دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

آمار

عنوان:

شبه درستنمایی ساخته شده از چگالی های حاشیه‌ای

اساتید راهنما:

دکتر مهرناز محمدپور

دکترعلیرضا نعمت‌الهی

نگارش :

محمد جواد یاری پور

دی ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

سپاسگزاری

خدای را سپاس که اگر رحمت بی‌پایان او نبود این کار آغاز و انجامی نداشت. وظیفه خود می‌دانم از اساتید محترم راهنما سرکار خانم دکتر مهرناز محمدپور و جناب آقای دکتر علیرضا نعمت الهی به پاس رهنمودهای اندیشمندانه‌شان قدرانی کنم. همچنین لازم می‌دانم از اساتید گرامی جناب آقای دکتر اصغرزاده و جناب آقای دکتر فیاض که زحمت داوری این پایان نامه را برعهده داشتند کمال قدردانی را به عمل آورم. همچنین به پاس زحمات بی دریغ خانواده عزیزم در فراهم ساختن موجبات تحصیلم، به ویژه پدر و مادر مهربانم سپاسگزاری نموده و امیدوارم توفیق خدمتگذاری پیوسته عمر این دو عزیز را داشته باشم.

چکیـده

استنباط درستنمایی برای مدلهای چندمتغیره، زمانی که با همبستگی‌هایی با بعد بالا مواجه هستیم ممکن است دشوار و گاهی اوقات غیر ممکن باشد. بنابراین ممکن است استفاده از درستنمایی‌های تقریبی مانند شبه‌درستنمایی یا درستنمایی مرکب بر اساس بعد پایین‌تر مفید باشد.

خصوصیات مجانبی براوردگرهای ماکزیمم درستنمایی ذکر شده در چنین مواردی و در حالت خاصی که تنها یک تک بردار از مشاهدات مشاهده شده در آزمایش هستند، مورد مطالعه قرار گرفته است.

درستنمایی مرکب به دو کلاس تقسیم می‌شود که درستنمایی زوجی زیر کلاسی از این تقسیم بندی است. در این پایان نامه، خصوصیات مجانبی براوردگرهای ماکزیمم درستنمایی زوجی بررسی و با ارائه دو مثال به مقایسه کارائی برآوردگرهای حاصل از روش فوق با درستنمایی کامل می‌پردازیم. همچنین با وزن دادن به تابع درستنمایی زوجی نشان می‌دهیم که کارائی براوردگر افزایش می یابد. در پایان استنباط درستنمایی مرکب در مدلهای مارکوف مورد بررسی قرار گرفته است.

فهرست مندرجات

فهرست نمودارها ٦

۱ **مقدمه و تاریخچه** ۷

۱.۱ استنباط آماری بر اساس تابع درستنمایی ۷

۲.۱ مروری بر تحقیقات گذشته ۱۰

۳.۱ کاربردها ۱۱

۱.۳.۱ الگوریتم EM ۱۱

۲.۳.۱ انتگرالگیریهای با بعد پایین در مقابله با انتگرالهای پیچیده با بعد بالا ۱۱

۴.۱ اهداف ۱۲

۲ **درستنمایی مرکب** ۱۳

۱.۲ مقدمه ۱۳

۲.۲ بررسی روش درستنمایی کامل ۱۴
۱.۲.۲ مشکلات استفاده از روش درستنمایی کامل ۱۸

۳.۲ بررسی روش درستنمایی مرکب ۱۹
۱.۳.۲ براورد درستنمایی مرکب و اطلاع گودامب ۲۰
۲.۳.۲ براورد ماتریس اطلاع گودامب ۲۴
۳.۳.۲ کارائی نسبی ۲۵
۴.۳.۲ تابع درستنمایی زوجی ۲۶
۵.۳.۲ توابع درستنمایی زوجی وزنی ۳۳

۴.۲ بررسی خواص مجانبی براوردگر درستنمایی مرکب با افزایش بعد بردار مشاهدات ۳۶

۵.۲ معادلات درستنمایی مرکب برای پارامتر برداری ۴۰

۳ درستنمایی زوجی در زنجیرهای مارکوف ۴۸

۱.۳ مقدمه ۴۸

۲.۳ مقدمه‌ای بر براورد در زنجیرهای مارکوف ۴۹

۳.۳ روش درستنمایی ماکزیمم ۵۲

۴.۳ روش درستنمایی زوجی ۵۵

۵.۳ روش شبه درستنمایی یا درستنمایی شرطی مرکب ۵۸

۶.۳ مثالها ۶۱

کتاب‌نامه ۷۱

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۷۳

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی ۷۶

فهرست نمودارها

نمودار ۱.۲ کارائی نسبی مجانبی براوردگر درستنمایی مرکب برای بعدهای ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۰ در مدل نرمال متقارن ۳۴

نمودار ۲.۲ کارائی نسبی مجانبی براوردگر درستنمایی زوجی وزنی برای بعد $q = ۱۰$ در مدل نرمال متقارن ۳۷

نمودار ۱.۳ کارائی نسبی مجانبی براوردگر α برای روشهای درستنمایی مرکب در زنجیر مارکوف دو حالتی ٦٦

نمودار ۲.۳ کارائی نسبی مجانبی براوردگرهای شرطی مرکب و زوجی در مدل قدم تصادفی ۷۰

نمودار ۳.۳ کارائی نسبی مجانبی براوردگر درستنمایی حاشیه‌ای مرکب برای مرتبه‌های ۲, ۳, ۵, ۱۰ در مدل قدم تصادفی ۷۰

فصل ۱

مقدمه و تاریخچه

۱.۱ استنباط آماری بر اساس تابع درستنمایی

مسئله براوردیابی همواره مورد توجه محققان و پژوهشگران بوده است و روشهای مختلفی جهت براورد پارامترها وجود دارند که روشهای بیزی و درستنمایی بیشترین کاربرد را در استنباط مدلهای پارامتری و نیمه پارامتری دارند. روش درستنمایی بعنوان یکی از قدیمی ترین، رایج ترین و اساسی ترین روشها در نظریه استنباط آماری مورد توجه است. سهولت در محاسبات و خواص بهینه‌ی براوردگرهای حاصله، این روش را از دیگر روشها جدا می‌سازد.

روش درستنمایی در براورد پارامترها اولین بار در سال ۱۸۲۱ توسط گاوس [۱] بکار گرفته شد و پس از آن بصورت گسترده تری در سال ۱۹۲۵ توسط فیشر [۲] در انتقاد از روش

[۱] Guss

[۲] Fisher

براورد گشتاوری مطرح شد. مطالعات فیشر در مورد روش براورد درستنمایی منجر به ارائه خصوصیات مهم براوردگر درستنمایی ماکزیمم از طرف وی گردید. با وجود خواص بهینه، روش درستنمایی ماکزیمم در برخی اوقات و در بعضی مدلها به مشکل برخورد می‌کند. در بسیاری از استنباطهای آماری چند متغیره، معمولا با مدلهایی مواجه هستیم که دستیابی به تابع درستنمایی آنها به دلیل وابستگی بین مشاهدات، پیچیده و دشوار می باشد. که در این موارد با معکوس گیری از ماتریس هایی با مرتبه‌ی بالا یا با انتگرال گیری های مکرر و دشوار که چندان راحت نیستند مواجه می شویم. تا کنون پیشنهاداتی در برخورد با این قبیل مشکلات در مورد اصلاح تابع درستنمایی مربوطه توسط برخی از محققان ارائه شده است.

در سال ۱۹۷۴، بیسج [۳] نوعی از درستنمایی اصلاح شده را معرفی کرد. وی با حذف بعضی جملات که محاسبه تابع درستنمایی را دچار مشکل می کردند، نوعی درستنمایی به‌نام تابع شبه درستنمایی [۴] ابداع کرد که دیگر مشکلات درستنمایی کامل را نداشت. وی استنباط خود را روی مدلهای فضایی مطرح کرد.
هر چند این روش راه حل مناسبی برای برخورد با مشکلات ناشی از عدم محاسبه تابع درستنمایی کامل بود اما بی عیب نبود، چرا که حذف بعضی جملات ممکن بود اطلاعات زیادی در مورد پارامتر مورد نظر را حذف کند. بنابراین نمی توان چندان به کارائی براوردگر حاصله مطمئن بود.
اما درسال ۱۹۸۸، لیندسی [۵] نوع دیگری از درستنمایی اصلاح شده را معرفی کرد که نسبت به درستنمایی بیسج از نظر کارائی در سطح بالاتری قرار داشت. تابع درستنمایی معرفی شده توسط لیندسی درستنمایی مرکب [۶] لقب گرفت، که یک تابع درستنمایی خاص از درستنمایی بیسیج بود.

از آنجاکه در برخی موارد محاسبه چگالی توام بردار تصادفی مشکل است، تابع درستنمایی مرکب برخی مشکلات ناشی از بعد تابع چگالی بردار تصادفی را حل خواهد

[۳] Besag
[۴] Pseudolikelihood
[۵] Lindsay
[۶] Composite Likelihood

کرد. که این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود

$$cL(\underline{\theta};\underline{y}) = \prod_{i=1}^{n} f(\underline{y} \in A_i;\underline{\theta})^{\omega_i}.$$

که مقادیر ω_i برای $i = 1,\dots,m$، وزنهای مثبت مناسب می‌باشند و A_i ها مجموعه پیشامدهای اندازه‌پذیر می باشند.

لذا براوردگر درستنمایی مرکب از حل معادله امتیاز زیر بدست می آید

$$s(\theta;\underline{y}) = \frac{\partial}{\partial\theta} cl(\theta;\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} w_i s_i(\theta;\underline{y}) = 0,$$

که در آن

$$s_i(\theta;\underline{y}) = \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\underline{y} \in A_i;\theta).$$

براوردگردرستنمایی مرکب مانند براوردگر درستنمایی کامل دارای توزیع مجانبی نرمال است که در این حالت اطلاع گودامب[۷] جایگزین اطلاع فیشر شده و می توان ادعا کرد با برقراری شرایطی اطلاع فیشر برابر با اطلاع گودامب است، به طوری که اطلاع گودامب برابر است با

$$G(\theta) = H(\theta)J^{-1}(\theta)H(\theta),$$

که در آن

$$\begin{aligned} H(\theta) &= E(-\frac{\partial}{\partial\theta} s(\theta;\underline{Y})), \\ J(\theta) &= var(s(\theta;\underline{Y})). \end{aligned}$$

در ادامه ليندسی مطالعاتی در مورد کارائی براوردگرهای درستنمایی مرکب انجام داد و با وزن دادن به توابع درستنمایی مرکب کارائی براوردگرهای درستنمایی مرکب را بهبود بخشید. تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده که به اختصار به آنها اشاره می‌کنیم.

---

[۷] Godamb

۲.۱ مروری بر تحقیقات گذشته

در سال ۱۹۹۸ گیز، مولنبرگ و ریان [۸] شبه درستنمایی بیسج را با معادلات براوردیابی تعمیم یافته برای مدلهای نسبت بختهای حاشیه‌ای[۹] مورد مقایسه قرار دادند.

در سال ۲۰۰۰ کوک و نات[۱۰] با مدل رگرسیون لجستیک برای ارتباط بین دو مشاهده که در حقیقت از یک خوشه آمده اند، تابع درستنمایی زوجی[۱۱] را از ترکیب تمام جفت های درون خوشه ها تشکیل و سپس با ارائه وزنهای متناسب با حجم خوشه ها کارائی براوردگرهای بدست آمده را افزایش دادند.

در سال ۲۰۰۴ کاکس ورید[۱۲] ترکیب خطی از توابع درستنمایی زوجی و تابع درستنمایی بدست آمده از توابع چگالی حاشیه ای را بکار بردند و ویژگیهای مجانبی براوردگر نقطه‌ای بدست آمده را زمانیکه تعداد مشاهدات ثابت و بعد فضا افزایش می یابد، مورد بررسی قرار دادند.

در سال ۲۰۰۵ ژائو و جوی[۱۳] به مطالعه براوردگر درستنمایی مرکب بر روی داده های چند متغیره پرداختند.

در سال ۲۰۰۸ جرت و ورین[۱۴] برخی خصوصیات براوردگرهای درستنمایی حاشیه‌ای مرکب و شرطی مرکب را در کلاس ساده ای از مدلها مورد مطالعه قرا دادند. آنها مطالعات خود را به مدلهای زنجیر مارکوف معطوف کردند و با انجام تحلیلهای نظری و نتایج محاسباتی یک مدرک مهم در راستای اینکه استنباط مبتنی بر درستنمایی حاشیه‌ای مرکب، کارا و نسبت به درستنمایی شرطی مرکب برتر است را ارائه دادند.

ا در سال ۲۰۰۵ ورین و ویدونی[15] تعریف جامعی را برای توابع درستنمایی مرکب ارائه کردند و به تعابیر مختلفی که در مورد درستنمایی مرکب لیندسی و شبه درستنمایی

[۸] Geys,Molenberghs and Ryan
[۹] Marginal odds ratio models
[۱۰] Kuk and Nott
[۱۱] Pairwise likelihood
[۱۲] Cox and Reid
[۱۳] Zhao and Joe
[۱۴] Hjort and Varin
[15] Varin and Vidoni

بیسج رایج بود پایان دادند. آنها توابع درستنمایی مرکب را در دو کلاس طبقه بندی کردند، کلاس شرطی و حاشیه‌ای. کلاس شرطی همان درستنمایی بیسج است و کلاس حاشیه‌ای خود به چهار زیر کلاس طبقه‌بندی می‌شود. درستنمایی لیندسی در این کلاس قرار می‌گیرد.

۳.۱ کاربردها

۱.۳.۱ الگوریتم EM

روش الگوریتم EM بعنوان یک روش در تعیین براوردهای درستنمایی ماکزیمم در برخی موقعیتها بکار می‌رود. مثلا در داده‌های گمشده و داده‌های سانسور شده یا مدلهای آمیخته این الگوریتم قابلیت فراوانی دارد. اما برای مدلهایی که در محاسبه امید ریاضی به دلیل انتگرالگیریهای مکرر دچار مشکل می‌شویم بکارگیری از یک الگوریتم EM استاندارد غیر عملی است. اما با تلفیقی از این الگوریتم و روشهای درستنمایی مرکب می‌توان به سادگی از این مشکلات عبور کرد.
برای مثال الگوریتم EM زوجی نوعی از این الگوریتم می باشد.

۲.۳.۱ انتگرالگیریهای با بعد پایین در مقابله با انتگرالهای پیچیده با بعد بالا

در بسیاری از کاربردها انگیزه استفاده از استنباط درستنمایی مرکب جایگزین کردن انتگرالهای با بعد بالا در مدل درستنمایی کامل با انتگرالهای با بعد پایین می‌باشد. در برخورد با انتگرالهای چندگانه و دشوار نوعا نیازمند روشهای شبیه سازی مونت کارلو هستیم، این روشها دارای مشکلات بالقوه‌ای می‌باشند، ابتدا اینکه این روشها زمانبر

هستند، از طرفی برنامه‌های شبیه‌سازی دارای خطای قابل توجه‌ای می‌باشند و همچنین نوعی دوباره کاری از نتایج است. هرچند از مزیت پایداری استنباط مبتنی بر روشهای شبیه سازی و نتایج مجانبی آن نسبت به محاسبه مشکل اطلاع گودامب و یا اصلاح توزیع خی‌دو در آزمون نسبت درستنمایی نمی‌توان گذشت.

۴.۱ اهداف

در این رساله ضمن مرور مختصر بر تابع درستنمایی کامل با ارائه مثالی به ایراد از این نوع تابع درستنمایی در موارد خواص اشاره می‌کنیم و در ادامه در برخورد با این قبیل مشکلات، تابع درستنمایی مرکب را تعریف می کنیم و به بررسی تعاریف و خواص مجانبی آن می‌پردازیم. سپس تابع درستنمایی زوجی را بعنوان زیر شاخه‌ای از درستنمایی مرکب معرفی و با ارائه چند مثال کارائی آن را با براوردگردرستنمایی کامل مقایسه می‌کنیم و با وزن‌دار کردن تابع درستنمایی زوجی افت کارائی را کاهش می‌دهیم، این نتایج بر اساس مقاله درستنمایی مرکب ورین (۲۰۰۸) و شبه درستنمایی کاکس (۲۰۰۴) ارائه شده است. در ادامه با استفاده از نتایج مطالعاتی جرت و ورین (۲۰۰۸) در مدلهای مارکوف خصوصیات مجانبی براوردگرهای حاصله را برای دو مدل خاص از زنجیرهای مارکوف مورد بررسی قرار داده و آنها را با براوردگرهای شبه درستنمایی و درستنمایی کامل مقایسه می‌کنیم.

فصل ۲

درستنمایی مرکب

۱.۲ مقدمه

انگیزه استفاده از روشهای درستنمایی مرکب معمولا به دلیل پیچیدگی و سنگینی محاسبات در مدلهایی است که محاسبه توزیع توام به دلیل بعد بالا امکانپذیر نباشد. اما عوامل دیگری نیز می‌تواند ما را به استفاده بیشتر از روشهای درستنمایی مرکب تشویق کنند، که از این میان می‌توان به خصوصیات بهینه براوردگرهای حاصل و توانمندی آنها اشاره کرد. در بررسی روش درستنمایی مرکب در براورد پارامترها، بیان و مرور چند مفهوم لازم می‌باشد. در ابتدا ضمن معرفی روش درستنمایی کامل در براورد پارامترها به بیان چند تعریف می‌پردازیم.

۲.۲ بررسی روش درستنمایی کامل

فرض کنید Y یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f_Y(y;\theta)$ و $\theta \in \Theta$ پارامتر مجهول باشد، تابع درستنمایی برای پارامتر θ بر اساس تک مشاهده y به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L(\theta) = L(y;\theta) = f_Y(y;\theta).$$

لگاریتم تابع درستنمایی را با $\ell(\theta)$ نشان داده وداریم

$$\ell(\theta) = \log L(y;\theta).$$

براورد درستنمایی ماکزیمم $\hat{\theta}$، مقادیری از θ هستند که لگاریتم تابع درستنمایی را ماکزیمم کنند.

در صورتی که $\underline{\theta}$ یک بردار p بعدی باشد معادله امتیاز، برداری با بعد p می‌باشد.
اطلاع مشاهده شده برای بردار پارامتر $\underline{\theta}$ را با $\underline{J}(\underline{\theta})$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\underline{J}(\underline{\theta}) = \frac{-\partial^{۲} \ell(\underline{\theta})}{\partial\underline{\theta}\partial\underline{\theta}^T}.$$

امید ریاضی عبارت $\underline{J}(\underline{\theta})$ را اطلاع فیشر نامیده و به صورت زیر می‌شود

$$\underline{I}(\underline{\theta}) = E\{\underline{J}(\underline{\theta})\}.$$

در ادامه به بررسی خواص مجانبی براوردگر درستنمایی ماکزیمم کامل می‌پردازیم اما قبل از آن نیاز به تعریف زیر ضروری می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۲: مدل آماری $f(y,\theta)$ یک مدل منظم است اگر شرایط زیر برقرار باشد

۱) $\theta \in \Theta$

۲) تابع چگالی مورد نظر برای دو مقدار مختلف θ متفاوت باشد. (شرط تشخیص پذیری)

۳) اطلاع فیشر برای یک تک مشاهده مثبت و متناهی باشد.

۴) برای یک زیر بازه $T \subseteq \Theta$ که θ متعلق به آن باشد، تابع $M(y,\theta)$ وجود داشته باشد به طوری که M یک تابع انتگرال‌پذیر باشد و

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial^{3} \ln f(y,\theta)}{\partial\theta^{3}} \right| < M(y,\theta) & \theta \in T \\ \\ E\{M(Y,\theta)\} < M_{0} < \infty \end{cases}$$

که M_{0} یک ثابت در نظر گرفته می‌شود.

۵) تابع $\partial \log f(y;\theta)/\partial\theta$ یک تابع قریب به یقین $(a.s.)$[1] نزولی در θ باشد.

٦) برای $\theta \in T$ داریم

$$\frac{\partial^{r}}{\partial\theta^{r}} \int f(y;\theta)dy = \int \frac{\partial^{r}}{\partial\theta^{r}} f(y;\theta)dy$$

قضیه ۲.۲.۲ : فرض کنید $Y_{1},\dots,Y_{n}$، یک نمونه تصادفی n تایی با تابع چگالی $f(y;\theta)$ و $\theta \in \Theta$ و شرایط نظم برقرار باشد. آنگاه

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, I^{-1}(\theta)).$$

اثبات. لگاریتم تابع درستنمایی بر اساس n مشاهده به صورت زیر می‌باشد

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(y_{i};\theta).$$

با توجه به اینکه $\hat{\theta}$ براوردگر درستنمایی ماکزیمم می‌باشد لذا

$$U(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ell'(y_{i};\hat{\theta}) = 0,$$

[1] Almost Surly

که

$$\ell'(y_i;\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(y_i;\theta).$$

بااستفاده از بسط تیلور $U(\hat\theta)$ تا دو جمله حول پارامتر θ داریم

$$\circ=\sum_i \ell'(Y_i;\theta)+(\hat\theta-\theta)\sum_i \ell''(Y_i;\theta),$$

در اینصورت

$$\sqrt{n}(\hat\theta-\theta)=\frac{-n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\ell'(Y_i;\theta)}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\ell''(Y_i;\theta)}. \qquad (۱.۲.۲)$$

با توجه به شرایط نظم، امید ریاضی تابع امتیاز به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E\{U(\theta)\}=\sum_{i=1}^{n}E\{\ell'(Y_i;\theta)\}=n\int\frac{\partial\log f(y;\theta)}{\partial\theta}f(y;\theta)\,dy=\circ\ .$$

بنابراین با توجه به رابطه بالا

$$\begin{aligned}\circ &= \frac{\partial}{\partial\theta}\int\frac{\partial\log f(y;\theta)}{\partial\theta}f(y;\theta)\,dy\\ &= \int\Big(\frac{\partial^2\log f(y;\theta)}{\partial\theta^2}f(y;\theta)+\frac{\partial\log f(y;\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial f(y;\theta)}{\partial\theta}\Big)dy\ , \qquad (۲.۲.۲)\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۲.۲.۲) می‌توان واریانس تابع امتیاز را به صورت زیر محاسبه کرد

$$var(U(\theta))=I(\theta).$$

بنابراین با توجه به قضیه حدمرکزی صورت کسر رابطه (۱.۲.۲) دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانسی برابر با اطلاع فیشر می‌باشد. از آنجا که

$$E_\theta(\ell''(Y;\theta))=-I(\theta),$$

لذا برای مخرج کسر رابطه (۱.۲.۲) داریم

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\ell''(Y_i,\theta)}{n}\to_p -I(\theta),$$

بنابراین با استفاده از قضیه اسلاتسکی رابطه زیر برقرار است

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, I^{-1}(\theta)).$$

تعریف ۲.۲.۲ : فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n \overset{iid}{\sim} f(y;\theta)$ و $\hat{\theta}$ بعنوان جواب معادله $g(Y;\theta) = \sum_{i=1}^{n} g(y_i;\theta) = 0$ باشد. در صورتی که رابطه زیر برقرار باشد g را یک تابع براورد نااریب می‌نامیم

$$E(g(Y;\theta)) = n \int g(y;\theta) f(y;\theta)\, dy = 0.$$

مثال ۱۲.۲ : فرض کنید متغیرهای $Y_{ij} \overset{ind}{\sim} N(\mu_i;\sigma^2)$ برای $i = 1,\ldots,n$ و $j = 1,\ldots,k$ باشند. براوردهای درستنمایی ماکزیمم برای پارامترهای $\mu_1,\ldots,\mu_n,\sigma^2$ را محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $\hat{\sigma}^2$ وقتی $n \to \infty$ و k ثابت باشد ناسازگار است.
لگاریتم تابع درستنمایی بر اساس مشاهدات y_{ij} به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
\ell(\mu_1,\ldots,\mu_n,\sigma^2) &\propto -1/2 \sum_{i=1}^{n} \{k \log \sigma^2 + 1/\sigma^2 \sum_{j=1}^{k} (y_{ij} - \mu_i)^2\} \\
&\propto -1/2 \sum_{i=1}^{n} \{k \log \sigma^2 + 1/\sigma^2 \sum_{j=1}^{k} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \\
&\quad + k/\sigma^2 (\bar{y}_{i.} - \mu_i)^2\}.
\end{aligned}$$

با مشتق گیری از لگاریتم تابع درستنمایی و حل آن بر حسب μ_i و σ^2 داریم

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_i &= \bar{y}_{i.} = k^{-1} \sum_{j=1}^{k} y_{ij}, \\
\hat{\sigma}^2 &= (nk)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (y_{ij} - \bar{y}_{i.}^2).
\end{aligned}$$

از طرفی چون $\frac{\sum_{j=1}^{k}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k-1}$ پس می‌توان امید و واریانس را به صورت زیر نشان داد

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \frac{k-1}{k},$$

$$var(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4(k-1)}{nk^2},$$

با توجه به روابط بالا، در نمونه‌هایی با بعد کم، وقتی حجم نمونه افزایش می‌یابد $\hat{\sigma}^2$ یک برآورد اریب و ناسازگار برای σ^2 خواهد بود.

۱.۲.۲ مشکلات استفاده از روش درستنمایی کامل

در مثال بالا نشان دادیم براورد درستنمایی کامل می‌تواند منجر به خصوصیات نامطلوب یک براوردگر حتی در یک مدل مناسب شود. در بعضی موارد حتی نمی‌توان یک تابع درستنمایی کامل برای یک مدل پارامتری نوشت. در مدلهای چند متغیره دستیابی به تابع درستنمایی به دلیل وابستگی بین مشاهدات، پیچیده و دشوار می‌باشد که در این موارد با معکوس گیری از ماتریسهایی با مرتبه بالا یا انتگرالگیری‌های مکرر و دشوار که چندان راحت نیست مواجه می‌شویم. در این رابطه اخیرا مفهوم جدیدی از توابع شبه‌درستنمایی به‌نام درستنمایی مرکب ارائه شده است که استنباط بر اساس آنها ساده‌تر می‌باشد.
در بخش بعد با معرفی این روش و با ارائه چند مثال، کارائی نسبی مجانبی براوردگرهای حاصل از اینگونه استنباطها را با استنباطهای مبتنی بر تابع درستنمایی کامل مورد بررسی قرار دهیم.