

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد  
ریاضی کاربردی

## حل مسایل هدایت گرمایی معکوس با استفاده از

### روش سینک

توسط:

سیده طاهره هولاری

استاد راهنما:

دکتر رضا پورقلی

استاد مشاور:

دکتر علی عباسی ملایی

شهریور ۱۳۹۱

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

به نام خدا

## حل مسایل هدایت گرمایی معکوس با استفاده از روش

سینک

توسط:

سیده طاهره هولاری

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ  
درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکتر رضا پورقلی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان  
(استاد راهنما)

دکتر علی عباسی ملایی استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر  
دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر جواد قاسمیان استادیار ریاضی کاربردی گرایش آمار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور  
اول)

دکتر سید امین اصفهانی استادیار ریاضی محض گرایش سیستم‌های دینامیکی و نظریه معادلات دانشکده ریاضی و  
علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر مصطفی زارع خورمیزی استادیار ریاضی محض گرایش منطق ریاضی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه  
دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم بہ

..... تقدیم بہ

# سپاسگزاری

سپاسگزاری می‌کنم از .....

چکیده

## حل مسایل هدایت گرمایی معکوس با استفاده از روش

### سینک

به وسیله‌ی:

سیده طاهره هولاری

در این پایان‌نامه، یک روش عددی برای حل یک مسئله‌ی هدایت گرمایی معکوس با داده‌های دارای اختلال بر پایه‌ی روش سینک گالرکین مطرح می‌شود. یک جواب عددی پایدار برای این مسئله تعیین خواهد شد. به این منظور، یک سنسور را در یک نقطه‌ی داخلی از بدنه قرار داده و  $u(x, t)$  را در نقطه‌ی  $x = a$ ، به طوری که  $0 < a < 1$ ، اندازه‌گیری خواهیم کرد. نتایج عددی حاصل شده، بازدهی رویکرد موردنظر برای تخمین توابع مجهول مسئله‌ی معکوس را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: تابع سینک، مسائل معکوس، مسائل بد-وضع و روش‌های منظم‌سازی.

# فهرست مطالب

ه	فهرست مطالب
ز	فهرست جدول‌ها
ط	فهرست شکل‌ها
۱	۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۱	۱-۱ مقدمه . . . . .
۲	۲-۱ مسائل بد-وضع و خوش-وضع . . . . .
۲	۳-۱ دسته‌بندی مسائل معکوس . . . . .
۵	۴-۱ برخی از کاربردهای صنعتی مسائل هدایت گرمایی معکوس . . . . .
۸	۵-۱ مثال‌هایی از مسائل هدایت گرمایی معکوس . . . . .
۱۲	۲ روش منظم‌سازی برای حل دستگاه معادلات خطی
۱۴	۱-۲ مسائل بد-وضع . . . . .
۱۸	۲-۲ روش‌های منظم‌سازی . . . . .
۱۹	۳-۲ ماتریس‌های متعامد . . . . .
۱۹	۴-۲ ماتریس‌های معین مثبت . . . . .
۲۱	۵-۲ تجزیه مقدار تکین ماتریس (SVD) . . . . .
۲۴	۶-۲ فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت . . . . .
۲۷	۷-۲ ضرایب فیلتر . . . . .
۳۰	۸-۲ روش‌های انتخاب پارامتر منظم‌سازی . . . . .

۳۱	۳	روش سینک-گالرکین
۳۱	۱-۳	مقدمه
۳۶	۲-۳	حل مسأله هدایت گرمایی مستقیم
۴۰	۳-۳	گسسته‌سازی سیستم
۴۱	۴-۳	مسئله معکوس برای معادله گرما
۴۱	۵-۳	گسسته‌سازی سیستم
۴۲	۴	نتایج عددی
۴۲	۱-۴	مقدمه
۶۲		مراجع
۶۵		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۶۸		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی



## فهرست جدول‌ها

۴۳	۱-۴	مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی $p(t)$ با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۰ با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 4$ . . . . .
۴۳	۲-۴	مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی $p(t)$ با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۰ با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 8$ . . . . .
۴۴	۳-۴	مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی $p(t)$ با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۰ با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 16$ . . . . .
۴۶	۴-۴	مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی $p(t)$ با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۱ با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 4$ . . . . .
۴۶	۵-۴	مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی $p(t)$ با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۱ با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 8$ . . . . .
۴۷	۶-۴	مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی $p(t)$ با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۱ با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 16$ . . . . .
۴۹	۷-۴	مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی $p(t)$ با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۲ با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 4$ . . . . .
۴۹	۸-۴	مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی $p(t)$ با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۲ با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 8$ . . . . .
۵۰	۹-۴	مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی $p(t)$ با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۲ با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 16$ . . . . .
۵۳	۱۰-۴	مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی $p(t)$ با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۰ با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 4$ . . . . .

- ۱۱-۴ مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی  $p(t)$  با استفاده از منظم سازی تیخونوف مرتبه ی ۰ با داده ی  
 ۵۳ . . . . .  $M_x = ۸$  دارای اختلال هرگاه
- ۱۲-۴ مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی  $p(t)$  با استفاده از منظم سازی تیخونوف مرتبه ی ۰ با داده ی  
 ۵۳ . . . . .  $M_x = ۱۶$  دارای اختلال هرگاه
- ۱۳-۴ مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی  $p(t)$  با استفاده از منظم سازی تیخونوف مرتبه ی ۱ با داده ی  
 ۵۵ . . . . .  $M_x = ۴$  دارای اختلال هرگاه
- ۱۴-۴ مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی  $p(t)$  با استفاده از منظم سازی تیخونوف مرتبه ی ۱ با داده ی  
 ۵۵ . . . . .  $M_x = ۸$  دارای اختلال هرگاه
- ۱۵-۴ مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی  $p(t)$  با استفاده از منظم سازی تیخونوف مرتبه ی ۱ با داده ی  
 ۵۶ . . . . .  $M_x = ۱۶$  دارای اختلال هرگاه
- ۱۶-۴ مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی  $p(t)$  با استفاده از منظم سازی تیخونوف مرتبه ی ۲ با داده ی  
 ۵۸ . . . . .  $M_x = ۴$  دارای اختلال هرگاه
- ۱۷-۴ مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی  $p(t)$  با استفاده از منظم سازی تیخونوف مرتبه ی ۲ با داده ی  
 ۵۸ . . . . .  $M_x = ۸$  دارای اختلال هرگاه
- ۱۸-۴ مقایسه ی بین جواب دقیق و تقریبی  $p(t)$  با استفاده از منظم سازی تیخونوف مرتبه ی ۲ با داده ی  
 ۵۹ . . . . .  $M_x = ۱۶$  دارای اختلال هرگاه

## فهرست شکل‌ها

۶	مثالی از یک وسیله فضایی موشک در حال گردش، جهت تخمین شار حرارتی سطح . . . . .	۱-۱
۶	تقسیم مسأله هدایت گرمایی معکوس با یک سنسور منفرد به دو مسأله . . . . .	۲-۱
۹	نمای کلی پره توربین . . . . .	۳-۱
۳۶	رابطه‌ی بین دامنه‌های $D_E$ و $D_S$ . . . . .	۱-۳
۳۷	رابطه‌ی بین دامنه‌های $D_W$ و $D_S$ . . . . .	۲-۳
	مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۰ برای مسئله‌ی	۱-۴
۴۵	(۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 4$ . . . . .	۱-۴
	مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۰ برای مسئله‌ی	۲-۴
۴۵	(۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 8$ . . . . .	۲-۴
	مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۰ برای مسئله‌ی	۳-۴
۴۶	(۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 16$ . . . . .	۳-۴
	مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۱ برای مسئله‌ی	۴-۴
۴۸	(۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 4$ . . . . .	۴-۴
	مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۱ برای مسئله‌ی	۵-۴
۴۸	(۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 8$ . . . . .	۵-۴
	مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۱ برای مسئله‌ی	۶-۴
۴۹	(۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 8$ . . . . .	۶-۴
	مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۲ برای مسئله‌ی	۷-۴
۵۱	(۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه $M_x = 4$ . . . . .	۷-۴

- ۸-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۲ برای مسئله‌ی  
 ۵۱ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 8$  . . . . .
- ۹-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۲ برای مسئله‌ی  
 ۵۲ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 16$  . . . . .
- ۱۰-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۵ برای مسئله‌ی  
 ۵۴ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 4$  . . . . .
- ۱۱-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۵ برای مسئله‌ی  
 ۵۴ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 8$  . . . . .
- ۱۲-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۵ برای مسئله‌ی  
 ۵۵ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 16$  . . . . .
- ۱۳-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۱ برای مسئله‌ی  
 ۵۷ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 4$  . . . . .
- ۱۴-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۱ برای مسئله‌ی  
 ۵۷ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 8$  . . . . .
- ۱۵-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۱ برای مسئله‌ی  
 ۵۸ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 16$  . . . . .
- ۱۶-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۲ برای مسئله‌ی  
 ۶۰ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 4$  . . . . .
- ۱۷-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۲ برای مسئله‌ی  
 ۶۰ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 8$  . . . . .
- ۱۸-۴ مقایسه‌ی بین نتایج دقیق و تقریبی با استفاده از منظم‌سازی تیخونوف مرتبه‌ی ۲ برای مسئله‌ی  
 ۶۱ (۱۱.۳) با داده‌ی دارای اختلال هرگاه  $M_x = 16$  . . . . .

# فصل ۱

## معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

### ۱-۱ مقدمه

اگر هدف از حل مسئله در مسائل هدایت گرمایی، یافتن درجه حرارت با فرض معلوم بودن شرایط مرزی و آغازین مسئله در دامنه‌ی مسئله باشد، آن‌گاه چنین مسئله‌ای یک مسئله‌ی مستقیم است اما، اگر در حل مسئله، یافتن شرط یا شرایطی به‌جز درجه حرارت مسئله مدنظر باشد، آن‌گاه این مسئله به‌طور مستقیم قابل حل نبوده و برای حل آن نیازمند اندازه‌گیری دما در یک یا چند نقطه‌ی داخلی هستیم. در این صورت مسئله تبدیل به یک مسئله‌ی معکوس می‌شود. اگرچه تعریف رسمی و دقیقی از یک مسئله‌ی معکوس وجود ندارد ولی مفهوم آن در ریاضیات کاربردی مدرن به‌صورت وسیعی مورد استفاده قرار گرفته است. معمولاً در یک مسئله‌ی معکوس، کمیت‌هایی مانند چگالی، ضریب هدایت گرمایی، بار سطح، شکل رسانا با تغییرات فیزیکی رسانا یا هر محیط دیگر مشخص می‌شوند که می‌تواند تابعی از زمان، تابعی از شکل، ثابت و... باشد [۳].

مسائل معکوس، زیر مجموعه‌ای از مسائل اندازه‌گیری غیرمستقیم هستند. در واقع اندازه‌گیری‌های غیرمستقیم، ماهیت یک مسئله را توصیف می‌کند. این مسائل در زمینه‌های کاربردی پیش می‌آیند. در چنین مسائلی معمولاً اثرات غیرمستقیم پدیده موردنظر اندازه‌گیری می‌شود. مسائل معکوس جزء مسائل دشوار می‌باشند زیرا حساسیت زیادی نسبت به خطای مقادیر اندازه‌گیری شده دارند. برای یک مسئله‌ی معکوس می‌توان یک مدل ریاضی ارائه داد. اما فرایند حل یک مسئله‌ی معکوس بسیار دشوار بوده و معمولاً جواب دقیقی به‌دست نمی‌آید. بنابراین برای حل چنین مسائلی از روش‌های تقریبی مانند: روش‌های تکراری، تکنیک‌های منظم‌سازی، روش‌های تصادفی و شناسایی سیستم، روش‌هایی که جواب تقریبی را در زیرمجموعه‌ی جواب‌ها جستجو می‌کنند، تکنیک‌های تلفیقی و یا روش‌های عددی مستقیم استفاده می‌کنیم.

## ۲-۱ مسائل بد-وضع و خوش-وضع

فرض کنید یک مسئله به صورت زیر تعریف شده است

$$Au = g \quad (1.1)$$

در این جا  $u \in U$ ،  $g \in G$  و  $U$  و  $G$  فضاهای متریک و  $A$  یک عملگر است به طوری که  $AU \in G$  می باشد. در حالت کلی  $u$  می تواند برداری باشد که حالتی از یک پدیده را توصیف می کند و  $g$  خواص پدیده را نشان می دهد [۱۳].

یک مسئله ی خوش-وضع دارای شرایط زیر است

- جواب معادله (۱.۱) باید به ازاء هر  $g \in G$  موجود باشد.
- جواب معادله (۱.۱) باید یکتا باشد.
- جواب معادله (۱.۱) باید نسبت به اختلال سمت راست پایدار باشد، یعنی عملگر  $A^{-1}$  باید در سراسر فضای  $G$  تعریف شده و پیوسته باشد.

اگر یکی از شرایط بیان شده در مسئله برقرار نباشد آن گاه مسئله بد-وضع می باشد. برای مسائل بد-وضع، عملگر معکوس  $A^{-1}$  در دامنه اش،  $AU \subset G$ ، پیوسته نمی باشد، به این معنی که جواب معادله (۱.۱) به طور پیوسته به ورودی  $g \in G$  بستگی ندارد [۱۷]. به طور کلی می توان گفت که جواب یک مسئله بد-وضع لزوماً به طور پیوسته به داده های ورودی بستگی ندارد و ساختار جواب دارای ارتباط ضعیف با داده های ورودی است. به علاوه، خطاهای اندازه گیری شده ی کوچک می تواند سبب اختلالات بزرگ در جواب شود. بهترین مثال برای توضیحات بالا، اختلاف عددی جواب مسئله ی معکوس با داده ورودی دارای اختلال می باشد. بعضی از نکات جالب پیرامون مسائل بد-وضع را می توان در [۲] و [۲۸] یافت.

## ۳-۱ دسته بندی مسائل معکوس

مسائل حاکم در مهندسی که به فرموله ی معادلات با مشتقات جزئی یا معادلات انتگرالی می رسد، با شکل و اندازه ی دامنه ی مسئله، شرایط مرزی و آغازین، ویژگی های فیزیکی سیال مورد نظر مسئله، منبع های داخلی، شرایط خروجی و ورودی تعریف می شوند. همان طور که در بالا اشاره شد، اگر همه ی این اطلاعات معلوم باشد، مسئله از نوع مستقیم می باشد و به طور عمومی می توان آن را قابل حل و خوش-وضع در نظر گرفت. فرم کلی یک مسئله ی هدایت گرمایی به صورت زیر است

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla T) + Q_\nu, \quad (x, y, z) \in \Omega \subset R^3, \quad t \in (0, t_f], \quad (2.1)$$

$$T(x, y, z, t) = T_b(x, y, z, t) \quad \text{برای} \quad (x, y, z, t) \in S_D, \quad t \in (0, t_f], \quad (3.1)$$

$$-K \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} = q_b(x, y, z, t) \quad \text{برای} \quad (x, y, z, t) \in S_N, \quad t \in (0, t_f], \quad (4.1)$$

$$-K \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} = h_c(T(x, y, z, t) - T_e(x, y, z, t)) \quad (5.1)$$

$$\text{برای} \quad (x, y, z, t) \in S_R, \quad t \in (0, t_f],$$

$$T(x, y, z, t) = T_0(x, y, z) \quad \text{for} \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (6.1)$$

که  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  عملگر مشتق گرادیان در فضای سه بعدی می باشد.  $\rho$  نشان دهنده غلظت جرم  $c$  گرمای ویژه در حجم ثابت  $T$ ؛  $[J/kgK]$  دما  $k$ ؛  $[K]$  نشان دهنده ضریب هدایت گرمایی  $[kg/m^3]$ ؛  $Q_\nu$  نرخ تولید گرما در هر واحد حجم  $[W/m^3]$ ؛ اغلب به عنوان تابع منبع نامیده شده است؛  $\frac{\partial}{\partial n}$  به معنای مشتق نسبت به طول  $h_c$  نشان دهنده ضریب انتقال گرمایی  $[W/m^2K]$ ؛  $T_b$ ،  $q_b$ ،  $T_0$  توابع داده شده،  $T_e$  دمای محیطی و  $t_f$  زمان انتها می باشد. کران  $\partial\Omega$  از دامنه  $\Omega$  که به سه بخش مجزا توسط  $D$  برای شرایط مرزی دیریکله و  $N$  برای شرایط مرزی نیومن و  $R$  برای شرایط مرزی روبین نشان داده می شوند، تقسیم شده است؛  $S_D \cup S_N \cup S_R = \partial\Omega$ .

به علاوه، معرفی شرایط کرانه ای تابشی نیز امکان پذیر می باشد. اما در این جا شرط بیان شده به کار برده نشده است. معادله (۲.۱) با شرایط (۳.۱) تا (۶.۱) مسئله با مقادیر آغازین برای هدایت گرمایی ناپایدار را توصیف می کند. در حالتی که مسئله ایستا باشد معادله (۲.۱) معادله پواسون و هنگامی که تابع منبع  $Q_\nu$  برابر صفر باشد معادله لاپلاس می باشد. مسائل سهموی معکوس به انواع زیر تقسیم بندی می شوند

مسائل هدایت معکوس، انتقال گرمایی معکوس، تابش معکوس و تغییر فاز معکوس (انجماد یا ذوب) [۲۱].  
در این جا مسائل سهموی معکوس را بر پایه ی عوامل به وجود آورنده ی این مسائل به صورت زیر دسته بندی می کنیم

(۱) تعیین مقادیر مرزی مسائل معکوس،

(۲) تعیین مقادیر آغازین مسائل معکوس،

(۳) تعیین خصوصیات فیزیکی مسائل معکوس،

(۴) تعیین منبع در مسائل معکوس،

(۵) تعیین فرم مسائل معکوس،

### ۱-۳-۱ تعیین مقادیر مرزی مسائل معکوس

در این نوع از مساله‌ی معکوس، بخشی از مرز در شرایط مساله مجهول است. در عوض در تعدادی از نقاط داخلی دامنه‌ی مساله، دماهای اندازه‌گیری شده یا مقادیر پیش‌بینی شده‌ی دما و یا شارگرمایی معلوم می‌باشد. مقادیر اندازه‌گیری شده یا پیش‌بینی شده، جواب‌های داخلی نامیده می‌شوند. آنها می‌توانند در خط و یا سطح داخلی محدوده‌ی مساله به صورت مجموعه‌ای گسسته از نقاط معلوم باشند. اگر جواب‌های داخلی به عنوان مقادیر شارگرمایی معلوم باشند در این صورت دما در قسمتی از مرز معلوم می‌باشد. یعنی باید یکی از شرایط روبین یا دیریکله معلوم باشد. در مسایل ایستا، معکوس مساله برای معادله پواسون یا لاپلاس حل می‌شود. اگر دما به زمان بستگی داشته باشد در این صورت معادله (۲.۱) نقطه آغازین خواهد بود و می‌توان شرایط اضافی را به صورت زیر فرمول‌بندی کرد

$$T(x, y, z, t) = T_a(x, y, z, t) \quad \text{برای} \quad (x, y, z, t) \in L \in \Omega, \quad t \in (0, t_f], \quad (7.1)$$

یا

$$T(x_i, y_i, z_i, t_i) = T_{ik} \quad \text{برای} \quad (x_i, y_i, z_i) \in \Omega, \quad t_k \in (0, t_f], \quad (8.1)$$

در این جا  $k = 1, 2, 3, \dots, K, i = 1, 2, 3, \dots, I$  یک تابع معین و  $T_{ik}$  از مقادیر اندازه‌گیری شده به دست می‌آید. برای مشاهده‌ی مثال‌هایی از این نوع مسائل می‌توان به [۲۳] رجوع کرد.

### ۲-۳-۱ تعیین مقادیر آغازین مسائل معکوس

در این نوع از مسائل معکوس سهموی، شرط آغازین مسئله مجهول است یعنی در شرط (۶.۱) تابع  $T$  مجهول است. برای یافتن توزیع دمای آغازین، باید یک میدان گرمایی در دامنه‌ی مورد نظر برای  $t > 0$  معلوم باشد. یعنی به جای شرط (۶.۱) شرطی به فرم زیر داریم

$$T(x, y, z, t_{in}) = T(x, y, z) \quad \text{برای} \quad (x, y, z) \in \Omega \quad t_{in} \in (0, t_f),$$

در برخی از مقالات به جای شرط (۴.۱) دماهای اندازه‌گیری شده روی بخشی از مرز استفاده می‌شود. [۲۳]

### ۳-۳-۱ تعیین خصوصیات فیزیکی مسائل معکوس

تعیین خصوصیات فیزیکی، دسته‌ای دیگر از مسائل هدایت گرمایی معکوس را به وجود می‌آورد. ضرایب می‌توانند به مکان یا به دما وابسته باشند. در بعضی موارد فقط وابستگی به زمان، مدنظر است. همچنین در مواردی که خصوصیات فیزیکی مسئله تعیین می‌شود، برخی از اطلاعات اضافی شامل دما و یا شارش گرما در دامنه‌ی مسئله معلوم است. معمولاً دماهای اندازه‌گیری شده در نقاط داخلی دامنه در دست است [۳۴].



### ۴-۳-۱ تعیین منبع در مسائل معکوس

در دسته‌ای دیگر از مسائل معکوس سهموی، منبع  $Q_r$ ، مجهول می‌باشد. در بسیاری موارد مقادیر دما در نقاط اختیاری دامنه، به‌عنوان شرط اضافی در نظر گرفته می‌شود. معمولاً این مقادیر با اندازه‌گیری به‌دست می‌آیند، شرط (۸.۱) را ببینید. همچنین مقادیر اندازه‌گیری شده و یا پیش‌بینی شده دما و شارش گرمایی در قسمتی از مرز می‌تواند به‌عنوان شرط اضافی مسئله در نظر گرفته شود. دسته‌ی دیگری از مسائل، مربوط به منبع متحرک با توان نامعلوم می‌باشند. چنین مسائلی را می‌توان در [۱۲] مشاهده کرد.

### ۵-۳-۱ تعیین فرم مسائل معکوس

در چنین مسائلی شرط یا شرایط کرانه‌ای مجهول مسئله، متحرک است. در میان مسائل معکوس، حل عددی چنین مسائلی بسیار دشوار می‌باشد زیرا گسسته‌سازی آن‌ها منجر به یک دستگاه معادلات غیرخطی می‌شوند، برای دیدن چند مثال از چنین مسائلی به [۶] رجوع کنید.

## ۴-۱ برخی از کاربردهای صنعتی مسائل هدایت گرمایی معکوس

تحقیقات بر روی مسائل هدایت گرمایی معکوس و استفاده از آن‌ها در کاربردهای صنعتی به دهه ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ میلادی بر می‌گردد. از جمله این کاربردها می‌توان به عملیات و مکانیزم گرمایی آیرودینامیک اشاره کرد. گرمای آیرودینامیکی هواپیما (فضای درون توربین) آنقدر بالاست که اندازه‌گیری مستقیم حرارت سطحی آن توسط حسگرها امکان‌پذیر نیست، بنابراین در چنین وضعیتی، حسگرها را زیر سپر تشعشع قرار می‌دهند و درجه حرارت سطح داغ را توسط تحلیل مسائل هدایت گرمایی معکوس تخمین می‌زنند [۳۴، ۲۷، ۱۰].

برخی از کاربردهای مسائل هدایت گرمایی معکوس عبارتند از: تخمین منبع حرارتی پر قدرت<sup>۱</sup> در یک ورقه پهن یا یک میله، تخمین شرایط سطحی نامعلوم، تخمین خواص فیزیکی مواد از جمله ضریب هدایت گرمایی  $k$  و ظرفیت ویژه گرمایی  $\rho c_p$  و تخمین درجه حرارت در موتورهای درون سوز.

در زیر به معرفی و شرح چند کاربرد صنعتی مسائل هدایت گرمایی معکوس می‌پردازیم.

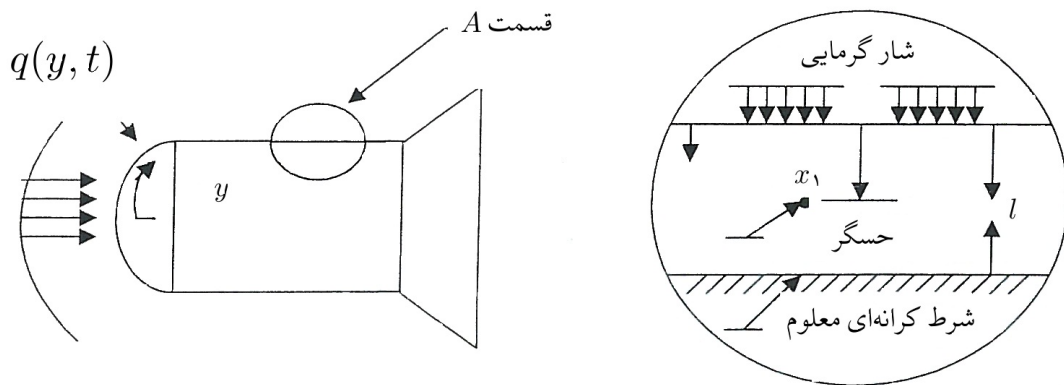
### ۱-۴-۱ تخمین شار گرمایی سطحی در یک شاتل فضایی

یک موشک فضاپیما یا یک شاتل فضایی که در فضا در حال گردش است را در نظر بگیرید. هدف تخمین شار گرمایی سطح شاتل، با استفاده از اندازه‌گیری دمای به‌دست آمده توسط یک حسگر است که در موقعیت  $x = x_1$  نصب شده است، شکل (۱-۱).

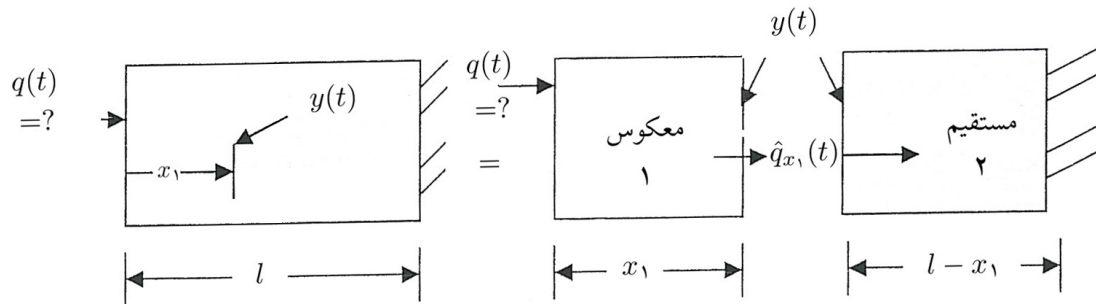
<sup>۱</sup>Strength of a time-varying heat source

اندازه‌گیری‌ها در لحظه‌های مجزا و گسسته  $t_i$  به دست می‌آید، دماهای اندازه‌گیری شده با  $y_i$  نمایش داده می‌شوند، مقدار دقیق شار گرمایی سطح را با  $q_i$  و شار سطح تخمین زده شده را با  $\hat{q}_i$  که متناظر با لحظه  $t_i$  می‌باشد، نشان می‌دهیم.

برای تخمین شار گرمایی در این شاتل، لازم است که یک مدل ریاضی از روند انتقال گرما در دسترس باشد. برای این منظور قسمتی از پوسته را در نظر می‌گیریم و مدل ریاضی مسأله را روی این قسمت پیاده‌سازی می‌کنیم.



شکل ۱-۱: مثالی از یک وسیله فضایی موشک در حال گردش، جهت تخمین شار حرارتی سطح



شکل ۱-۲: تقسیم مسأله هدایت گرمایی معکوس با یک سنسور منفرد به دو مسأله

فرض کنید این قسمت از یک ماده ساخته شده باشد و علاوه بر آن همگن و ایزوتروپیک باشد، به طوری که بتوان آن را به عنوان یک قطعه فلزی مسطح در نظر گرفت. در این صورت مدل ریاضی برای تابع  $u$  به صورت زیر

می‌باشد ( توضیح بیشتر راجع به این مسأله در مرجع [۴] ارائه شده است ).

$$\begin{cases} ku_{xx} = (\rho c)u_t, & 0 < x < l, t > 0, \\ -ku_x = q(t), & x = 0, t \geq 0, \\ u_x = 0, & x = l, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, t = 0, \end{cases}$$

در این مسأله به دلیل تقسیم بدنه گرم شده به دو قسمت مجزا، می‌توان مسأله را به دو مسأله متفاوت تقسیم کرد. یک مسأله، مربوط به قسمتی از بدنه است که در فاصله  $x = x_1$  تا  $x = l$  می‌باشد، که می‌تواند به عنوان مسأله مستقیم تحلیل شود زیرا شرایط مرزی در هر دو کران معلوم هستند. یعنی در مکان  $x_1$  شرط  $u(x_1, t) = y(t)$  و در  $x = l$  شرط  $u_x = 0$  تعریف شده است.

با استفاده از مسأله مستقیم شار گرمایی در  $x = x_1$  می‌تواند از جواب توزیع دما در  $x_1 \leq x \leq l$  و با استفاده از شرط  $\hat{q}_{x_1} = -ku_x |_{x=x_1}$  محاسبه شود.

چنین شار گرمایی باید بدنه قسمت (۱) را ترک کند در نتیجه در کران  $x = x_1$  در بدنه قسمت (۱) دو شرط مشخص شده است و در کرانه  $x = 0$  هیچ شرط معلوم و مشخصی تعریف نشده است، در مسأله معکوس (بدنه قسمت ۱) توزیع دمای  $y(t)$  مورد نظر نیست، بلکه با توجه به دانستن دمای تخمین زده شده به وسیله حسگر، هدف یافتن شار گرمایی  $q(t)$  است. شکل‌های (۱-۱) و (۲-۱) چگونگی تقسیم بدنه یک جسم جامد به دو قسمت مجزا را نشان می‌دهد.

مسأله اخیر را برای حالتی که بدنه موشک از چند ماده متفاوت ساخته شده است و در نتیجه نیاز به جایگذاری چند حسگر دارد می‌توان به کار گرفت.

#### ۲-۴-۱ تخمین خواص گرمایی پلیمرها

برای تعیین خواص گرمایی پلیمرها مطالعات و تحقیقات فراوانی در رشته مهندسی پزشکی انجام می‌شود، که مهمترین آن‌ها خواص ضریب هدایت گرمایی، ضریب نفوذ گرمایی و گرمای ویژه می‌باشند. در این زمینه در سال ۱۹۹۳، شای<sup>۲</sup> ضریب هدایت گرمایی جامدات و تروویسان<sup>۳</sup> ضریب هدایت گرمایی نوعی ماده خاص موسوم به Saturated porous media را اندازه‌گیری کردند. در سال ۱۹۹۶ کاروالهو<sup>۴</sup>، ضریب هدایت گرمایی پلیمرها را اندازه‌گیری کرد ( توضیحات بیشتر در ارتباط با این کاربرد در مراجع [۲۲،۵] آمده است ).

<sup>۲</sup>Shai

<sup>۳</sup>Trevisan

<sup>۴</sup>Carvalho

### ۳-۴-۱ برخی کاربردهای دیگر

شار گرمایی در سطح جامد موشک<sup>۵</sup> در نزدیکی دهانه آن، به آسانی می‌تواند از مقدار  $\frac{20 MW}{M^2}$  تجاوز کند که این از لحاظ مقدار، بسیار زیاد است و در نتیجه اندازه‌گیری مستقیم شرایط، از جمله شار گرمایی و دمای سطح بسیار مشکل می‌باشد، شرکت‌های هوا فضا در دهه هشتاد میلادی برای نخستین بار از تکنیک‌های معکوس، جهت تخمین شار گرمایی و دمای نامعلوم سطح استفاده کردند.

یک کاربرد دیگر از مسائل هدایت گرمایی معکوس در تماس سطوح فلزی در حال چرخش به کار گرفته می‌شود و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد.

در بسیاری از دستگاه‌ها و ماشین آلات مکانیکی نظیر موتورهای خودرو و ماشین‌های چاپ، برخی از قطعات با برخی دیگر از قطعات در تماس مستقیم می‌باشند، نوعی از تماس وقتی رخ می‌دهد که یک قطعه ثابت باشد و قطعه دیگر ضمن گردش حول محور خود با قطعه اول در تماس مستقیم باشد. در محل اتصال و تماس این دو قطعه فلزی بر اثر اصطکاک زیاد، گرمای زیادی تولید می‌شود که در بسیاری از اوقات، اندازه‌گیری آن بسیار مشکل است. برای برآورد این دما از مسائل هدایت گرمایی معکوس استفاده می‌شود، این کاربردها را می‌توان به طور مفصل در مراجع [۲۴، ۲۹] پیدا کرد.

### ۵-۱ مثال‌هایی از مسائل هدایت گرمایی معکوس

#### ۱-۵-۱ مسائل معکوس برای پره توربین کولرگازی

فرض می‌کنیم مسئله ایستای زیر، درباره‌ی پره توربین کولرگازی است (شکل (۳-۱)) در محدوده‌ی داخلی  $\Gamma_i$  از مقطع عرضی پره، دمای توزیع شده را می‌یابیم،  $T|_{\Gamma_i}$  اختلالات ضریب انتقال گرما در  $\Gamma_i$  می‌باشد، با شرط

$$T_o - \varepsilon_T \leq T(s) \leq T_o + \varepsilon_T$$

در این جا  $\varepsilon_T$ ، مقادیر اندازه‌گیری شده دما و  $s$  مختصات نرمال شده‌ی طول محیط است. (نقاط سیاه در شکل (۳-۱) نشان‌دهنده‌ی ابتدا و انتهای ناحیه داخلی و خارجی می‌باشند، مختصات در خلاف جهت عقربه‌های ساعت درجه‌بندی شده است) توزیع ضریب انتقال گرما در سطح خارجی،  $h_c|_{\Gamma_o}$ ، معلوم است،  $T_{f_o} = 1350^\circ C$ ،  $T_{f_i} = 780^\circ C$  و  $T_o = 1100^\circ C$ ، به‌ازای ترانس اندازه‌گیری دما ثابت می‌ماند به‌جز در دماهای بالاتر از  $10^\circ C$ . به‌علاوه، دمای سیال داخل و خارج،  $T_{f_o}$  و  $T_{f_i}$  معلوم می‌باشند [۸]. در این مثال، مجهولات  $T|_{\Gamma_i} = ?$  و  $h_c|_{\Gamma_i} = ?$  می‌باشند. جواب این مسئله جزو توابع برآورد معادله انرژی

$$\nabla(k \nabla T) = 0,$$

با فرض ثابت بودن  $k$  می‌باشد.

<sup>۵</sup>Rocket