بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

عنوان :

تعمیم قضیه‌ی ون‌کمپن برای فضاهای همبند ساده

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

استاد راهنما :

آقای دکتر بهروز مشایخی فرد

استاد مشاور :

خانم دکتر فاطمه هلن قانع

نگارنده :

حمید ترابی اردکانی

شهریورماه ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

پیشگفتار

توپولوژی جبری علمی میان‌رشته‌ای است. و از مهم‌ترین کاربرد آن تبدیل مساله‌های توپولوژی به مساله‌های جبری و بالعکس است. از جمله ابزارهای مهم در توپولوژی جبری، گروه بنیادین فضاهای توپولوژیکی است. لذا تلاش‌های انجام شده در پی یافتن گروه بنیادین فضاها نقش گسترده‌ای بر پیشرفت این علم دارد. از جمله ابزارهایی که در این مسیر به محققان کمک می‌کند، قضایای ون‌کمپن[۱] است. این قضایا **گروه بنیادین**[۲] یک فضا را بر حسب گروه بنیادین برخی از زیرفضاهای آن بیان می‌کند.

از دیرباز وجود **خاصیت نقطه‌ی ثابت**[۳] برای فضاهای توپولوژیک، برای ریاضی‌دانان مهم بوده است. از این رو وجود یا عدم وجود این خاصیت برای فضاهای مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. لذا وجود یک ارتباط میان فضاهای **همبند ساده**[۴] و فضاهایی که دارای خاصیت نقطه‌ی ثابت هستند به ما کمک می‌کند تا برای برخی از فضاهایی که دارای خاصیت نقطه‌ی ثابت می‌باشند، خاصیت همبندی ساده را اثبات کنیم و بالعکس.

از دیگر ابزارهای مهم در توپولوژی جبری، گروه‌های **همولوژی تکین**[۵] فضاهای توپولوژیک

---

[۱] Vankampen

[۲] Fundamental group

[۳] Fixed point property

[۴] Simple connected

[۵] Singular homology

هستند. قضیه‌ی هلی[٦]، نتیجه‌ای مشابه قضیه‌ی ون‌کمپن را برای فضاهای **حجره‌ای تکین**[٧] در پی دارد.

در این پایان‌نامه ابتدا قصد داریم صورت‌هایی مختلف از قضایای ون‌کمپن را بیان و اثبات کنیم. و به بیان ابزارهای مفید که ایده‌ی اثبات این گونه قضایا را القا می‌کند، می‌پردازیم. که از جمله‌ی آنان قضایای مربوط به ارتباط خاصیت همبند ساده با منحنی‌های جردن یک فضا یا خاصیت نقطه‌ی ثابت است.

در ادامه به بیان حدس‌هایی که در این زمینه مطرح شده است و پاسخ‌های داده شده به آن‌ها می‌پردازیم.

بر این اساس مطالب این پایان‌نامه در چهار فصل تدوین شده است.

در فصل اول مفاهیم اولیه و پیش‌نیازهایی که در رابطه با هدف اصلی پایان‌نامه است، ارائه می‌گردد.

در فصل دوم به بیان و اثبات صورت‌هایی از قضیه‌ی ون‌کمپن که توسط کریموف[٨] و ریپووز[٩] در مقاله [٦] بیان شده است، می‌پردازیم.

در فصل سوم قضیه‌ی هلی را که شبیه به قضیه‌ی ون‌کمپن است، بیان می‌کنیم.

و نهایتاً در فصل چهارم حدس‌هایی را که توسط محققان در رابطه با نتایج قضایای ون‌کمپن و هلی با فرض‌هایی غیر از فرض‌های قضیه‌ی ون‌کمپن بیان شده است، می‌آوریم و درستی یا نادرستی برخی از آن‌ها را اثبات می‌کنیم.

---

[٦] Helly

[٧] Singular cell

[٨] U. H. Karimov

[٩] D. Repovs

متذکر می‌شویم که مراجع اصلی این پایان‌نامه سه مقاله‌ی زیر می‌باشد.

U. H. Karimov and D. Repovs, On the union of simply conneted planar sets, *Topology and its Applications,* **122** (2002) 281-286.

E. D. Tymchatyn and Vesko Valov On Intersection of Simply Connected Sets in the Plane, *Glasnik Matematicki,* **41** (2006), 159-163.

U. H. Karimov, D. Repovs and M. Zeljko, On union and intersections of simply connected planar sets, *Monatsh. Math.* **145** (2005) 239-245.

فصل ۱

پیش‌نیازها

مقدمه

در این فصل تعاریف، گزاره‌ها، قضایا و نتایجی را که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم، بیان خواهیم کرد. بیشتر این مطالب از جبر و توپولوژی پایه، دانسته فرض می‌شود، بجز تعاریف و قضایای مهم و پرکاربرد. در ضمن برهان برخی از قضایا و نتایج که ساختاری است و اثبات کوتاهی دارد را بیان می‌کنیم و بقیه را به منابع، ارجاع خواهیم داد. یادآوری می‌کنیم که در این پایان‌نامه تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ را با توپولوژی عمومی آن و متریک اقلیدسی در نظر می‌گیریم.

۱.۱ مفاهیم توپولوژیکی

جداسازها

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه از فضای توپولوژیک X باشد. گوییم فضای X بین دو مجموعه‌ی A و B ناهمبند است هرگاه دو زیرمجموعه از X مانند M و N موجود باشند به طوری که

$$X = M \cup N,\ A \subseteq M,\ B \subseteq N,\ (\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \varnothing$$

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه از فضای توپولوژیک X باشد. گوییم X بین A و B همبند است هرگاه X بین A و B ناهمبند نباشد.

مثال ۳.۱.۱ هر فضای همبند بین هر دو عضوش همبند است.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم a و b دو عنصر از فضای توپولوژیک همبند X باشد به طوری که X بین a و b ناهمبند است. لذا دو زیرمجموعه از X مانند M و N موجودند به طوری که

$$X = M \cup N,\ \{a\} \subseteq M,\ \{b\} \subseteq N,\ (\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \varnothing$$

و این تناقض با فرض همبند بودن X است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است. ■

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه از فضای توپولوژیک X باشد. در این صورت دو شرط زیر معادل است.

i) X بین A و B ناهمبند است.

ii) دو زیرمجموعه‌ی باز از X مانند G_1 و G_2 چنان موجودند که

$$X = G_1 \cup G_2,\ A \subseteq G_1,\ B \subseteq G_2,\ G_1 \cap G_2 = \varnothing$$

برهان.

(i)⇒(ii). فرض کنیم X بین A و B ناهمبند است. در این صورت دو زیرمجموعه از X مانند M و N چنان موجود است که

$$X = M \cup N,\ A \subseteq M,\ B \subseteq N,\ (\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \varnothing$$

قرار دهیم $G_1 = (\overline{N})^c$ و $G_2 = (\overline{M})^c$. در این صورت دو زیرمجموعه‌ی G_1 و G_2 در X باز است. داریم

$$\begin{cases} M \cap \overline{N} = \varnothing \\ A \subseteq M \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A \subseteq M \subseteq (\overline{N})^c = G_1,$$

$$\begin{cases} \overline{M} \cap N = \varnothing \\ B \subseteq N \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B \subseteq N \subseteq (\overline{M})^c = G_2$$

که نتیجه می‌دهد

$$A \subseteq G_1, \quad B \subseteq G_2$$

از طرفی

$$X = M \cup N = \overline{M} \cup \overline{N} \quad \Rightarrow \quad \varnothing = (\overline{M} \cup \overline{N})^c = G_1 \cap G_2$$

و این اثبات گزاره‌ی (ii) را به پایان می‌رساند.

(ii)⇒(i). فرض کنیم گزاره‌ی (ii) برقرار باشد. برای اثبات گزاره‌ی (i) کافی است نشان دهیم

$$(\overline{G_1} \cap G_2) \cup (G_1 \cap \overline{G_2}) = \varnothing$$

چون $G_۱ \cap G_۲$ برابر با مجموعه‌ی تهی است، لذا $G_۱$ مشمول در $G_۲^c$ است. اما $G_۲$ باز بوده و بنابراین

$$\overline{G_۱} \subseteq \overline{G_۲^c} = (G_۲^\circ)^c = G_۲^c$$

بنابراین $\overline{G_۱} \cap G_۲ = \varnothing$. به طور مشابه $G_۱ \cap \overline{G_۲} = \varnothing$ و گزاره‌ی (ii) برقرار است. ∎

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $A, B, C \subseteq X$. گوییم C فضای X را بین A و B **جدا می‌سازد**[۱] (C **جداساز**[۲] بین A و B است) هرگاه دو زیرمجموعه از X مانند M و N چنان موجود باشند که

$$X \setminus C = N \cup M,\ (\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \varnothing,\ A \subseteq M,\ B \subseteq N$$

مثال ۶.۱.۱ فرض کنیم E یک فضای توپولوژیک باشد. $C \subseteq X$ را چنان در نظر می گیریم که $X \setminus C$ ناهمبند بوده و $G_۱$ و $G_۲$ یک جداسازی برای فضای $X \setminus C$ باشد. در این صورت اگر قرار دهیم $M = G_۱$ و $N = G_۲$، آن‌گاه

$$X \setminus C = N \cup M,\ (\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \varnothing,\ G_۱ \subseteq M,\ G_۲ \subseteq N$$

پس C فضای X را بین $G_۱$ و $G_۲$ جدا می‌سازد.

با استفاده از تعریف ۵.۱.۱ مشاهده می‌شود که اگر یک زیرمجموعه مانند C از فضای توپولوژیک X یک جداساز بین دو زیرمجموعه‌ی A و B باشد و

$$A' \subseteq A, \quad B' \subset B$$

آن‌گاه C یک جداساز بین A' و B' است.

---

[۱] Separate
[۲] Separator

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^۲$ و $A, C \subseteq X$. گوییم C فضای X را بین A و ∞ جدا می‌سازد (A را از ∞ جدا می‌سازد) هرگاه عدد حقیقی و مثبت r چنان موجود باشد که C فضای $\mathbb{R}^۲$ را بین A و $(B_r(\circ))^c$ جدا سازد.

مثال ۸.۱.۱ فرض کنیم D یک مجموعه‌ی کراندار از $\mathbb{R}^۲$ باشد. در این صورت $\partial(D)$ در فضای $\mathbb{R}^۲$، مجموعه‌ی D° را از ∞ جدا می‌سازد.

برهان. با توجه به تعریف مرز یک مجموعه داریم

$$\partial(D) = \overline{D} \cap \overline{D^c} \quad \Rightarrow \quad (\partial(D))^c = (\overline{D})^c \cup (\overline{D^c})^c$$

چون D مجموعه‌ای کراندار است، لذا عدد حقیقی r چنان موجود است که D مشمول در $B_r(\circ)$ است. اگر قرار دهیم $A = D^\circ$، $B = (B_{r+۱}(\circ))^c$، $M = (\overline{D^c})^c$ و $N = (\overline{D})^c$، آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^۲ \setminus \partial(D) &= (\overline{D^c})^c \cup (\overline{D})^c = M \cup N \\ A = D^\circ &= ((D^c)^c)^\circ = (\overline{(D^c)})^c = M \end{aligned} \qquad (۱)$$

از طرفی داریم

$$D \subseteq B_r(\circ) \quad \Rightarrow \quad \overline{D} \subseteq \overline{B_r(\circ)} \subseteq B_{r+۱}(\circ).$$

بنابراین

$$B = (B_{r+۱}(\circ))^c \subseteq (\overline{B_r(\circ)})^c \subseteq (\overline{D})^c = N$$

از طرفی

$$\overline{M} \cap N \subseteq M \cap N = (\overline{D^c})^c \cap (\overline{D})^c = D^\circ \cap (D^c)^\circ \subseteq D \cap D^c = \varnothing$$

به طور مشابه $M \cap \overline{N}$ برابر با مجموعه‌ی تهی است. بنابراین حکم برقرار است. ■

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و C یک زیرمجموعه از X باشد. در این صورت گوییم C یک جداساز برای فضای X است (C فضای X را جدا می‌سازد) هرگاه دو مجموعه‌ی بسته از X، مانند A و B چنان موجود باشند که X بین A و B همبند باشد ولی $X \setminus C$ بین A و B ناهمبند باشد.

در مثال ۳.۱.۱ نشان دادیم هر فضای توپولوژیک همبند مانند X بین هر دو عضوش همبند است. بنابراین در هر فضای توپولوژیک هاسدورف همبند مانند X، یک زیرمجموعه از X مانند C برای فضای X جداساز است اگر و فقط اگر C^c ناهمبند باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و a و b دو عنصر دلخواه از X باشند. یک زیرمجموعه از X مانند C را برای دو نقطه‌ی a و b **جداساز تحویل‌ناپذیر**[۳] گوییم، هرگاه C یک جداساز بین a و b باشد و هر زیرمجموعه‌ی محض از C جداساز بین a و b نباشد.

مثال ۱۱.۱.۱ به عنوان مثالی از تعریف ۱۰.۱.۱ در نظر بگیریم

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲;\ x^۲ + y^۲ = ۱\} \\ A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲;\ x^۲ + y^۲ < ۱\} \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲;\ x^۲ + y^۲ > ۱\} \end{aligned} \qquad (۲)$$

اگر a عضوی دلخواه از A و همچنین b عضوی دلخواه از B باشد، آن‌گاه C برای دو نقطه‌ی a و b یک جداساز تحویل‌ناپذیر است.

[۳] Irreducible separator

همبندی موضعی

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم x عنصری از فضای توپولوژیک X است. در این صورت X را در x **همبند موضعی**[۴] گوییم، هرگاه برای هر همسایگی U از x، یک همسایگی همبند از X مانند V وجود داشته باشد به طوری که

$$V \subseteq U$$

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر فضای توپولوژیک X، در هر نقطه‌اش همبند موضعی باشد، آن‌گاه X را موضعاً همبند گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم x عنصری از فضای توپولوژیک X است. در این صورت X را در x **همبند مسیری موضعی**[۵] گوییم، هرگاه برای هر همسایگی U از x، یک همسایگی همبند مسیری از x مانند V وجود داشته باشد به طوری که

$$V \subseteq U$$

تعریف ۱۵.۱.۱ فضای توپولوژیک X را همبند مسیری موضعی گوییم، هر گاه X در هر نقطه‌اش همبند مسیری موضعی باشد.

مثال ۱۶.۱.۱ فرض کنیم

$$A = \{\frac{۱}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\},$$

[۴] Locally connected

[۵] Locally path connected

$$B = A \times [۰, ۱].$$

در این صورت B همبند موضعی نیست زیرا $B \cap (B_{\frac{۱}{۳}}((۰, ۱)))$ یک همسایگی از $(۰, ۱)$ است به طوری که شامل هیچ همسایگی همبند موضعی از $(۰, ۱)$ نیست. به طور مشابه B همبند مسیری موضعی نیست.

قضیه ۱۷.۱.۱ فضای توپولوژیک X همبند موضعی است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه‌ی باز U از X، هر یک از مؤلفه‌های همبندی U در X باز باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم فضای X همبند موضعی و U یک مجموعه‌ی باز از X و C یک مؤلفه‌ی همبندی از U باشد. در این صورت نشان می‌دهیم C باز است. فرض کنیم x عضوی دلخواه از C باشد. چون X همبند موضعی و U یک همسایگی از x است، پس یک همسایگی همبند از x مانند V موجود است به طوری که

$$V \subseteq U$$

اما چون $V \cap C$ ناتهی است و C مؤلفه‌های همبندی از U و V همبند است، پس $V \subseteq C$ بنابراین C باز است.

بالعکس، فرض کنیم برای هر مجموعه باز U از X، مؤلفه‌های همبندی U در X باز باشد. در این صورت اگر x عضوی دلخواه از X و U همسایگی از x باشد، آن‌گاه C را مؤلفه‌ی همبندی از U می‌گیریم که شامل x است. بنابر فرض C در X باز است. لذا C یک همسایگی همبند از x است که مشمول در U است و این حکم را اثبات می‌کند. ■

با استدلالی مشابه داریم

فضای توپولوژیک X همبند مسیری موضعی است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه‌ی باز U از X، هر یک از مؤلفه‌های همبندی مسیری U در X باز باشد.

قضیه ۱۸.۱.۱ اگر فضای توپولوژیک X همبند مسیری موضعی باشد مؤلفه‌های همبندی و همبندی مسیری X بر هم منطبق می‌باشند.

برهان. فرض کنیم C یک مؤلفه‌ی همبندی از X و برای هر عضو از C مانند x، U_x مؤلفه‌ی همبندی مسیری X باشد که شامل x است. چون U_x همبند مسیری است پس همبند است. از طرفی چون C مؤلفه‌ی همبندی است و

$$\forall x \in C \quad U_x \cap C \neq \varnothing$$

پس

$$\forall x \in C \quad U_x \subseteq C$$

لذا

$$C = \bigcup_{x \in C} U_x$$

حال چون X همبند مسیری موضعی است لذا $\{U_x | x \in C\}$ یک پوشش باز برای C می‌باشند اما چون C همبند است و مؤلفه‌های همبند مسیری دو به دو مجزا می‌باشند، پس مجموعه‌ی $\{U_x | x \in C\}$ دقیقاً یک عضو دارد. لذا

$$\forall x \in C \quad C = U_x$$

اما U_x همبند مسیری است. لذا C همبند مسیری و در نتیجه C زیرمجموعه‌ی یک مؤلفه‌ی همبند مسیری از X است. از طرفی هر مؤلفه‌ی همبند مسیری همبند است و لذا زیرمجموعه‌ی یک مؤلفه‌ی همبند از X است. بنابراین حکم برقرار است. ■

بعد توپولوژیک

در این قسمت به بیان بعد توپولوژیکی یک فضای توپولوژیک می‌پردازیم.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{F}=\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیک X باشد. در این صورت گوییم $\mathcal{F}$ دارای **مرتبه**[۶]ی $m+1$ است هرگاه $m+1$ عضو متمایز از I مانند α_1، α_2، ...و α_{m+1} چنان موجود باشند که

$$\bigcap_{i=1}^{m+1} X_{\alpha_i}\neq\varnothing$$

همچنین برای هر $m+2$ عنصر متمایز از I مانند α_1، α_2، ...و α_{m+1} داشته باشیم

$$\bigcap_{i=1}^{m+2} X_{\alpha_i}=\varnothing$$

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{F}=\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ و $\mathcal{T}=\{Y_\beta\}_{\beta\in J}$ دو خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیک X باشد. در این صورت گوییم $\mathcal{T}$ **تظریفی**[۷] از $\mathcal{F}$ است هرگاه

$$\forall\beta\in J\ \exists\alpha\in I\quad \text{s.t.}\quad Y_\beta\subseteq X_\alpha$$

تعریف ۲۱.۱.۱ گوییم فضای توپولوژیک X دارای **بعد متناهی**[۸] است هرگاه عدد صحیحی مانند m وجود داشته باشد به طوری که برای هر پوشش باز از X، مانند $\mathcal{F}=\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$، پوشش بازی برای X مانند $\mathcal{T}=\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ موجود باشد به طوری که تظریفی از $\mathcal{F}$ و مرتبه‌ی آن حداکثر $m+1$ باشد.

---

[۶] Order

[۷] Refinement

[۸] Finite dimension

تعریف ۲۲.۱.۱ عدد صحیح نامنفی m را **بعد توپولوژیکی**[۹] فضای X گوییم هرگاه m کوچکترین عدد صحیحی باشد که برای هر پوشش باز از X، مانند $\mathcal{F}$، پوشش بازی برای X مانند $\mathcal{T}$ چنان موجود باشد که تظریفی از $\mathcal{F}$، و با حداکثر مرتبه‌ی $m+1$ باشد.
بعد توپولوژیکی فضای X را با نماد $\dim X$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲۳.۱.۱

i) بعد توپولوژیکی فضاهای تک‌نقطه‌ای، ۰ است.

ii) بعد توپولوژیکی بازه‌ی $[a,b]$، ۱ است.

iii) بعد توپولوژیکی دیسک D^2، ۲ است.

قضیه ۲۴.۱.۱ اگر X دارای بعد متناهی و Y زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از آن باشد، آن‌گاه Y نیز دارای بعد متناهی است. همچنین

$$\dim Y \leq \dim X$$

برهان. فرض کنیم بعد فضای X برابر با m است. نشان می‌دهیم برای هر پوشش باز برای Y مانند $\mathcal{F}$ یک تظریف مانند $\mathcal{T}$ وجود دارد که $\mathcal{T}$ پوششی باز برای Y و حداکثر از مرتبه‌ی $m+1$ است. لذا بنا به تعریف بعد توپولوژیک داریم

$$\dim Y \leq m = \dim X$$

[۹] Topological dimension

فرض کنیم $\mathcal{F} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پوشش باز برای Y است. در این صورت برای هر عنصر دلخواه از I مانند α، یک مجموعه‌ی باز در X مانند G_α چنان موجود است که

$$G_\alpha \cap Y = X_\alpha$$

Y بسته است. لذا $X \setminus Y$ در X باز است. بنابراین اعضای خانواده‌ی $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ به همراه $X \setminus Y$ تشکیل یک پوشش باز برای X می‌دهند. حال چون بعد توپولوژیک X، m است، پس پوشش مذکور دارای یک تظریف مانند $\mathcal{T} = \{Y_\beta\}_{\beta \in J}$ است به طوری که $\mathcal{T}$ یک پوشش باز برای X و حداکثر از مرتبه‌ی $m + 1$ است. بنابراین

$$\{Y_\beta \cap Y\}_{\beta \in J}$$

یک پوشش باز برای Y است. همچنین داریم

$$\forall \beta \in J, \exists \alpha \in I \quad \text{s.t.} \quad Y_\beta \subseteq G_\alpha \cup (X \setminus Y)$$

بنابراین

$$Y_\beta \cap Y \subseteq (G_\alpha \cup (X \setminus Y)) \cap Y = X_\alpha$$

از طرفی چون اشتراک هر $m + 2$ عضو از $\mathcal{T}$ برابر با مجموعه‌ی تهی است، پس

$$\{Y_\beta \cap Y\}_{\beta \in J}$$

یک پوشش باز برای Y و همچنین تظریفی از $\mathcal{F}$ با حداکثر مرتبه‌ی $m + 1$ است. و این همان است که می‌خواستیم. ■