیدگی‌های موجود چه به لحاظ تئوری و چه به لحاظ محاسباتی و حل عددی، کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند.

معادلات دیفرانسیل تصادفی با شرایط مرزی در شاخه‌های متعددی چون مسئله هموارسازی[۱] [۲۸]، مسئله تخمین پسین بیشینه برای مسیرهای فرایندهای انتشار[۲] [۳۲] و مطالعه کلاس‌های فرایندهای معکوس[۳] [۱۸] ظاهر می‌شوند. این معادلات همچنین در مطالعه مجانبی موج در رسانای تصادفی[۴] [۱۲] و در قیمت‌گذاری کالاهای وابسته به مرز در ریاضیات مالی [۱۰]، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در حالت کلی، بسیاری از سیستم‌های کنترلی که به صورت معادلات دیفرانسیل مقدار مرزی ظاهر می‌شوند، به یک مسئله مقدار مرزی تصادفی، مربوط می‌شوند.

با وجود گستره کاربرد این معادلات، متأسفانه جواب دقیق این معادلات در اکثر موارد، در دسترس نیست. تحقیقات انجام شده در زمینه بررسی قضایای وجود و یکتایی این نوع معادلات، جز در موارد معدود و در حالت‌های خاص شامل موارد بیشتری نمی‌شود. از این رو، حل عددی این نوع معادلات برای بدست آوردن تقریبی از مسیرهای جواب و یا گشتاورهای آنها، اجتناب ناپذیر خواهد بود.

در سال‌های اخیر تلاش‌هایی برای استفاده از روش حل عددی مسائل مقدار مرزی غیرتصادفی، برای حل نوع تصادفی این معادلات شده است که از آن جمله، می‌توان به روش توابع مکمل[۵] [۴] و روش پرتابی ساده[۶] [۳] اشاره کرد که با دقت مناسبی مسیرهای جواب را تقریب می‌زنند. این روش‌ها بر مبنای انتقال مسائل مقدار

[۱] Smoothing Problem

[۲] Maximum a Posterior Estimation of Trajectores of Diffusion Process

[۳] Reciprocal Processes

[۴] Random Media

[۵] Complementary Function Method

[۶] Simple Shooting Method

مرزی به مسائل مقدار اولیه استوارند. روش توابع مکمل مبتنی بر انتقال مسئله مقدار مرزی تصادفی به خانواده‌ای از مسائل مقدار اولیه تصادفی است که با ترکیب خطی جواب این مسائل مقدار اولیه، تقریبی از جواب مسئله مقدار مرزی تصادفی بدست می آید.

در روش پرتابی نیز مانند روش توابع مکمل، مسئله مقدار مرزی تصادفی را به مسئله مقدار اولیه انتقال می‌دهیم، با این تفاوت که ما مسئله مقدار مرزی را به یک مسئله مقدار اولیه متناظر تبدیل می‌کنیم. سپس از میان دسته جواب‌های این مسئله که با در نظر گرفتن شرایط اولیه متفاوت بدست آمده‌اند، تحققی از جواب که در شرایط مرزی مسئله اصلی نیز صدق می‌کند را به عنوان تحققی از جواب انتخاب می‌کنیم.

در این پایان نامه پس از معرفی روش‌های ذکر شده، روش پرتابی چندگانه پویا[۷] را برای مسائل مقدار مرزی تصادفی گسترش خواهیم داد. شاید بتوان این روش را به عنوان گسترش طبیعی از روش پرتابی ساده تعبیر کرد. روش پرتابی ساده دارای دقت خوبی است اما ممکن است در بازه زمانی طولانی نتایج غیر قابل قبولی را بدست دهد. مخصوصاً زمانی که مسئله مقدار مرزی ناپایدار است، به این معنی که تقریباً تمامی مسیرهای نمونه‌ای به سرعت از لحاظ قدر مطلق، رشد می‌کنند. در روش پرتابی چندگانه با تقسیم بازه مسئله به زیر بازه‌های کوچکتر و حل مسئله مقدار اولیه متناظر بر هر زیر بازه و تحمیل شرایط پیوستگی و شرایط مرزی بر تقریب‌های جواب در این زیر بازه‌ها، جواب قابل قبولی را برای مسئله مقدار مرزی اولیه بدست می آوریم. در روش پرتابی چندگانه پویا، زیر بازه‌ها با استفاده از یک محک مناسب بر اساس آنالیز مسیر به مسیر تحقق‌های جواب بدست خواهند آمد.

در این پایان‌نامه نشان خواهیم داد، روش پرتابی چندگانه پویا علاوه بر رفع نواقص روش پرتابی، به طور با معنایی پایداری روش پرتابی ساده را افزایش می‌دهد و همزمان هزینه محاسباتی را در بازه زمانی طولانی کاهش می‌دهد.

بنیان تمامی روش‌های معرفی شده تا به حال، استفاده از مسئله مقدار اولیه برای حل مسئله مقدار مرزی است. تلاش برای یافتن روشی که تقریبی از جواب را در نقاط داخلی افراز به طور مستقیم و بدون استفاده از مسئله مقدار اولیه بدست دهد، ما را به سمت روش تفاضلات متناهی[۸] سوق می‌دهد. البته روش تفاضلات متناهی برای حل مسئله مقدار مرزی مرتبه دوم خطی در سال ۱۹۹۵ توسط آلن[۹] و نان[۱۰] ارائه شده بود. در این

[۷] Adaptive Multiple Shooting Method

[۸] Finite Difference Method

[۹] Allen, E. J

[۱۰] Nunn, C. J

پایان‌نامه، روش تفاضلات متناهی را برای کلیه مسائل مقدار مرزی مرتبه اول خطی و غیرخطی، مرتبه دوم غیرخطی، و خطی با شرایط مرزی چندگانه گسترش خواهیم داد. لازم به ذکر است ما به تمامی ظرفیت‌ها و نقاط قوت روش تفاضلات متناهی اشاره نکرده‌ایم (در حقیقت تنها روش تفاضلات متناهی ساده را معرفی می‌کنیم). ترتیب ارائه مطالب به صورت زیر خواهد بود.

در فصل اول، مقدماتی بر ادبیات ملیون [۱۱] ارائه می‌شود و قضایای وجود و یکتایی برای مسائل مقدار مرزی تصادفی معرفی خواهد شد. در فصل دوم، روش توابع مکمل برای حل عددی مسائل مقدار مرزی تصادفی خطی ارائه می‌شود. روش پرتابی ساده برای حل عددی مسائل مقدار مرزی تصادفی غیرخطی در فصل سوم مطرح می‌شود. در فصل چهارم سعی می‌کنیم روش پرتابی چند گانه پویا را برای حل عددی مسائل مقدار مرزی تصادفی گسترش دهیم و در نهایت روش تفاضلات متناهی در فصل پنجم ارائه می‌شود. در انتهای هر بخش سعی می‌کنیم با ارائه مثال‌های استاندارد موجود در ادبیات، کارایی و دقت روش‌های مذکور را با هم مقایسه کنیم.

در خاتمه اشاره می‌کنیم که روش پرتابی چندگانه، چهارم آذر ماه سال ۱۳۸۸ در پنجمین کارگاه فرایندهای تصادفی که در دانشگاه تهران برگزار شد، در قالب یک سخنرانی ارائه شده است، همچنین چکیده‌ای از مقاله روش پرتابی چندگانه برای اولین سمینار بین المللی ریاضیات و آمار در دانشگاه آمریکایی شارجه فرستاده شد که علی‌رغم داوری و پذیرفته شدن، مقدمات سفر فراهم نشد. در نهایت روش مذکور در قالب یک مقاله [۱۳] برای مجله علمی فرستاده شد.

---

[۱۱] Mallivian

فصل اول

مقدمات

۱.۱ مقدمه

در سال‌های اخیر، در امتداد گسترش ادبیات حسابان ملیون، علاقه‌مندی زیادی برای تعریف انتگرال‌هایی بوجود آمد که در آنها برخلاف انتگرال ایتو[۱]، متغییر انتگرال‌ده لزوماً با حرکت براونی زمینه‌ای ، سازگار [۲] نیست. به عبارت دیگر، در اینجا با انتگرال‌های تصادفی‌ای روبرو هستیم که در آنها انتگرال‌ده، پیشگو[۳] است. در این زمینه، می‌توان به [۲۳، ۲۴] مراجعه کرد که در آنها حسابان تصادفی برای دو مورد انتگرال‌های اسکوروهود[۴] و انتگرال استراتونوویچ ، گسترش یافته است و برای آنها، قانون زنجیره‌ای برای مشتق ارائه شده است.
آنچه مشخص است اینکه، این ادبیات جدید، امکان تعریف و بررسی (وجود و یکتایی) معادلات دیفرانسیلی که شامل پارامترهای پیشگویی کننده نویز هستند و به عبارت دیگر شامل انتگرال‌های ناسازگارند[۵] را فراهم می‌کند.

[۱] Itô Integral
[۲] Adapted
[۳] Anticipative
[۴] Skorokhoh
[۵] Non-Adapted

یکی از ساده‌ترین مثال‌های یک دستگاه پیشگو از معادلات، مسائل مقدار مرزی تصادفی دو نقطه‌ای است. در واقع، این مسائل به صورت زیر فرموله‌بندی می‌شوند:

$$dX_t = f(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \qquad X_t \in \mathbb{R}^n, \tag{۱.۱}$$

که علاوه بر معادله فوق، شرایط مرزی به صورت زیر به جواب این دستگاه تحمیل شده است:

$$F(X_\circ, X_T) = \circ, \qquad \text{rank}(F) = n, \tag{۱.۲}$$

به طوری که، انتگرال تصادفی در معادله دیفرانسیل (۱.۱) به صورت یکی از حالت‌های ممکن انتگرال‌های تصادفی پیشگو تعریف می‌شود. لازم به ذکر است که در واقع، تحمیل شرایط مرزی به جواب یک معادله دیفرانسل تصادفی، یکی از راه‌های بدست آوردن معادلات پیشگو است.

در حالت کلی، مسئله یافتن جواب سیستم (۱.۱) و (۱.۲) حل نشده است و محققان زیادی در حالت‌های خاص، این نوع معادلات را بررسی کرده و نتایجی را برای وجود و یکتایی جواب، در آن حالت خاص بدست آورده‌اند. اوکانو[۶] و پغدو[۷] دستگاه‌هایی از معادلات دیفرانسیل تصادفی با شرایط مرزی خطی را بررسی کرده‌اند که در این معادلات، جمله همرفت[۸] و پخش[۹]، هر دو خطی هستند. آنها نشان دادند، تحت بعضی شرایط برروی توابع f و σ، یک جواب یکتا وجود دارد. زیتونی[۱۰] و دمبو[۱۱] مسئله نیومن متناظر را بررسی و وجود یک جواب سرتاسری[۱۲] را برای f و σ، که در شرایط خاص صدق می‌کنند را ثابت کردند.

نولارت[۱۳] و پغدو به حالتی از مسئله توجه کردند که در آن σ، یک تابع ثابت است و نشان دادند که تحت شرایطی خاصی بر روی f، یک جواب کلی وجود دارد. والش[۱۴] و لو[۱۵] مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای را

[۶] D. Ocone
[۷] E. Pardoux
[۸] Drift
[۹] Difusion
[۱۰] O. Zeitouni
[۱۱] A. Dembo
[۱۲] Global
[۱۳] D. Nualart
[۱۴] John B. Walsh
[۱۵] S. J. Luo

بررسی کردند، به طوری که در این دسته از مسائل، شرایط اولیه جدا از هم و به صورت متغییر تصادفی هستند. آنها نشان دادند، اگر f و σ، توابعی آفین[16] باشند، برای هر شرط مرزی دو نقطه‌ای، هیچ انشعابی [17] در جواب وجود نخواهد داشت و مسئله دارای یک جواب یکتا خواهد بود. همچنین، در حالتی که f و σ، توابع غیرخطی باشند، انشعاب حتماً اتفاق خواهد افتاد. آنها به این سئوال نیز جواب دادند که در چه حالتی، جواب وجود ندارد و یا یک جواب یکتا وجود دارد و یا چند جواب وجود دارد.

در ادامه، مواردی که در بالا لیست شد را به طور دقیق معرفی می‌کنیم و قضایای وجود و یکتایی مربوط به آنها را ارائه خواهیم کرد. لازم به ذکر است، تا حد امکان از اثبات قضایا صرف نظر کرده و به صورت قضایا بسنده می‌کنیم. اما قبل از آن، شرح مختصری از حساب ملیون را ارائه می‌دهیم و با بعضی از مقدمات مورد نیاز برای بررسی وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار مرزی تصادفی آشنا خواهیم شد.

۲.۱ حسابان ملیون و انتگرال استراتونوویچ تعمیم یافته

حسابان ملیون (حساب تغییرات تصادفی)، یک حسابان شامل مشتق نامتناهی بعد، بر فضای وینر است. این حسابان، برای بررسی خواص همواری قانون تابعک‌هایی از فرایند وینر مانند معادلات دیفرانسیل تصادفی ارائه شد. این تئوری، ابتدا توسط ملیون ارائه و بعدها توسط افراد دیگری مانند استروک[18] و بیسموت[19] و واتانابه[20] و محققان دیگر گسترش یافت.

انگیزه اصلی و کاربرد مهم این تئوری، ارائه یک اثبات احتمالاتی از قضیه مجموع مربعات هرماندر [21] بود. حسابان ملیون را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد. بخش اول، تئوری عملگرهای مشتق تعریف شده بر فضای سوبولف مناسب از توابع وینر است. حقیقت اصلی و ضروری در این تئوری، قاعده انتگرال‌گیری جزء به جزء است که عملگر مشتق تعریف شده بر فضای وینر و انتگرال تصادفی گسترش یافته اسکروهود را به هم مرتبط

[16] Affine
[17] Bifurcation
[18] Stroock
[19] Bismut
[20] Watanabe
[21] Hörmonder's "Sum of Squars " Theorm

می‌کند. قسمت دوم این تئوری، با ارائه یک محک کلی با عنوان «ماتریس کوواریانس ملیون»[۲۲] برای یک بردار تصادفی، چگالی و یا به طور دقیقتر چگالی هموار را ارائه می‌کند.

علاوه بر آن، مطالعه همواری قوانین احتمالی، کاربرد دیگری از حسابان تغییراتی تصادفی است که اخیراً ارائه شده است. برای نمونه، الحاق عملگر مشتق به بسط غیر عادی از انتگرال تصادفی ایتو که بوسیله اسکروهود ارائه شد، نقطه شروعی در گسترش یک حسابان تصادفی برای فرایندهای ناسازگار بود. این حقیقت از بعضی جهات، مشابه حسابان ایتو بود. این حسابان پیشگو به محققان اجازه داد تا معادلات دیفرانسیل تصادفی که جواب آن با فیلتر حاصل از حرکت براونی ناسازگار است را مورد مطالعه قرار دهند و فرمول‌بندی کنند. در ادامه، به طور مختصر به بخش اول از تقسیم بندی ارائه شده در بالا می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^k)$، فضای وینر تولید شده بر بازه‌های فشرده باشد. معمولاً اندازه وینر[۲۳] $\mathcal{P}$ را بر Ω قرار می‌دهیم تا فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ را داشته باشیم. که در آن $\mathcal{F}$، σ—فیلد بورل تعریف شده بر زیر مجموعه‌های Ω است. می‌توان Ω را بوسیله نرم سوپریمم $\|.\|_\infty$ مجهز کرد که با این عمل، فضای Ω، یک فضای باناخ[۲۴] خواهد بود. با این دید، $\mathcal{F}$ σ—فیلد تعریف شده بر زیر مجموعه‌های باز این فضای باناخ است. در تمام این فصل، همه فرایندها بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ تعریف می‌شوند.

علاوه براین، قرارداد می کنیم $t_n^l = l ۲^{-n}$ به ازاء $l, n \in \mathbb{N}$.

تعریف ۱.۱ فرایند تصادفی $W(t, \omega)$ یک حرکت براونی است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) $P\{\omega;\ W(۰, \omega) = ۰\} = ۱$.

۲) به ازاً هر $۰ \leq s < t$، متغیر تصادفی $W(t) - W(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t - s$ است. به عبارت دیگر به ازاء هر $a < b$،

$$P\left\{a \leq W(t) - W(s) \leq b\right\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-x^۲/۲(t-s)} dx.$$

[۲۲] "Mallivain Covariance Matrix"

[۲۳] Wiener Space

[۲۴] Banach Space

۳) $W(t,\omega)$ دارای نموهای مستقل است. به این معنی که به ازاء هر $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$، متغیرهای تصادفی

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1}),$$

دو به دو، از هم مستقلند.

۴) تقریباً همه مسیرهای نمونه‌ای از $B(t,\omega)$ توابعی پیوسته هستند، یعنی:

$$P\{\omega;\ W(.,\omega) \text{ پیوسته است}\} = 1.$$

تعریف ۲.۱ فرایند حقیقی مقدار $\{u_t, t \in [0,1]\}$ با توجه به dW_t^i استراتونوویچ انتگرال پذیر نامیده می‌شود، اگر برای هر $t \in [0,1]$، دنباله $\{\xi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_n(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{W^i_{t^{l+1}_{n \wedge t}} - W^i_{t^l_{n \wedge t}}}{t_n^{l+1} - t_n^l} \int_{t_n^l}^{t_n^{l+1}} u_s ds,$$

وقتی $n \longrightarrow \infty$، در احتمال همگرا باشد. دراین صورت، این حد به صورت زیر نشان داده خواهد شد:

$$\int_0^t u_s \circ dW_s^i,$$

که با توجه به dW_t^i، به ازاء $i = 1, 2, \ldots, k$ ، یک فرایند حقیقی مقدار استراتونوویچ انتگرال پذیر نامیده می‌شود.

در ادامه، فرض می‌کنیم T یک بازه در $\mathbb{R}$ و یا مجموعه‌ای از اعداد مثبت است.

تعریف ۳.۱ فیلتر بر T به صورت خانواده $\{\mathcal{F}_t \mid t \in T\}$ از $\sigma-$فیلدها تعریف می‌شود. فرایند تصادفی $X_t, t \in T$، نسبت به $\{\mathcal{F}_t \mid t \in T\}$ سازگار است اگر برای هر t، متغیر تصادفی X_t، $\mathcal{F}_t-$اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۴.۱ فیلتر $\{\mathcal{F}_t \mid a \leq t \leq b\}$، فیلتر از راست پیوسته است اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}, \qquad \forall t \in [a,b)$$

که در آن، برای راحتی فرض می‌کنیم هنگامی که $t > b$ است، داریم $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_b$.

تعریف ۵.۱ فرض می‌کنیم X_t فرایند تصادفی سازگار با فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}$ است و ، برای هر $t \in T$ داریم $E|X_t| < \infty$. آنگاه X_t نسبت به $\{\mathcal{F}_t\}$ مارتینگل نامیده می‌شود اگر به ازاء هر $s \leq t$ در T، داشته باشیم:

$$E\{X_t|\mathcal{F}_s\} = X_s, \qquad a.s. \text{ (تقریباً همه جا)}$$

تعریف ۶.۱ متغیر تصادفی $\tau : \Omega \to [a, b]$ با توجه به فیلتر $\{\mathcal{F}; a \leq t \leq b\}$، زمان توقف[۲۵] نامیده می‌شود اگر برای هر $t \in [a, b]$ داشته باشیم:

$$\{\omega;\ \tau(\omega) \leq t\}.$$

تعریف ۷.۱ فرایند $\{\mathcal{F}_t\}$–سازگار X_t برای $a \leq t \leq b$، با توجه به $\{\mathcal{F}_t\}$، مارتینگل موضعی[۲۶] نامیده می‌شود اگر دنباله‌ای از زمان توقف‌های τ_n به ازاء $n = ۱, ۲, \ldots$، وجود داشته باشند به طوری که:

۱) هنگامی که $n \to \infty$ میل می‌کند، τ_n به طور یکنواخت تقریباً همه جا به b صعود کند.

۲) برای هر n، $X_{t\wedge\tau_n}$ با توجه به $\{\mathcal{F}_t; a \leq t \leq b\}$، مارتینگل باشد.

تعریف ۸.۱ فرایند تصادفی X_t با توجه به $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$، نیم–مارتینگل نامیده می‌شود اگر به صورت زیر قابل تجزیه باشد:

$$X_t = M_t + A_t,$$

که در آن، M مارتینگل موضعی و A یک فرایند سازگار با تغییرات کراندار است.

یک فیلتر پیشرو به صورت $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s^i; ۰ \leq s \leq t, i = ۱, ۲, \ldots, k\}$ و یک فیلتر پسرو به صورت $\mathcal{F}^t = \sigma\{W_s^i - W_t^i; t \leq s \leq ۱,\ i = ۱, ۲, \ldots, k\}$، را در نظر می‌گیریم. فرایند $\{v_t; t \in [۰, ۱]\}$ را یک نیم–مارتینگل پیشرو[۲۷] می‌نامیم، اگر $\mathcal{F}_t$ نیم–مارتینگل باشد. فرایند $\{v_t; t \in [۰, ۱]\}$ را یک نیم–مارتینگل پسرو[۲۸] می‌نامیم، اگر $v_{۱-t}$ یک $\mathcal{F}^{۱-t}$ نیم–مارتینگل باشد. در این صورت، نتایج زیر را خواهیم داشت.

---

[۲۵] Stopping Time

[۲۶] Local Martingale

[۲۷] Forward Semi-Martingale

[۲۸] Backward Semi-Martingale

گزاره ۹.۱ فرض کنید $u_t = g(v_t)$، به طوری که $g \in C^1(\mathbb{R})$ و $\{v_t\}$ یک فرایند پیوسته باشد که نیم–مارتینگل پیشرو یا پسرو است. در این صورت، u_t استراتونویچ انتگرال پذیر است.

برهان. به [۲۶] مراجعه شود. □

نتیجه‌ای که بلافاصله از تعریف منجر می‌شود:

گزاره ۱۰.۱ فرض کنید v_t، یک فرایند استراتونوویچ انتگرال پذیر بوده و θ، یک متغییر تصادفی باشد و تعریف می‌کنیم $u_t = \theta v_t$ برای $t \in [0, 1]$. در این صورت u_t، استراتونوویچ انتگرال پذیر است و داریم:

$$\int_0^t u_s \circ dW_s^i = \theta \int_0^1 v_s \circ dW_s^i, \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, k.$$

برهان. به [۲۶] مراجعه شود. □

برای آنکه انواع دیگری از فرایندهای استراتونوویچ انتگرال پذیر ناسازگار را تعریف کنیم، نمایش مشتق متغییرهای تصادفی وابسته به فضای وینر $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $H = L^2(0, 1)$. برای $h \in H$، انتگرال وینر $\int_0^1 h_s \, dW_s^i$ را با $\delta_i(h)$ نشان می‌دهیم. $\mathbb{S}$ را مجموعه متغییرهای از نوع زیر تعریف می‌کنیم:

$$F = f(\delta_{i_1}(h_1) \dots, \delta_{i_n}(h_n)),$$

به طوری که $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ و $h_1, \dots, h_n \in H$ و $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, k\}$. دقت کنید که $\mathbb{S}$ در $L^2(\Omega)$، چگال است.

اگر $F \in \mathbb{S}$ باشد، ما مشتق i–امین جهت آنرا برای $1 \leq i \leq k$ به صورت فرایند $\{D_t^i F, t \in [0, 1]\}$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر، تعریف می‌شود:

$$D_t^i F = \sum_{l; i_l = i} \frac{\partial f}{\partial x_l}(\delta_{i_1}(h_1) \dots, \delta_{i_n}(h_n)) h_l t.$$

در حالت کلی، مشتق مرتبه P از F، $D_{t_1, \dots, t_p}^{i_1, \dots, i_p}$ را به صورت زیر داریم:

$$D_{t_p}^{t_p} \dots D_{t_1}^{t_1} F.$$

اگر $F \in \mathbb{S}$ و $h \in H$ و $1 \leq i \leq k$، متغییر تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم

$$D_h^i F = \int_0^1 D_t^i F h(t) dt.$$

بردار K بعدی که i–امین مولفه آن، $D_t^i F$ $(D_h^i F)$ است را با $D_t F$ $(D_h F)$ تعریف می‌کنیم. همچنین از نماد DF برای نمایش فرایند $\{D_t F, t \in [0, 1]\}$ استفاده می‌کنیم.

در حالت کلی، $\mathbb{D}_{p,1}$ $(p \geq 1, l \in \mathbb{N})$ به عنوان متمم $\mathbb{S}$ با توجه به نرم

$$\|F\|_{P,l} = \|F\|_P + \| \, \|D^l F\|_{HS}\|_p,$$

معرفی می‌شود، به طوری که $\| \, . \, \|_P$ نرم $L^2(\Omega)$ و

$$\|D^l F\|_{HS}^2 = \sum_{j_1, \ldots, j_l = 1}^{k} \int_{(0,1)^l} (D_{t_1}^{j_1}, \ldots, D_{t_l}^{j_l}) dt_1 \ldots dt_l.$$

$\mathbb{D}_{p,l,loc}$، یک مجموعه از متغییرهای تصادفی F، تعریف می‌شود به طوری که، یک دنباله $\{(\Omega_n, F_n); n \in \mathbb{N}\}$ موجود باشد که در دو خاصیت زیر صدق کند:

- تقریباً همه جا، داشته باشیم $\Omega_n \uparrow \Omega$.
- تقریباً همه جا، بر Ω_n داشته باشیم $F = F_n$.

در این صورت، می‌گوییم $\{(\Omega_n, F_n); n \in \mathbb{N}\}$، F را در $\mathbb{D}_{p,l}$ می‌نشاند[29] و بدون هیچ ابهامی بر Ω_n به ازاء $n \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم $D_t F = D_t F_n$.

قضیه ۱۱.۱ فرض کنید $d \in \mathbb{N}$ و G زیر مجموعه بسته‌ای از $\mathbb{R}^d$ باشد و $\varphi \in C^1(G)$، اگر F یک بردار تصادفی d باشد به طوری که تقریباً همه جا، $F \in G$ و $F \in \mathbb{D}_{p,l,loc}$ و $1 \leq i \leq d$، در این صورت خواهیم داشت:

$$\varphi(F) \in \mathbb{D}_{p,l,loc},$$

[29] Localized

و

$$D_t^i\varphi(F)=\sum_{i=۱}^{d}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i(F)}D_t^jF_n^i.$$

برهان. به [۲۶] مراجعه شود. $\square$

در این قسمت، کلاس‌هایی از فرایندهای تصادفی را معرفی می‌کنیم:

$\mathbb{L}^{p,l}$ مجموعه فرایندهای $\{u_t; t\in[۰,۱]\}$ است به طوری که، تقریباً همه جا، $u_t\in\mathbb{D}_{p,l}$ و

$$\int_۰^۱\|u_t\|_{p,l}^p dt<\infty.$$

$\mathbb{L}_c^{p,l}$ مجموعه همه فرایندهای $\{u\in\mathbb{L}^{p,l}\}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کنند.

۱) $S\longrightarrow D_tu_s$ با مقداری در $L^p(\Omega)$ با توجه به متغیر t، به طور یکنواخت پیوسته است.

۲) $\text{Ess Sup}E(|D_su_t|^p)<\infty$.

$\mathbb{L}_{loc}^{p,l}$ و $\mathbb{L}_{c,loc}^{p,l}$ به طور مشابه تعریف می‌شوند. اگر $u\in\mathbb{L}_{c,loc}^{p,l}$ باشد، تعریف می‌کنیم

$$(\triangledown u)_+=D_t^+u_t+D_t^-u_t,\qquad D_t^-u_t=\lim_{\substack{s\to t\\ s<t}}D_tu_s,\qquad D_t^+u_t=\lim_{\substack{s\to t\\ s>t}}D_tu_s.$$

و i–امین مولفه $(\triangledown u)_t$ با $(\triangledown^iu)_t$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۱۲.۱ اگر $u\in\mathbb{L}_{c,loc}^{۲,۱}$ باشد، سپس u، استراتونوویچ انتگرال‌پذیر است.

فرایند

$$\delta_t^i(u)=\int_۰^t u_s\circ dW_s^i-\frac{۱}{۲}\int_۰^t(\triangledown^iu)_sds,$$

انتگرال اسکروهود از u با توجه به dW_i نامیده می‌شود. اگر بعلاوه، $u\in\mathbb{L}_c^{۲,۱}$ باشد، خواهیم داشت:

$$E[\delta_t^i(u)^۲]=E\int_۰^t u_sds+E\int_۰^t\int_۰^t D_s^iu_rD_r^iu_s\,dsdr.$$