بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض-آنالیز

آنالیز یکنوا روی فضاهای برداری توپولوژیک مرتب

استاد راهنما: دکتر حمید مظاهری تهرانی

استاد مشاور: دکترسید محمد مشتاقیون

پژوهش و نگارش: زینب گلی نژاد

شهریور ۱۳۹۱

به نشانه سپاسی ژرف و خالصانه تقدیم به:

روح پاک پدرم

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم.

.

وبه مادرم

دریای بی کران عشق و فداکاری

که لحظه لحظه زندگی‌اش برایم همه درس است،

و عطر یاس دعاهایش اعتبار زیستنم.

سپاس‌گزاری...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم .

در آغاز بر خود واجب می‌دانم از زحمات استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر حمید مظاهری تهرانی که با راهنمایی‌های فراوانشان، مرا یاری نمودند، تشکر کنم.

همچنین از جناب آقای دکتر محمد مشتاقیون، استاد مشاور ارجمندم، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

و از کمک های جناب آقای خادم زاده نیز تشکر می نمایم. از مادر دلسوز و مهربانم که ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند،و همچنین از خانواده عزیزم که پیوسته یاریگرم بودند و هر لحظه تلاشم با فداکاری آن‌ها میسر گشته،تشکر می کنم.

چکیده

در این پژوهش نشان می دهیم که توابع صعودی همگن مثبت (IPH) و توابع صعودی محدب در طول شعاع $(ICAR)$ و توابع صعودی هم شعاعی(ICR) تعریف شده روی یک فضای برداری توپولوژیک با رجوع به کلاس خاصی از توابع مقدماتی، محدب مطلق اند. و قطبیت از توابع صعودی همگن مثبت و توابع صعودی هم شعاعی را مطالعه می کنیم. به عنوان یک کاربرد شرط جداسازی برای مجموعه های شعاعی و هم شعاعی را بیان می کنیم. در فصل چهارم شرطی لازم و کافی برای مینیمم مطلق از تفاضل توابع اکیدا صعودی هم شعاعی بدست می اوریم.

کلمات کلیدی:

۱. محدب مطلق ۲. مجموعه شعاعی ۳. مجموعه هم شعاعی ۴. آنالیز یکنوا
۵. همگن مثبت

فهرست مطالب

۱.۰ پیشگفتار

یکنوایی نقش مهمی در ریاضیات وکاربردهایش بازی می کند. آنالیز یکنوا را می توان آنالیز محدب مطلق بر پایه کلاس های خاصی از توابع مقدماتی در نظر گرفت. اولین همکاری در زمینه تحدب مطلق در مقاله[۱۲] انجام گرفت. عبارت آنالیز یکنوا درمقاله[۲۰] مورد استفاده قرار گرفت اما در آن تنها نتایج روی مخروط $\mathbb{R}^n_+$ از تمام بردارهای با مختصات نامنفی مطالعه شد. بقیه نتایج آنالیز یکنوا روی فضای $\mathbb{R}^n$ درمقاله [۱۱]یافت میشوند. پس از آن این نتایج به روی یک مخروط محدب نقطه ای توسیع داده شدند[۶،۷و۸] .توابع صعودی همگن مثبت (IPH) و توابع صعودی محدب در طول شعاع $(ICAR)$ دو موضوع اصلی از این نظریه هستند که درمقالات [۹و۱۰] مطالعه شده اند. این توابع می توانند در آنالیز یکنوا به ترتیب همانند توابع زیر خطی وتوابع محدب در آنالیز محدب در نظر گرفته شوند. همچنین مجموعه های نرمال وهم نرمال را می توان به ترتیب همانند مجموعه های محدب و مقعر در نظر گرفت. در مقالات[۱۸و۱۹] برخی نتایج آنالیز یکنوا به روی یک فضای برداری توپولوژیک دلخواه گسترش داده شدند. آنالیز یکنوا کاربردهایی در ریاضیات اقتصادی، مسائل بهینه سازی و نظریه نامساوی ها دارد.

فصل ۱

مقدمات و پیش نیاز ها

در این فصل ابتدا به بیان مفاهیم، تعاریف اولیه و نمادگذاری می پردازیم و در ادامه مثال و قضایایی از آنالیز یکنوا را بیان می کنیم.

در این پایان نامه از نمادهای متداول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \qquad \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

$$\mathbb{R}_+ = [\circ, +\infty) \qquad \mathbb{R}_- = (-\infty, \circ]$$

$$\bar{\mathbb{R}}_+ = [\circ, +\infty] \qquad \mathbb{R}_{++} = (\circ, +\infty)$$

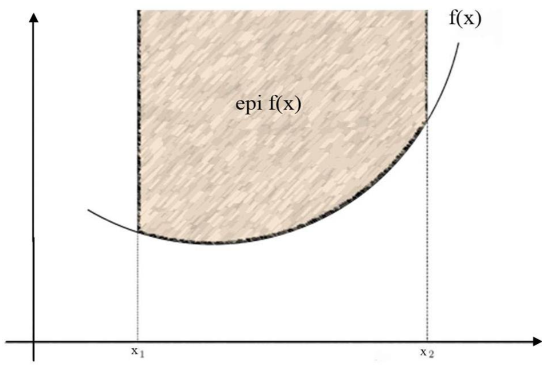
$$\bar{\mathbb{R}}_- = [-\infty, \circ] \qquad \mathbb{R}_{+\infty} = (-\infty, +\infty]$$

هرگاه X یک فضای برداری توپولوژیک باشد، برای تابع $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ مجموعه های

$$dom f = \{x \in X : -\infty < f(x) < +\infty\}$$

$$epi f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

را به ترتیب دامنه موثر و اپی گراف $f(x)$ تعریف می کنیم. شکل زیر اپی گراف از تابع f را نشان می دهد.



گوییم تابع f سره می باشد هرگاه $dom f \neq \emptyset$ و به ازای تمام $x \in X$، $f(x) > -\infty$ باشد.

همواه X یک فضای برداری توپولوژیک و H مجموعه ای از توابع دلخواه $h : X \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ روی Xفرض می شوند.

۱.۱ تحدب مطلق ومزدوج توسیع یافته

در این بخش به بیان مفهوم تحدب و تقعر مطلق از مجموعه ها و توابع می پردازیم و سپس دوگان فنچل-موریو و دوگان مینکوفسکی را بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. الف) هرگاه X یک فضای برداری توپولوژیک باشد، $C \subset X$ محدب نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y \in C$ و $۰ < \lambda < ۱$ ،

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in C$$

ب) هرگاه $C \subset X$ محدب باشد، تابع $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب است اگر به ازای $x_۱, x_۲ \in C$ و $t \in [۰, ۱]$,

$$f(tx_۱ + (۱ - t)x_۲) \leq tf(x_۱) + (۱ - t)f(x_۲)$$

یک تابع f محدب است اگر اپی گرافش محدب باشد.

تعریف ۲.۱.۱. الف) مجموعه $B \subset X$ آفین نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و $x, y \in B$ ،

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in B.$$

یک مجموعه آفین شامل مبدا زیر فضا است.

ب) تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ آفین است اگر یک تابع خطی $h : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in X$

$$f(x) = h(x) + b.$$

مثال ۳.۱.۱. به عنوان مثال تابع $f(x, y) = (۲x + ۳, y - ۴x + ۱)$ یک تابع آفین از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}^۲$ است، زیرا اگر $h(x, y) = (۲x, y - ۴x)$ آنگاه

$$f(x, y) = h(x, y) + (۳, ۱)$$

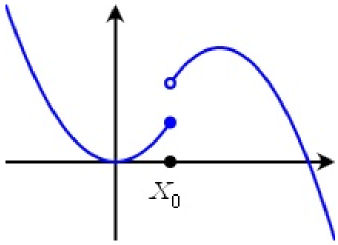
گزاره ۴.۱.۱. یک مجموعه ناتهی M یک مجموعه آفین است اگر و تنها اگر $M = a + L$ که $a \in M$ و L یک زیر فضا است.

تعریف ۵.۱.۱. تابع $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ نیم‌پیوسته پایینی $(l.s.c)$ در نقطه $x_\circ$ است اگر برای هر $\varepsilon > \circ$ یک همسایگی U از $x_\circ$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in U$,

$$f(x) \geq f(x_\circ) - \varepsilon$$

ویا به بیانی دیگر

$$\liminf_{y \to x_\circ} f(y) \geq f(x_\circ)$$

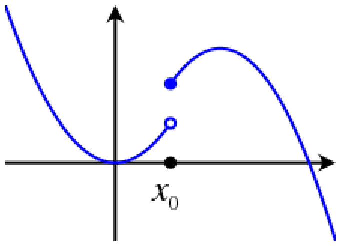


تعریف ۶.۱.۱. تابع $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ نیم‌پیوسته بالایی $(u.s.c)$ در نقطه $x_\circ$ است اگر برای هر $\varepsilon > \circ$ یک همسایگی V از $x_\circ$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in V$,

$$f(x) \leq f(x_\circ) - \varepsilon$$

ویا به بیانی دیگر

$$\limsup_{y \to x_\circ} f(y) \leq f(x_\circ).$$



تعریف ۷.۱.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ محدب مطلق نسبت به H (H- محدب) است اگر مجموعه $H \supseteq U$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f(x) = \sup\{h(x) : h \in U\}$$

بنابر قضایایی از آنالیز محدب ، تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ محدب و نیم پیوسته پائینی است اگر و تنها اگر سوپریمم از مجموعه ای از توابع آفین پیوسته باشد. لذا هرگاه H مجموع تمام توابع آفین تعریف شده روی X باشدآنگاه f محدب و نیم پیوسته پائینی است اگر و تنها اگر H- محدب باشد.

تعریف ۸.۱.۱. الف) تکیه گاه تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ را نسبت به H تعریف می کنیم

$$supp(f, H) = \{h \in H : h(x) \leq f(x),\ \forall x \in X\}.$$

ب) تابع $Co_H f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ با ضابطه

$$Co_H f(x) := \sup\{h(x) : h \in supp(f, H)\}$$

را $H-$ غلاف محدب از f می نامیم.

گزاره ۹.۱.۱. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$، $H-$ محدب است اگر و فقط اگر $f = Co_H f$.

برهان. هرگاه

$$f = Co_H f(x) := \sup\{h(x) : h \in supp(f, H)\}$$

وقتی $H \subseteq supp(f, H)$ آنگاه طبق تعریف (۷.۱.۱) f، $H-$ محدب است. حال اگر مجموعه $U \subseteq H$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$f(x) = \sup\{h(x) : h \in U\}$$

وقتی $U \subseteq supp(f, H)$ است آنگاه به ازای هر $x \in X$,

$$f(x) = \sup\{h(x) : h \in U\} \leq \sup\{h(x) : h \in supp(f, H)\} = Co_H f(x)$$

واز طرفی به ازای هر $h \in supp(f, H)$، $h \leq f$ لذا $Co_H f \leq f$. □

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه $\mathcal{L}$ از توابع خطی $l : X \longrightarrow \mathbb{R}$ مجموعه‌ی توابع خطی مطلق نامیده می‌شود اگر برای هر $l \in \mathcal{L}$ هیچ تابع انتقال $h_{l,c}(x) = l(x) - c$ با $c \neq ۰$ متعلق به $\mathcal{L}$ نباشد. یک تابع $h_{l,c}$ با $l \in \mathcal{L}$ و $c \in \mathbb{R} \neq ۰$ تابع $\mathcal{L}-$ آفین نامیده می‌شود و مجموعه‌ی تمام $\mathcal{L}-$ آفین‌ها را با $H_{\mathcal{L}}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. مجموعه‌ی ناتهی $A \subset X$ محدب مطلق نسبت به H ($H-$ محدب) نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in X \backslash A$ یک تابع $h \in H$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$h(x) > \sup_{u \in A} h(u)$$

مجموعه‌ی تهی، $H-$ محدب است.

تعریف ۱.۱.۱۲. یک تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ مقعر مطلق نسبت به H است اگر مجموعه $V \subset H$ وجود داشته باشد که

$$f(x) = \inf\{h(x) : h \in V\}$$

تعریف ۱.۱.۱۳. هرگاه $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ یک تابع سره باشد و

$$x_\circ \in domf = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$$

مجموعه

$$\partial_H f(x_\circ) := \{h \in H : f(x) - f(x_\circ) \geqslant h(x) - h(x_\circ),\ x \in X\}$$

$H-$ زیر دیفرانسیل از f در نقطه‌ی $x_\circ$ نامیده می‌شود.

گزاره ۱.۱.۱۴. $\partial_H f(x_\circ)$ ناتهی است اگر

$$f(x_\circ) = \max\{h(x_\circ) : h \in supp(f, H)\}.$$

برهان. هرگاه $h \in supp(f, H)$ وجود داشته باشد بطوریکه $h(x_\circ) = f(x_\circ)$ از اینکه به ازای هر $x \in X$, $h(x) \leq f(x)$ نتیجه می گیریم که

$$f(x) - f(x_\circ) \geq h(x) - f(x_\circ) \geq h(x) - h(x_\circ)$$

لذا $h \in \partial_H f(x_\circ)$. □

در اینجا دو نوع دوگانی را بیان می کنیم:

۱) هرگاه (X, Y) یک جفت از مجموعه‌ها باشد، تابع $\varphi : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ جفت ساز است اگر $\varphi(x, y) := y(x)$. حال اگر F_X اجتماع مجموعه تمام توابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ و تابع $f_{-\infty}$ باشد که برای تمام $x \in X$ داریم، $f_{-\infty}(x) = -\infty$، نگاشت $f \longrightarrow f^\varphi$ مزدوج فنچل-موریو مطابق با φ تعریف شده روی F_X با ضابطه زیر است

$$f^\varphi(y) = \sup_{x \in X}\{\varphi(x, y) - f(x)\} \qquad , \qquad y \in Y$$

هرگاه φ' تابع تعریف شده روی $Y \times X$ با $\varphi'(y,x) = \varphi(x,y)$ باشد، مزدوج فنچل-موریو مطابق با φ' نگاشت $g^{\varphi'} \longrightarrow g$ تعریف شده روی F_Y با ضابطه زیر است

$$\begin{aligned} g^{\varphi'}(x) &:= \sup_{y\in Y}\{\varphi'(y,x) - g(y)\} \\ &= \sup_{y\in Y}\{\varphi(x,y) - g(y)\} \end{aligned}$$

در حالتی که Y مجموعه‌ای از توابع تعریف شده روی مجموعه‌ی X است برای هر $y \in Y$ و $\gamma \in \mathbb{R}$ تابع $h_{y,\gamma}(x) = y(x) - \gamma$ و $H_Y = \{h_{y,\gamma} : y \in Y\ , \gamma \in \mathbb{R}\}$ را در نظر می‌گیریم هرگاه $\varphi : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ با $\varphi(x,y) = y(x)$ تعریف شود نتیجه زیر حاصل می شود.

قضیه ۱۵.۱.۱. هرگاه $f \in F_X$ در نتیجه $f^{\varphi\varphi'} = (f^{\varphi})^{\varphi'} = Co_{H_Y} f$ به خصوص $f^{\varphi\varphi'} = f$ اگر و تنها اگر f تابع H_Y- محدب باشد.

برهان. از تعریف نگاشت مزدوج فنچل-موریو و گزاره (۹.۱.۱) بدیهی است. □

۲) هرگاه $P_{X,H}$ مجموعه تمام توابع $H-$ محدب و $S_{X,H}$ مجموعه تمام زیر مجموعه های $H-$ محدب از X باشد، نگاشت $\varphi : P_{X,H} \longrightarrow S_{X,H}$ تعریف شده با

$$\varphi(f) = supp(f,H)$$

دوگانی مینکوفسکی خوانده می شود. اگر L مجموعه توابع خطی تعریف شده در فضای موضعا محدب X باشد، زمانیکه $\partial p(\circ) = \{l \in L : l(x) \leq p(x), \forall x \in X\}$ دوگانی مینکوفسکی با نگاشت $p \longrightarrow \partial p(\circ)$ مطابق است.

گزاره ۱۶.۱.۱. هرگاه $f \in F_X$ ، آنگاه

$$supp(f,H_L) = epi f^{\varphi}$$

برهان. $(h,\lambda) \in epi f^{\varphi}$ اگر و تنها اگر $\lambda \geq f^{\varphi}(h)$ و این رابطه برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$

$$\lambda \geq h(x) - f(x)$$

و این با $(h,\lambda) \in supp(f,H_L)$ هم ارز است. □

تساوی $\varphi(f) = supp(f, H_L) = epif^{\varphi}$ ارتباط دوگانی مینکوفسکی و فنچل -موریو را نشان می دهد.

۲.۱ آنالیز یکنوا

آنالیز یکنوا، آنالیز محدب مطلق نسبت به کلاسهای خاصی از توابع است. در اینجا به بیان مفاهیم اولیه ای از آنالیز یکنوا می پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه $K \subseteq X$ مخروط است اگر برای تمام $\lambda > \circ$،

$$\lambda K \subseteq K$$

و نقطه ای است اگر

$$(\circ \neq x \in K) \Longrightarrow -x \notin K.$$

یک مخروط محدب بسته شامل صفر است لذا یک مخروط محدب بسته نقطه ای است اگر

$$K \cap -K = \{\circ\}$$

فرض می کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و K مخروط محدب بسته نقطه‌ای باشد. آنگاه ترتیب القا شده توسط K روی X بدین صورت تعریف می شود:

$$x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in K,$$

$$x < y \Longleftrightarrow y - x \in K \backslash \{\circ\},$$

$$x \ll y \Longleftrightarrow y - x \in intK.$$

(درون K را با $intK$ نمایش می دهیم.)

در این پایان نامه همواره K مخروط محدب بسته نقطه ای و X یک فضای برداری توپولوژیک با ترتیب بالا می باشند.

تعریف ۲.۲.۱. الف) تابع $p : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ همگن مثبت از درجه γ نامیده می‌شود اگر به ازای تمام $x \in X$ و $\lambda \geq \circ$،

$$p(\lambda x) = \lambda^{۲} p(x).$$

ب) تابع $q : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ پاد همگن مثبت نامیده می شود اگربه ازای تمام $x \in X$ و $\lambda > ۰$،

$$q(\lambda x) = \lambda^{-۱} q(x).$$

یادآوری می‌کنیم که تابع p صعودی است اگر

$$x \geq y \Longrightarrow p(x) \geq p(y)$$

تعریف ۳.۲.۱. تابع $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ شعاعی نامیده می‌شود اگر برای تمام $x \in X$ و $\lambda \in (۰, ۱]$،

$$f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$$

و f هم شعاعی است اگر برای تمام $x \in X$ و $\lambda \in (۰, ۱]$،

$$f(\lambda x) \geq \lambda f(x)$$

مثال ۴.۲.۱. تابع $f(x) = ax + b$ به ازای $b \leq ۰$ شعاعی و به ازای $b \geq ۰$ هم شعاعی است.

تعریف ۵.۲.۱. الف) یک زیرمجموعه‌ی A از K نرمال نامیده می‌شود، اگر

$$(x \in A \, , \, x' \in K \, , \, x' \leq x) \Longrightarrow x' \in A$$

مجموعه تهی و مجموعه K نرمال اند.

ب) یک زیرمجموعه‌ی ناتهی B از K هم نرمال نامیده می‌شود، اگر

$$(x \in B \quad , \quad x' \in K \quad , \quad x \leq x') \Longrightarrow x' \in B$$

طبق تعریف مجموعه A نرمال است اگر و تنها اگر $K \backslash A$ هم نرمال باشد.

تعریف ۶.۲.۱. الف) زیرمجموعه‌ی A از X شعاعی است، اگر

$$(\, x \in A \, , \, \lambda \in (۰, ۱) \,) \Longrightarrow \lambda x \in A$$

ب) زیرمجموعه‌ی B از X هم‌شعاعی است، اگر

$$(x \in B \, , \, \lambda > ۱) \Longrightarrow \lambda x \in B$$

نکته ۷.۲.۱. مجموعه‌های نرمال شعاعی هستند و مجموعه‌های هم‌نرمال، هم‌شعاعی هستند.

تعریف ۸.۲.۱. الف) مجموعه $W \subseteq X$ پائینی است اگر

$$(x \in W \ , \ x' \leq x) \Longrightarrow x' \in W$$

ب) مجموعه $V \subseteq X$ بالایی است اگر

$$(x' \in V \ , \ x' \leq x) \Longrightarrow x \in V$$

توجه داشته باشید هرگاه $K = X$ باشد آنگاه مجموعه های نرمال و هم نرمال به ترتیب با مجموعه های پائینی و بالایی یکی می شوند.

تعریف ۹.۲.۱. تابع جفت ساز $\ell : X \times X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ را تعریف می‌کنیم.

$$\ell(x,y) := \max\{\lambda \geq 0 \ : \ \lambda y \leq x\}$$

با قرار داد $\max \mathbb{R} := +\infty \ , \ max\emptyset := 0$. در قضیه بعد بعضی شرایط را روی تابع ℓ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۲.۱. برای هر $y, x, x' \in X$ و $\gamma > 0$ روابط زیر برقرار است

۱) $\ell(\gamma x, y) = \gamma \ell(x,y)$.

۲) $\ell(x, \gamma y) = \frac{1}{\gamma} \ell(x,y)$.

۳) اگر $\ell(x,y) = +\infty$ آنگاه $y \in -K$.

۴) $\ell(x,x) = 1$ اگر و تنها اگر $x \notin -K$.

۵) اگر $x \in K$ و $y \in -K$ آنگاه $\ell(x,y) = +\infty$.

۶) اگر $x \leq x'$ آنگاه $\ell(x,y) \leq \ell(x',y)$.

۷) اگر $y \leq y'$ آنگاه $\ell(x,y) \geq \ell(x,y')$.

۸) $\ell(x, 0) = +\infty$.

۹) اگر $y \neq 0$ آنگاه $\ell(0,y) = 0$.

۱۰) به ازای هر $x \in K$ و به ازای هر $y \in K \backslash \{0\}$، $\ell(x,y) < +\infty$.

برهان. ۱)

$$\begin{aligned}\ell(\gamma x, y) &= \max\{\lambda' \geq 0 \ : \ \lambda' y \leq \gamma x\} \\ &= \max\{\lambda' \geq 0 \ : \ \frac{\lambda'}{\gamma} y \leq x\} \\ &= \max\{\gamma\mu \geq 0 \ : \ \mu y \leq x\} = \gamma \ell(x, y)\end{aligned}$$

۲)

$$\begin{aligned}\ell(x, \gamma y) &= \max\{\mu \geq 0 \ : \ \mu\gamma y \leq x\} \\ &= \max\{\frac{\lambda}{\gamma} \geq 0 \ : \ \lambda y \leq x\} = \frac{1}{\gamma}\ell(x, y)\end{aligned}$$

۳) هرگاه $\ell(x,y) = +\infty$، بنابر تعریف تابع ℓ یک دنباله $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ موجود است که $\lambda_n \to +\infty$ و برای $n \geq 1$، $y \leq (\frac{1}{\lambda_n})x$. چون که K مخروط بسته است $y \leq 0$ و لذا $y \in -K$.

۴) زمانیکه $0 \in K$ است برای تمام $x \in X$، $\ell(x,x) \geq 1$. در صورتی که $x \notin -K$ باشد برای $\lambda > 0$، $\lambda x \leq x$ و در نتیجه $\lambda \leq 1$ (زیرا در غیر اینصورت $-x = -\frac{1}{1-\lambda}(1-\lambda)x \in K$ که با $x \notin -K$ در تضاد است.) و بنابراین $\ell(x,x) = 1$.

برعکس هرگاه $\ell(x,x) = 1$ فرض می‌کنیم که حکم درست نباشد یعنی $x \in -K$. در نتیجه برای تمام $\lambda > 1$، $\lambda x \leq x$ و لذا $\ell(x,x) = +\infty > 1$ که با فرض $\ell(x,x) = 1$ در تضاد است، و از اینرو حکم ثابت می‌شود.

۵) مشابه قسمت‌های قبل است.

۶) هرگاه $x \leq x'$ و

$$\Lambda_{x,y} = \{\lambda \geq 0 \ : \ \lambda y \leq x\}$$

و

$$\Lambda_{x',y} = \{\gamma \geq 0 \ : \ \gamma y \leq x'\}$$

واضح است که

$$\Lambda_{x,y} \subseteq \Lambda_{x',y}$$

توجه کنید اگر $\Lambda_{x',y} = \emptyset$ باشد نتیجه می‌دهد $\Lambda_{x,y} = \emptyset$، بنابراین

$$\ell(x,y) \leq \ell(x',y).$$

۷) مشابه قسمت (۶) اثبات می‌شود.

۸) $\ell_{(x,\circ)} = max\{\lambda \geq \circ : \circ \leq x\} = +\infty$

۹) واضح است.

۱۰) بنابر (۳) و نقطه‌ای بودن K واضح است.

$\square$

مثال ۱۱.۲.۱. هرگاه $X = \mathbb{R}^n$ و K مخروط $\mathbb{R}^n_+$ از تمام بردارهای با مختصات نامنفی در $\mathbb{R}^n$ باشد. هرگاه $I = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ برای هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ مجموعه‌های اندیس زیر را تعریف می کنیم

$$I_\circ(x) = \{i \in I \ : \ x_i = \circ\}$$

$$I_+(x) = \{i \in I \ : \ x_i > \circ\}$$

$$I_-(x) = \{i \in I \ : \ x_i < \circ\}$$

هرگاه $x \in \mathbb{R}^n$ و $c \in \mathbb{R}$، بردار با مختصات زیر را با $\frac{c}{x}$ نشان می‌دهیم

$$(\frac{c}{x})_i = \begin{cases} \frac{c}{x_i} & i \notin I_\circ(x) \\ \circ & i \in I_\circ(x) \end{cases}$$

در نتیجه برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\ell(x,y) = \begin{cases} \min\limits_{i \in I_+(y)} \frac{x_i}{y_i} & x \in K^+_y \\ \circ & x \notin K^+_y \end{cases}$$

وقتی که

$$K^+_y = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \forall i \in I_+(y) \cup I_\circ(y) \ , \ x_i \geq \circ\Big\}.$$

قضیه ۱۲.۲.۱. هرگاه $y \notin -K$ تابع $\ell_y : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ که با فرمول $\ell_y(x) = \ell(x,y)$ تعریف می‌شود نیم پیوسته بالایی است.