



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش نظری
کاهش درهم تنیدگی کوانتومی سیاه چاله های گاوس - بونه با ابعاد بالاتر

استادان راهنما:

دکتر بهرام نصر اصفهانی

دکتر مرتضی سلطانی

پژوهشگر:

سیده سبا سیاحی

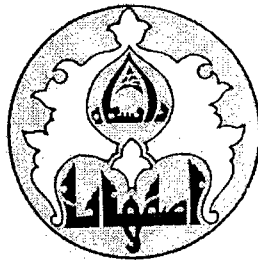
دی ماه ۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات

نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه

متعلق به دانشگاه اصفهان است.

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک بنیادی در زمینه گرانش



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک بنیادی در زمینه گرانش

خانم سیده سبا سبحی با عنوان

کاهش درهم‌تنیدگی کوانتومی در سیاه‌چاله‌های گاوس-بونه با ابعاد بالاتر

در تاریخ ۱۳۹۱/۱۰/۲۷ توسط هیئت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|------------------------|
| ۱- استاد راهنمای پایان‌نامه | زنده یاد دکتر بهرام نصر اصفهانی | با مرتبه علمی دانشیار |
| ۲- استاد راهنمای پایان‌نامه | دکتر مرتضی سلطانی | با مرتبه علمی استادیار |
| ۳- استاد داور داخل گروه | دکترسید جواد اخترشناس | با مرتبه علمی دانشیار |
| ۴- استاد داور داخل گروه | دکترمجید عموشاهی | با مرتبه علمی استادیار |

ممبر گروه

دکتر اسماعیل حسن‌زاده



الهی نور تو چراغ معرفت بی فروخت، دل من افزونی است.

کواهی تو ترجمانی من بگردند، ندای من افزونی است.

قرب تو چراغ وجد بی فروخت، همت من افزونی است.

بود تو کار من راست کرد، بود من افزونی است.

پروردگارا از عظمت حضورت، از آراش یادت و از یگانگی وجودت پاسکندارم که یاری رسان من در این مسیر پر پیچ و خم بودی تا یک مرحله دیگر از مراحل زندگانییم را به اتمام برسانم. اکنون که در نهایت به پایان این مرحله رسیده‌ام بر خود می‌دانم که از اساتید عزیزان و دوستانم که به نحوی مرا همراهی کرده‌اند قدر دانی کنم.

در ابتدا از سه کوهر پر ارزش زندگی ام پاسکندارم: پدرم، مادرم و همسرم.

قدر دان تکیه گاه استوار زندگی ام پدر و مادر مهربانم، بستم، که دعاهای خیرشان، همواره بدرقه راهم بود و تا آخر عمر نیازمند نگاه‌های پر شوقشان، بستم.

از بھرام، بھدم، بھمکرم، از بھسرم پاسکندارم. کسی که نگاه پر مهرش جانی تازه به من می‌بخشد و همواره حضورش باعث آراش بخطه‌ایم است.

از خواهران مهربانم "سحر" و "سمر" و برادر عزیزم "سهیل" برای تمام حمایت‌ها و دلگرمی‌هایشان صمیمانه پاسکندارم.

از استاد بزرگوارم زنده یاد جناب آقای "دکتر بهرام نصر اصفهانی" نهایت تشکر و سپاس را دارم که تا هنگامیکه بیماریشان مجال می داد مرا از کمک و راهنمایی ایشان محروم نمی کردند. افسوس که دیگر حضور پربرکت و فرزانه شان در میان ما نیست. هم چنین از جناب آقای دکتر "مرتضی سلطانی" برای تمام رهنمودها و کمکهای ایشان قدردانی می کنم.

و در نهایت از تمامی عزیزان و دوستانی که مراد این راه یاری کرده اند صمیمانه سپاسگزارم و از خدای متعال توفیق در ادامه مسیر را خواهانم.

چکیده

در این پژوهش درهم‌تنیدگی کوانتومی در حضور سیاه‌چاله گاوس - بونه با ابعاد بالاتر برای میدان اسکالر و میدان دیراک بررسی می‌شوند. فرض می‌شود دو ناظر لخت آلیس و باب یک حالت درهم‌تنیده کلی را در لحظه همزمانی به اشتراک می‌گذارند. پس از آن ناظر باب برای پرهیز از سقوط در سیاه‌چاله شتابدار شده و در چارچوب نالخت قرار می‌گیرد. این در حالی است که ناظر آلیس همچنان لخت باقی مانده و به سمت سیاه‌چاله سقوط آزاد می‌کند. در این بررسی‌ها ناظر باب پس از شتابدار شدن در دو موقعیت نزدیک و دور از افق سیاه‌چاله قرار دارد. هنگامی که ناظر شتابدار دور از سیاه‌چاله باشد دمای هاوکینگ را ثبت می‌کند. درحالی که اگر ناظر مذکور در همسایگی افق رویداد باشد شتاب آن شتاب ویژه بوده و بنابراین باب دمای تولمن را ثبت خواهد کرد. از این رو دمای تولمن و دمای هاوکینگ برای سیاه‌چاله بعد چهار و ابعاد بالاتر از آن به دست آورده می‌شود.

نظریه لاولاک مطالعه فضازمان با ابعاد بالاتر را ممکن می‌سازد. با بررسی لاگرانژین لاولاک عبارت گاوس بونه آشکار می‌شود. پس از طی این روند سنج‌های نگاتیویته و نگاتیویته لگاریتمی برای سیستم‌های بوزونی و فرمیونی اندازه‌گیری شده و درهم‌تنیدگی کوانتومی به صورت تابعی از بعد فضا زمان، شعاع افق رویداد و ثابت گاوس - بونه بررسی می‌گردد. در این پژوهش همچنین تقریب تک بسامدی در نظر گرفته نمی‌شود. بنابراین به تعریف مدهای آنرو و ارتباط آن با مدهای مینکوفسکی و ریندلری می‌پردازیم. در پایان کمیت اطلاع رسانی متقابل را برای هر دو سیستم بوزونی و فرمیونی اندازه‌گیری شده و رفتار آن بر حسب دمای هاوکینگ مطالعه می‌شود.

کلمات کلیدی: درهم‌تنیدگی کوانتومی - ترابرد کوانتومی - اطلاع رسانی کوانتومی - دمای هاوکینگ - دمای تولمن

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول: نظریه میدان کوانتومی در فضا زمان یک سیاه چاله متقارن کروی	
۱-۱- بررسی مدهای کوانتومی در فضا زمان تخت.....	۲
۱-۱-۱- میدان بوزونی.....	۲
۲-۱-۱- میدان فرمیونی.....	۵
۲-۱- نظریه میدان کوانتومی در فضا زمان خمیده.....	۶
۱-۲-۱- میدان اسکالر.....	۶
۲-۲-۱- میدان دیراک.....	۸
۳-۱- بررسی مدهای کوانتومی در فضا زمان یک سیاه چاله متقارن کروی.....	۱۱
۴-۱- درهم تنیدگی کوانتومی در حضور یک سیاه چاله متقارن کروی.....	۱۵
۱-۴-۱- درهم تنیدگی حالت های بوزونی.....	۱۶
۲-۴-۱- درهم تنیدگی حالت های فرمیونی.....	۱۸

فصل دوم: درهم تنیدگی کوانتومی برای سیاه چاله های با ابعاد بالاتر در تقریب تک بسامد

۱-۲- مدهای میدان در حضور سیاه چاله با ابعاد بالاتر.....	۲۵
۲-۲- بررسی مدهای کوانتومی در حضور سیاه چاله گاوس-بونه.....	۲۸
۳-۲- کاهش درهم تنیدگی در حضور سیاه چاله گاوس-بونه.....	۳۱
۱-۳-۲- درهم تنیدگی مدهای میدان اسکالر.....	۳۲
۲-۳-۲- درهم تنیدگی مدهای میدان دیراک.....	۳۵

فصل سوم: درهم‌تنیدگی کوانتومی فراتر از تقریب تک بسامد

- ۱-۳- معرفی مدهای ریندلر، آنرو و مینکوفسکی برای میدان اسکالر..... ۳۸
- ۲-۳- معرفی مدهای آنرو، ریندلر و مینکوفسکی برای میدان دیراک..... ۴۳
- ۱-۲-۳- اسکالره‌های گراسمان..... ۴۷
- ۳-۳- درهم‌تنیدگی کوانتومی در حضور سیاه‌چاله گاوس - بونه..... ۴۹
- ۱-۳-۳- شتاب ویژه و دمای تولمن برای ناظر نالخت در همسایگی افق رویداد..... ۴۹
- ۲-۳-۳- درهم‌تنیدگی کوانتومی برای میدان اسکالر..... ۵۲
- ۳-۳-۳- درهم‌تنیدگی کوانتومی برای میدان دیراک..... ۶۰

فهرست شکل ها

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱. دیاگرام پنروز برای منیفلد کروسکال بسط داده شده.....	۱۳
شکل ۱-۲. نگاتیویته لگاریتمی بصورت تابعی از دمای هاوکینگ با ω ثابت برای α های متفاوت برای سیستم های بوزونی.....	۱۷
شکل ۱-۳. نگاتیویته لگاریتمی بر اساس η برای β های مختلف.....	۱۸
شکل ۱-۴. نگاتیویته لگاریتمی بر اساس ξ برای یک سیستم فرمیونی.....	۲۰
شکل ۱-۵. اطلاع رسانی کوانتومی یک سیستم بوزونی برای α های متفاوت بر اساس دمای هاوکینگ رسم شده است.....	۲۲
شکل ۱-۶. اطلاع رسانی کوانتومی برای یک سیستم فرمیونی بر حسب دمای هاوکینگ. منحنی نقطه چین متناظر است با $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، منحنی خط چین با $\beta = \frac{1}{\sqrt{8}}$ و منحنی خط با $\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$	۲۳
شکل ۱-۲. نگاتیویته لگاریتمی بر حسب بعد فضا زمان. در هر گروه نمودارها مقدار α از بالا به پایین ۰/۱ و ۰/۰۱ است.....	۳۳
شکل ۲-۲. نگاتیویته لگاریتمی بر حسب ضریب گاوس- بونه α . در هر گروه از نمودارها منحنی بالایی بعد پنج و منحنی پایینی بعد شش را نشان می دهد.....	۳۴
شکل ۲-۳. تغییرات نگاتیویته لگاریتمی بر اساس شعاع افق r_h	۳۴
شکل ۲-۴. نگاتیویته لگاریتمی بر حسب بعد فضا زمان d	۳۶
شکل ۲-۵. نگاتیویته لگاریتمی بر حسب ثابت گاوس- بونه برای یک سیستم فرمیونی.....	۳۷
شکل ۲-۶. نگاتیویته لگاریتمی بر حسب شعاع سیاه چاله برای یک سیستم فرمیونی.....	۳۷
شکل ۳-۱. دیاگرام فضا زمان ریندلر را نشان می دهد. که خطوط موقعیت χ منحنی های هذلولی است و تمام منحنی های با η ثابت خطوط مستقیم هستند.....	۴۰
شکل ۳-۲. بررسی نگاتیویته برای مقادیر مختلف β با توجه به تغییرات r ورای تقریب تک بسامد.....	۵۴
شکل ۳-۳. نگاتیویته بر حسب بعد فضا زمان d برای حالتی که ناظر باب در نزدیکی افق رویداد باشد. منحنی سمت چپ متناظر است با $q_R = 0.7$ و منحنی سمت راست متناظر است با $q_R = 1$	۵۵

عنوان

صفحه

- شکل ۳-۴. نگاتیویته بر حسب بعد فضا زمان d برای حالتی که ناظر باب دور از افق رویداد باشد. منحنی سمت چپ متناظر است با $q_R = 0.7$ و منحنی سمت راست متناظر است با $q_R = 1$ ۵۵
- شکل ۳-۵. نگاتیویته بر حسب شعاع افق سیاهچاله هنگامیکه ناظر باب در نزدیکی افق رویداد قرار دارد (الف) $q_R = 1$ و (ب) $q_R = 0.7$ ۵۶
- شکل ۳-۶. نگاتیویته بر حسب شعاع افق سیاهچاله هنگامیکه ناظر باب دور از افق رویداد قرار دارد (الف) $q_R = 1$ و (ب) $q_R = 0.7$ ۵۷
- شکل ۳-۷. نگاتیویته بر حسب ضریب گاوس- بونه α هنگامیکه ناظر باب در همسایگی افق سیاهچاله است (الف) $q_R = 1$ و (ب) $q_R = 0.7$ ۵۷
- شکل ۳-۸. نگاتیویته بر حسب ضریب گاوس- بونه α هنگامیکه ناظر باب دور از افق سیاهچاله است (الف) $q_R = 1$ و (ب) $q_R = 0.7$ ۵۸
- شکل ۳-۹. بررسی تغییرات اطلاع رسانی متقابل بر حسب دمای هاوکینگ برای دو مقدار متفاوت q_R و β ۵۹
- شکل ۳-۱۰. تغییرات نگاتیویته برای یک سیستم فرمیونی بر حسب r ۶۱
- شکل ۳-۱۱. تغییرات نگاتیویته بر حسب شعاع افق رویداد سیاهچاله در حالیکه ناظر باب دور از افق سیاهچاله واقع شده است. در قسمت (الف) $q_R = 1$. (ب) $q_R = 0.7$ ۶۲
- شکل ۳-۱۲. تغییرات نگاتیویته بر حسب شعاع افق رویداد سیاهچاله در حالیکه ناظر باب دور از افق سیاهچاله واقع شده است. در قسمت (الف) $q_R = 1$. (ب) $q_R = 0.7$ ۶۲
- شکل ۳-۱۳. تغییرات نگاتیویته بر حسب ثابت گاوس - بونه در حالیکه ناظر باب دور از افق سیاهچاله واقع شده است. (الف) $q_r = 1$ ، (ب) $q_r = 0.7$ ۶۳
- شکل ۳-۱۴. تغییرات نگاتیویته بر حسب ثابت گاوس - بونه در حالیکه ناظر باب در همسایگی افق سیاهچاله واقع شده است. (الف) $q_r = 1$ ، (ب) $q_r = 0.7$ ۶۳
- شکل ۳-۱۵. تغییرات نگاتیویته بر حسب بعد سیاهچاله در حالیکه ناظر باب دور از افق سیاهچاله واقع شده است. (الف) $q_r = 1$ ، (ب) $q_r = 0.7$ ۶۴
- شکل ۳-۱۶. تغییرات نگاتیویته بر حسب بعد سیاهچاله در حالیکه ناظر باب در نزدیکی افق سیاهچاله واقع شده است. (الف) $q_r = 1$ ، (ب) $q_r = 0.7$ ۶۴

شکل ۳-۱۷. بررسی تغییرات اطلاع رسانی کوانتومی بر حسب دمای هاوکینگ برای سه مقدار متفاوت $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (نقطه چین)، $\beta = \frac{1}{\sqrt{8}}$ (خط چین) و $\beta = \frac{1}{4}$ (خط). ۶۶

فصل اول

نظریه میدان کوانتومی در فضا زمان یک سیاه چاله متقارن کروی

مقدمه

از زمان پیدایش مکانیک کوانتومی، درهم تنیدگی کوانتومی به صورت یک معما برای فیزیکدانان به شمار می‌رفت. در سال ۱۹۲۴ هایزنبرگ اولین فرمول بندی ریاضی منسجم برای نظریه کوانتومی را ارائه داد هم‌چنین در سال ۱۹۲۷ او نشان داد که یک خاصیت تکمیلی بین مفاهیم کلاسیکی در مکانیک کوانتومی وجود دارد. به این صورت که اندازه‌گیری همزمان موقعیت و تکانه یک ذره غیر ممکن است (اصل عدم قطعیت هایزنبرگ). چندی بعد فیزیکدانانی مانند شرودینگر، بورن، جوردن، دیراک از این نظریات هایزنبرگ استفاده کردند. اینشتین، پودولسکی و روزن (EPR¹) در سال ۱۹۳۵ یک آزمایش ذهنی ترتیب دادند که به پارادوکس EPR معروف گردید. در این آزمایش به دنبال اثبات این نکته بودند که نقضی در کامل بودن مکانیک کوانتومی وجود دارد [۲۰]. این نقص به این معنی است که متغیرهای پنهانی در دنیای واقعی اطراف ما وجود دارند که فرمول بندی کوانتومی قادر به توصیف آن‌ها نیست. این مسئله خیر بدی برای مکانیک کوانتومی بود. استدلال آن‌ها این بود که اگر دو ذره درهم‌تنیده در حالت $|\varphi^+\rangle$ وجود داشته باشند:

¹Einstein-Podolsky-Rosen

$$|\varphi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle)$$

به نظر می‌رسد که اندازه‌گیری بر روی ذره اول، اندازه‌گیری بر ذره دوم را تحت تاثیر قرار می‌دهد. به عنوان مثال اگر آلیس ذره اول را به صورت $|0\rangle$ اندازه‌گیری کند باب نیز همان را اندازه‌گیری می‌کند (به همین ترتیب برای $|1\rangle$).

فرضیه متغیرهای پنهان تا سال ۱۹۶۴ هم‌چنان مورد بحث و بررسی قرار می‌گرفت تا زمانی که بل با طرح یک آزمون آزمایشی این فرضیه را تحت شرایطی به چالش کشید. بل نامساوی را بیان کرد که یک توزیع احتمالاتی باید در آن صدق کند. وی هم‌چنین نشان داد که دو سیستم کوانتومی درهم‌تنیده باید این نامساوی‌ها را نقض کنند. هم‌زمان با پارادوکس EPR، شرودینگر در پژوهش‌های خود به این نکته اشاره کرد که درهم‌تنیدگی تعریفی از آینده مکانیک کوانتومی است. در سال ۱۹۳۰ وان نیومن^۲ نشان داد که درهم‌تنیدگی می‌تواند اندازه‌گیری‌ها را بدون در نظر گرفتن نظریه احتمالات توضیح دهد. درهم‌تنیدگی به عنوان سرچشمه کلیدی اطلاعات کوانتومی قلمداد می‌شود. ترابرد کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و محاسبات کوانتومی بر وجود درهم‌تنیدگی کوانتومی تکیه دارد که با تناظرات کلاسیکی قادر به توصیف آن‌ها نیستند. به علاوه با استفاده از درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌ها، کامپیوترهای کوانتومی می‌توانند مسائل را سریعتر از کامپیوترهای کلاسیکی حل کنند.

مطالعه درهم‌تنیدگی در چارچوب‌های نسبیتی اخیرا بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۹]. در این فصل به مطالعه در هم-تنیدگی برای دو ناظر لخت و شتابدار پرداخته و چگونگی کاهش آن برای ناظر شتابدار با در نظر گرفتن تقریب تک بسامد بررسی می‌شود. در بخش ابتدایی این فصل ابتدا نظریه میدان کوانتومی را در فضا-زمان مینکوفسکی^۳ و سپس در فضا-زمان خمیده بررسی می‌کنیم. در بخش‌های بعدی نظریه مکانیک کوانتومی متعلق به یک سیاه‌چاله متقارن کروی مورد بحث قرار می‌دهیم و مدهای میدان‌های بوزونی و فرمیونی را در حضور یک سیاه‌چاله بررسی می‌کنیم. در بخش دوم درهم‌تنیدگی سیستم‌های بوزونی و فرمیونی را برای یک حلت کلی به دست می‌آوریم و در بخش سوم اطلاعات متقابل^۴ آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

²von Neumann

³Minkowski

⁴Mutual information

۱-۱- بررسی مدهای کوانتومی در فضا زمان تخت

۱-۱-۱- میدان بوزونی

یک میدان اسکالر حقیقی $\phi(t, x)$ که در هر نقطه از یک فضا زمان d بعدی تعریف شده است در معادله کلاین-گوردن^۵ که به شکل زیر تعریف می شود صدق می کند [۱۱]

$$(m^2 + \square)\phi(t, x) = 0 \quad (۱-۱)$$

m جرم میدان است و عملگر دالامبری با استفاده از متریک مینکوفسکی $\eta^{\mu\nu}$ به صورت $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ تعریف می شود. رابطه (۱-۱) را می توان با استفاده از چگالی لاگرانژی به صورت زیر به دست آورد

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - m^2 \phi^2) \quad (۲-۱)$$

بنابراین با مساوی صفر قرار دادن وردش کنش می توان به رابطه (۱-۱) دست یافت. یکی از مجموعه پاسخ های رابطه کلاین گوردن عبارتست از [۱۵]

$$u_k(t, x) \propto e^{ik \cdot x - i\omega t} \quad (۳-۱)$$

که در این رابطه $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$ و $k = |K|$. در صورتیکه پاسخ های بهنجار شده u_k در رابطه زیر صدق کند، می توان مدهای فرکانس مثبت و منفی را شناسایی کرد. به این صورت که اگر در معادله ویژه مقاداری (۴-۱) علامت بالایی (پایینی) ظاهر شود، مد فرکانس مثبت (منفی) است.

$$\partial_t u_k(t, x) = \mp i\omega u_k(t, x), \quad \omega > 0 \quad (۴-۱)$$

می توان حاصل ضرب اسکالر میان دو پاسخ کلی معادله میدان را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(۵-۱)$$

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2) &= -i \int \{ \phi_1(x) \partial_t \phi_2^*(x) - [\partial_t \phi_1(x)] \phi_2^*(x) \} d^{n-1}x \\ &= -i \int \phi_1(x) \vec{\partial}_t \phi_2^*(x) d^{n-1}x \end{aligned}$$

⁵Klein-Gordon

از این رو رابطه تعامدی زیر میان مدهای بهنجار شده (۳-۱) برقرار خواهد بود

$$(u_k, u_{k'}) = 0, \quad k \neq k' \quad (6-1)$$

اگر u_k را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$u_k = [2\omega(2\pi)^{n-1}]^{-1/2} e^{iK \cdot x - i\omega t} \quad (7-1)$$

بنابراین خواهیم دید که توابع u_k در روابط متعامدی زیر صدق می کند [۱۲]

$$(u_k, u_{k'}) = \delta^{n-1}(k - k') \quad (8-1)$$

یک سیستم دارای کوانتش کانونیک است اگر میدان ϕ را به صورت عملگر در نظر می گیریم و برای آنها روابط جابجایی در زمانهای یکسان را به صورت زیر وضع می کنیم

$$[\phi(t, x), \phi(t, x')] = 0 \quad (9-1)$$

$$[\pi(t, x), \pi(t, x')] = 0$$

$$[\phi(t, x), \pi(t, x')] = i\delta^{n-1}(x - x')$$

که در آن $\pi(t, x)$ تکانه همیوگ $\phi(t, x)$ است و به صورت زیر قابل تعریف است

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi \quad (10-1)$$

مدهای u_k که در رابطه (۷-۱) نشان داده شده است و همیوگ مختلط آنها تشکیل یک مجموعه متعامد و کامل را می دهند.

از این رو می توانیم میدان ϕ را بر اساس این پایه ها بسط دهیم

$$(11-1)$$

$$\phi(t, x) = \int (a_k u_k(t, x) + a_k^\dagger u_k^*(t, x))$$

عملگر a_k عملگر نابودی و عملگر a_k^\dagger عملگر خلق یک کوانتای میدان با عدد موج k است. با توجه به روابطی که برای

میدان ϕ و تکانه همیوگ π ذکر شده است می توان روابط زیر را برای عملگرهای a_k و a_k^\dagger بنویسیم

(۱۲-۱)

$$[a_k, a_{k'}] = 0$$

$$[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$$

با اعمال عملگر نابودی بر روی حالت خلا خواهیم داشت

$$a_k |0\rangle = 0, \quad \forall k. \quad (۱۳-۱)$$

و هم چنین با اعمال عملگر خلق a_k^\dagger بر روی حالت خلا اولین حالت برانگیخته به دست می آید که با $|1_k\rangle$ نشان داده می شود

$$|1_k\rangle = a_k^\dagger |0\rangle \quad (۱۴-۱)$$

۱-۲-۱- میدان های فرمیونی

در بخش گذشته به میدان اسکالر (بدون اسپین) پرداختیم اما در این بخش می خواهیم میدان ذرات با اسپین ۱/۲ را در نظر بگیریم. میدان فرمیونی با اسپین ۱/۲ دارای چگالی لاگرانژی زیر است

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i (\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi_{,\alpha} - \bar{\psi}_{,\alpha} \gamma^\alpha \psi) - m \bar{\psi} \psi \quad (۱۵-۱)$$

که در این رابطه $\bar{\psi}$ همیوگ دیراک از میدان ψ است ($\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$). هم چنین γ^μ ماتریس های دیراک است که در روابط پادجابه جایی صدق می کند

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta} \quad (۱۶-۱)$$

تغییرات $\bar{\psi}$ در کنش $S = \int \mathcal{L} d^n x$ معادله دیراک برای یک ذره جرم دار را نتیجه می دهد

$$i\gamma^\alpha \psi_{,\alpha} - m\psi = 0 \quad (۱۷-۱)$$

یک مجموعه کامل از پاسخ های میدان دیراک به صورت زیر به دست می آید

$$u_{k,s}(t, x) = \mathcal{N} u(k, s) e^{i(k \cdot x - \omega t)} \quad (۱۸-۱)$$

$$v_{k,s}(t, x) = \mathcal{N}v(k, s)e^{-i(k \cdot x - \omega t)}$$

که در این روابط ضریب بهنجارش عبارتست از

$$\mathcal{N} = \begin{cases} (m/\omega L^{n-1})^{1/2}, & m \neq 0 \\ (2\omega L^{n-1})^{-1/2}, & m = 0 \end{cases} \quad (19-1)$$

در این روابط $u(k, s)$ و $v(k, s)$ به ترتیب اسپینورهای انرژی مثبت و منفی هستند و در روابط تعامدی زیر صدق می کنند

(۲۰-۱)

$$u^\dagger(k, s)u(k, s') = v^\dagger(k, s)v(k, s') = \begin{cases} (\omega/m)\delta_{ss'}, & m \neq 0 \\ 2\omega\delta_{ss'}, & m = 0 \end{cases}$$

از این رو می توانیم میدان ψ را بر اساس این پایه ها بسط دهیم

$$\psi(t, x) = \sum_{\pm s} \sum_k [b_k(s)u_{k,s}(t, x) + d_k^\dagger(s)v_{k,s}(t, x)] \quad (21-1)$$

که در ضرب داخلی زیر صدق می کند

$$(\psi, \phi) = \int d^{n-1}x \bar{\psi}(t, x)\gamma_0\phi(t, x) \quad (22-1)$$

عملگرهای $b_k(s)$ و $d_k(s)$ و $b_k^\dagger(s)$ و $d_k^\dagger(s)$ در تمام روابط جز رابطه زیر پادجابیه جا شونده هستند

$$\{b_k(s), b_k^\dagger(s')\} = \{d_k(s), d_k^\dagger(s')\} = \delta_{ss'}\delta_{kk'} \quad (23-1)$$

با در نظر گرفتن هامیلتونی، تکانه خطی و تکانه زاویه ای و همچنین مقدار انتظاری آن ها در پایه های فوک، می توان نتیجه گرفت که $b_k^\dagger(s)$ عملگر خلق برای کوانتای میدان با تکانه k و انرژی ω و اسپین s است در حالیکه $d_k^\dagger(s)$ یک کوانتا با مد $-k$ و انرژی ω و اسپین s را نابود کند. به طور فیزیکی $b_k^\dagger(s)$ و $d_k^\dagger(s)$ به ترتیب به عملگرهای خلق برای الکترون ها و پوزیترون ها اشاره دارد.

۱-۲- نظریه میدان کوانتومی در فضا زمان خمیده:

۱-۲-۱- میدان اسکالر

برای بررسی نظریه میدان کوانتومی ابتدا چگالی لاگرانژی زیر را در نظر می گیریم

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}[-g(x)]^{1/2}\{g^{\mu\nu}(x)\phi(x)_{,\mu}\phi(x)_{,\nu} - [m^2 + \xi R(x)]\phi^2(x)\} \quad (24-1)$$

در این رابطه ϕ یک میدان اسکالر است و m جرم یک کوانتای میدان است. جفت‌شدگی میان میدان اسکالر و میدان گرانشی توسط عبارت $\xi R(x)\phi^2$ بیان می‌شود که در آن اسکالر ریچی و ξ یک عدد است. با صفر قرار دادن وردش کنش نسبت به میدان ϕ معادله میدان اسکالر به شکل زیر به دست می‌آید

$$[\square_x + m^2 + \xi R(x)]\phi(x) = 0 \quad (25-1)$$

دو مقدار ξ با اهمیت هستند یکی از این مقادیر $\xi = 0$ است که به جفت‌شدگی کمینه اشاره دارد و دیگری $\xi = \frac{1}{4}[(n-2)/(n-1)]$ متناظر با جفت‌شدگی همدیس است.

ضرب نرده‌ای که در بخش پیش بیان کردیم در اینجا به ضرب زیر تعمیم داده می‌شود [۱۱]

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int \phi_1(x) \vec{\partial}_\mu \phi_2^*(x) [-g_\Sigma(x)]^{1/2} d\Sigma^\mu \quad (26-1)$$

که در این رابطه $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$ است و n^μ یک بردار یکه رویه آینده است و روی ابر سطح Σ عمود است. رابطه (۲۵-۱) یک مجموعه پاسخ متعامد دارد که متعامداند

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} \quad (27-1)$$

$$(u^*_i, u^*_j) = -\delta_{ij}$$

$$(u_i, u^*_j) = 0$$

از این رو می‌توانیم میدان اسکالر ϕ را بر اساس این پایه‌ها بسط دهیم

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a^\dagger_i u^*_i(x)] \quad (28-1)$$

بنابراین میان عملگرها روابط جابه‌جایی زیر صادق است

$$[a_i, a^\dagger_j] = \delta_{ij} \quad (29-1)$$

از آنجایی که در فضا زمان خمیده تقارن‌های پوانکاره به صورت یکپارچه وجود ندارند بنابراین نمی‌توانیم مدهای با انرژی مثبت و منفی را تعریف کنیم. از این رو یک مجموعه جدید کامل و متعامد در نظر می‌گیریم و میدان را بر اساس آن‌ها بسط می‌دهیم

$$\phi(x) = \sum_i [\bar{a}_i \bar{u}_i(x) + \bar{a}_i^\dagger \bar{u}_i^*(x)] \quad (30-1)$$

این بسط از میدان اسکالر یک حالت خلا جدید $|\bar{0}\rangle$ را تعریف می‌کند

$$\bar{a}_j |\bar{0}\rangle = 0, \quad \forall j \quad (31-1)$$

از آنجایی که هر دو مجموعه متعامد بودند می‌توان مد جدید \bar{u}_i را بر اساس مد قبلی بسط داد

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*) \quad (32-1)$$

$$u_j = \sum_i (\alpha_{ji} \bar{u}_i - \beta_{ji} \bar{u}_i^*)$$

این روابط به روابط بوگولیوبف^۶ معروف است. α_{ji} و β_{ji} نیز ضرایب بوگولیوبف نامیده می‌شود و با استفاده از روابط (۱) - (۲۷) و (۳۲-۱) به شکل زیر به دست می‌آیند

$$\beta_{ji} = -(\bar{u}_i, u_j^*), \quad \alpha_{ji} = (\bar{u}_i, u_j) \quad (33-1)$$

حال با استفاده از روابط بسط میدان (۱) - (۲۸) و (۳۰-۱) روابط زیر را برای عملگرها به دست می‌آوریم [۱۲]

$$(34-1)$$

$$\bar{a}_j = \sum_i (a_{ji}^* a_i - \beta_{ji}^* a_i^\dagger)$$

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_i^\dagger)$$

ضرایب بوگولیوبف دارای ویژگی‌های زیر هستند

^۶Bogoliubov