بسم اللّٰه الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

مسائل برنامه ریزی غیر هموار

مؤلف:
ملیحه زندوکیلی

استاد راهنما:
دکتر علیرضا دعاگویی

استاد مشاور:
دکتر غلامرضا آقاملائی

شهریور ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: ملیحه زندوکیلی	امضاء:
استاد راهنما:دکتر علیرضا دعاگوئی	امضاء:
استاد مشاور:دکتر غلامرضا آقامولائی	امضاء:
داور اول : دکتر حسین محبی	امضاء:
داور دوم: دکتر اکبر نظری	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی: حبیب الله سعیدی	امضاء:

تقدیم به

تقدیم به مادر مهربانم و پدر بزرگوارم

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارندگان در شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

سپاس از پدر و مادر عزیزم ، این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بودند؛

از جناب آقای دکتر علیرضا دعاگویی که زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از اساتید فرزانه و دلسوز، جناب آقای دکتر حسین محبی و جناب آقای دکتر اکبر نظری که زحمت داوری این رساله را برعهده داشتند؛ کمال تشکر وقدرانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید .

مقدمه

در مطالعه توابع برداری، بردار های گرادیان و ماتریس های ژاکوبی نقش بسیار مهمی دارند. این ماتریسها در پیشرفت بسیاری از روش های ریاضی ومحاسباتی نقش دارند. ماتریس های ژاکوبی همواره وجود ندارند، بخصوص هنگامی که تابع مشتقپذیر نباشد. یک نوآوری قابل ملاحظه ای که اخیرا در علوم ریاضی اتفاق افتاده است، استفاده از ریاضیات غیر هموار است که در واقع توسیع ریاضی هموار، می باشد. در واقع ریاضی غیر هموار یک ابزار آنالیز مدرن در بسیاری از زمینه های ریاضی و مهندسی می باشد. در راستای اهمیت مطالعه توابع برداری غیر هموار، در این پایان نامه سعی بر این شده که یک تعریف جامع از ماتریس های تعمیم یافته ژاکوبی و کاربردهایش بیان شود. در واقع مطالعه توابع برداری غیر هموار انگیزه ای شد تا افرادی مانند لوک به مطالعه ی ریاضی غیر هموار با استفاده از ماتریس هایی به جای ماتریس های ژاکوبی بپردازند. به مجموعه این ماتریس ها، شبه ژاکوبی می گویند. در واقع شبه ژاکوبی، زیر مجموعه ای بسته از ماتریس ها می باشد که همواره وجود دارد. این مجموعه ماتریس ها، توسیع مشتق کلاسیک می باشند و همچنین یک روش اصولی برای محاسبات غیر هموار فراهم می کنند. مفهوم شبه ژاکوبی اولین بار توسط جیاکیومر و لوک[1] در سال۱۹۹۸ ارائه شد [۶]

بعدا حالت هایی از شبه ژاکوبی مانند شبه ژاکوبی گاتو و فرشه توسط لوک معرفی شد[۱۳]. از کاربرد های شبه ژاکوبی می توان در قضیه نگاشت باز، قضیه تابع ضمنی

[1] V. Jeyakumar and Luc

و تابع معکوس اشاره کرد. برای دیدن این قضایا می توانید به [۲]، [۱۱]و [۵] مراجعه کنید. همچنین در این پایان نامه با مفهوم ماتریس پوشا آشنا می شوید و مفهوم هم پوشائی برای مجموعه ای از ماتریس ها تعریف می کنیم. با استفاده از مفهوم هم پوشائی و شبه ژاکوبی، قضیه مهم نگاشت درونی محدب را که توسط لوک و جیاکیومر مطرح شد [۷] را بیان و اثبات می کنیم. این قضیه مهم نقشی اساسی در مسائل بهینه سازی پیوسته بازی می کند.

یکی دیگر از مسائلی که در سال های اخیر مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته، مسائل بهینه سازی می باشد. در واقع مسئله بهینه سازی، یک مسئله ریاضی شامل تابع هدف و چندین قید می باشد که قصد بهینه سازی آن را داریم. بهینه سازی پیوسته، بهینه کردن مسائلی با تابع هدف و قیود پیوسته می باشند. مسائل بهینه سازی پیوسته همواره در مدیریت، صنعت، مهندسی و ریاضیات کاربرد دارند.در سال۱۹۵۱ کان و تاکر شرط لازم برای اینکه یک مسئله بهینه سازی با تابع هدف و قیود مشتقپذیر دارای جواب بهینه باشد، مطرح کردند.در این سال ها بحث بر روی مسائلی می باشد که توابع آن ها لزوما مشتقپذیر نمی باشند، بلکه می توانند پیوسته یا به طور موضعی لیپ شیتز باشند. در این پایان نامه قصد داریم با استفاده از تعریف شبه ژاکوبی و خواص آن و همچنین مفهوم هم پوشایی، شرایط لازم بهینگی بهینه سازی پیوسته را بیان کنیم. در این زمینه افراد مختلفی فعالیت داشتند از جمله می توان به افرادی مانند کلارک[۲] [۲] ،وارگ[۳] [۱۷] ،تریمان[۴] [۱۶] اشاره کرد.

[۲] F. H. Clark

[۳] X. Warge

[۴] J. S. Treiman

چکیده

در این رساله ابتدا به معرفي مفهوم شبه ژاکوبي و بررسی بعضي از کاربردهاي آن مي پردازیم. بعضي از انواع شبه ژاکوبي مانند شبه ژاکوبي فرشه، گاتو و شبه ژاکوبي جزئي بخوبي مطالعه شده و در ادامه آن با استفاده از قوانین زنجیري، شبه ژاکوبي بعضي از توابع محاسبه مي شود. مفهوم پوشائي و هم پوشائي ماتریس ها را ارائه کرده و بوسیله، آن قضیه مهم نگاشت دروني محدب را بیان و اثبات مي کنیم. در آخر بوسیله شبه ژاکوبي ها شرایط لازم بهینگي مسئله برنامه ریزي ناهموار را بیان مي کنیم.

کلمات کلیدی: *بهینگی، پوشائی، هم پوشائی،شبه ژاکوبی*

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات وپیش نیاز ها

۱.۱ مقدمه

در این فصل قضایای مورد نیاز در فصول بعدی اعم از (قضایای مربوط به جدا سازی مجموعه های محدب، مجموعه های محدب و توابع محدب وحالت های خاصی از قضیه هان -باناخ)به طور خلاصه و بدون اثبات ارائه می شوند. برای درک بیشتر وبهتر مفاهیم قضایا می توانید به مراجع داده شده مراجعه کنید. [۱، ۲، ۸].

۲.۱ مجموعه های محدب و قضایای مربوط به آن

تعریف ۱.۲.۱. گوی واحد یکه بسته در $\mathbb{R}^n$ را به این صورت تعریف می کنیم:

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| \leq ۱\}$$

و گوی واحد یکه باز در $\mathbb{R}^n$ را به این صورت تعریف می کنیم:

$$intB_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| < ۱\}$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید A زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. گوئیم A مجموعه ای محدب است اگر به ازای هر دو نقطه در A پاره خط واصل آن دو نقطه در A .باشد به عبارت دیگر برای هر $x, y \in A$ و به ازای هر $\lambda \in [\circ, ۱]$، داشته باشیم $\lambda x + (۱ - \lambda) y \in A$.

از تعریف، مستقیم نتیجه می شود که اشتراک مجموعه های محدب، ضرب دکارتی مجموعه های محدب، تصویر و تصویر معکوس یک مجموعه محدب تحت یک نگاشت خطی ، درون و بستار یک مجموعه محدب، محدب هستند.

تعریف ۳.۲.۱. غلاف محدب مجموعه A به صورت زیر تعریف می شود :

$$co(A) := \left\{ \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i x_i \ : \ x_i \in A, \lambda_i \geqslant \circ, i = ۱, ..., k, \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i = ۱ \right\}$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و U یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^n$ باشد. گوئیم تابع ϕ روی U با ثابت $k > 0$ لیپ شیتز است اگر به ازای هر $x, y \in U$

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant k\|x - y\|.$$

توابع لیپ شیتز همواره پیوسته هستند اما لزوما مشتقپذیز نیستند.

تعریف ۵.۲.۱. . گوئیم تابع $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در x به طور موضعی لیپ شیتز است اگر $k > 0$ و $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x, y \in x + \delta(intB_n)$،

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant k\|x - y\|.$$

قضیه ۶.۲.۱. *(رادماچر)*[1] *فرض کنید* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *تابعی به طور موضعی لیپشیتز در* x *باشد.آنگاه تابع* f *تقریبا همه جا مشتقپذیر است.*

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. تابع f را محدب گوئیم اگر به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

قضیه ۸.۲.۱. *(کاراتئودوری)*[2] *فرض کنید* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *یک مجموعه ناتهی باشد . آنگاه هر عضو دلخواه در غلاف محدب* A *را می توان به صورت ترکیب محدب حداکثر* $(n + 1)$ *عضو* A *نوشت.*

قضیه ۹.۲.۱. *فرض کنید* $A \subset \mathbb{R}^n$ *مجموعه ای فشرده باشد. آنگاه* $co\,(A)$ *نیز فشرده می باشد.*

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض کنید* C *یک مجموعه محدب باشد، بطوریکه* $0 \in cl(C)$ *آنگاه دنباله صعودی از مجموعه های بسته محدب مانند* $\{D_k\}$ *وجود دارد بطوریکه*

---

[1] Rademacher

[2] Caratheodory

$$0 \in D_k \subseteq C \cup \{0\}; \quad C \subseteq cl[\cup_{k=1}^{\infty} D_k].$$

تعریف ۱۱.۲.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را همگن مثبت گوئیم ، هر گاه

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را زیر جمعی نامیم هر گاه به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$،

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

۳.۱ توابع نیم پیوسته بالائی و نیم پیوسته پایینی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^n$ باشد. گوئیم f نیم پیوسته پایینی در a است اگر به ازای هر $K \in \mathbb{R}$ که $K < f(a)$ ، $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $x \in (a + \delta(intB_n))$، $f(x) > K$.

تابع f نیم پیوسته پایینی گوییم اگر در هر نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ نیم پیوسته پایینی باشد.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^n$ باشد. گوئیم f نیم پیوسته بالائی در x است اگر به ازای هر $K \in \mathbb{R}$ که $K > f(a)$ ، $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $x \in (a + \delta(intB_n))$، $f(x) < K$.

تابع f نیم پیوسته بالائی گوییم اگر در هر نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ نیم پیوسته بالائی باشد.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. قرار دهید:

$$\liminf_{x \to a} f(x) := \sup_{U} \{inf\ f(x) | x \in U \setminus \{a\}\}$$

جائی که U همسایگی دلخواه a می باشد. که این تعریف معادل است با:

$$\liminf_{x \to a} f(x) = \inf \left\{ \lim_{n \to \infty} f(x_n) \ : \ x_n \to a \right\}$$

جائیکه $lim_{n\to\infty} f(x_n)$ موجود باشد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. تعریف می شود:

$$\limsup_{x\to a} f(x) := \inf_U \{\sup f(x) | x \in U \backslash \{a\}\}$$

جائی که U همسایگی دلخواه a است. که این تعریف معادل است با:

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \sup \left\{ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ : \ x_n \to a \} \right\}$$

جائیکه $lim_{n\to\infty} f(x_n)$ موجود باشد.

تعریف ۵.۳.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \to ۲^{\mathbb{R}^n}$ را که با نماد $f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ نمایش می دهیم، یک تابع مجموعه مقدار می نامیم.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید $F : R^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ تابع مجموعه مقدار باشد. تابع F در نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ نیم پیوسته بالائی است اگر به ازای هر $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر $x' \in (x + \delta B_n)$ داریم

$$F(x') \subseteq F(x) + \epsilon B_m.$$

فصل ۲

ماتریس های شبه ژاکوبی

۱.۲ مقدمه

در این فصل ماتریس های شبه ژاکوبی را برای توابع پیوسته معرفی می کنیم. چندین مشتق جهتی را تعریف می کنیم که در بعضی از قضایای فصل چهار کاربرد دارند و همچنین انواع شبه ژاکوبی ها مانند شبه ژاکوبی گاتو، فرشه را معرفی می کنیم.

فرض کنید $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ فضای ماتریس های $m \times n$ با درایه های حقیقی باشد.هر ماتریس $m \times n$ مانند $M_{m\times n}$ را می توان به صورت یک تبدیل خطی در نظر گرفت:

$$M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

بطوریکه $M(x) \in \mathbb{R}^m$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$.

همانند تبدیل های خطی ، نرم تابع M به صورت زیر بیان می شود:

$$\|M\| = \sup_{\|x\|\leq ۱} \|M(x)\|,$$

که در واقع این نرم معادل است با نرم اقلیدسی:

$$\|M\| = (\|M_۱\|^۲ + ... + \|M_n\|^۲)^{\frac{۱}{۲}},$$

جائیکه $M_۱, ...M_n$ ستون های ماتریس M هستند.

تعریف ۱.۱.۲. گوی واحد یکه بسته در فضای $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$B_{m\times n} = \{M \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \|M\| \leq ۱\}$$

۲.۲ شبه ژاکوبی

در ابتدا به معرفی مشتق جهتی دینی [۱] و خواص آن می پردازیم. این مشتق لازمه تعریف مجموعه شبه ژاکوبی است.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $x, u \in \mathbb{R}^n$. مشتق جهتی بالائی دینی تابع ϕ در نقطه x در جهت u بدین صورت تعریف می شود:

$$\phi^+(x; u) := \limsup_{t \downarrow \circ} \frac{\phi(x + tu) - \phi(x)}{t}.$$

به طور مشابه، مشتق جهتی پایینی دینی تابع ϕ در نقطه x در جهت u بدین صورت تعریف می شود:

$$\phi^-(x; u) := \liminf_{t \downarrow \circ} \frac{\phi(x + tu) - \phi(x)}{t}$$

مشتق جهتی بالائی و پایینی دینی می توانند مقادیر $-\infty, +\infty$ اختیار کنند. اگر مقادیر مشتق جهتی بالائی وپایینی تابع ϕ در نقطه x متناهی باشند، تابع ϕ پیوسته است، اما عکس این مطلب درست نیست:

مثال ۲.۲.۲. تابع $\phi(x) = \sqrt{|x|}$ در نقطه $x = \circ$ پیوسته می باشد. اما مقدار مشتق جهتی بالایی وپایینی دینی تابع ϕ در جهت $u = ۱$:

$$\lim_{t \downarrow o} \frac{\phi(t)}{t} = \frac{\sqrt{|t|}}{t} = \infty$$

بنابراین $\phi^+(\circ, ۱) = \infty$ و $\phi^-(\circ, ۱) = \infty$. که نشان می دهد این مقادیر متناهی نیستند.

یکی از ویژگی های مشتقات جهتی دینی این است که همواره وجود دارد حتی موقعی که تابع پیوسته نباشد این ویژگی کار کردن با این مشتق را آسانتر می کند.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. گوئیم f مشتقپذیر گاتو است،اگرماتریسی

[۱] Dini directional derivatives

مانند $M_{m\times n}$ وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر $u \in \mathbb{R}^n$،

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} = M_{m\times n}(u). \qquad (۱.۲)$$

در این حالت $M_{m\times n}$ مشتق گاتو تابع f در نقطه x می نامیم.

در این قسمت مفهوم شبه ژاکوبی را برای توابع پیوسته بیان می کنیم. ماتریس های شبه ژاکوبی کاربرد بسیار مهمی در حل مسائل برنامه ریزی غیر هموار دارند.

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تابعی پیوسته باشد.مجموعه ناتهی بسته $\partial f(x) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ را یک شبه ژاکوبی تابع f در نقطه x می نامیم، اگر به ازای هر $u \in \mathbb{R}^n$ و $v \in \mathbb{R}^m$:

$$(vf)^+(x;u) \leq \sup_{M\in\partial f(x)} \langle v, M(u)\rangle, \qquad (۲.۲)$$

جائیکه vf تابعی حقیقی مقدار می باشد:

$$(vf) = \sum_{i=1}^{m} v_i f_i(x). \qquad (۳.۲)$$

هر عضو مجموعه $\partial f(x)$ را یک ماتریس شبه ژاکوبی تابع f در نقطه x می نامیم.

اگر در رابطه (۲.۲) تساوی برقرار باشد، به مجموعه $\partial f(x)$ شبه ژاکوبی منظم تابع f در نقطه x گفته می شود.

مثال ۵.۲.۲. فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تعریف می کنیم:

$$f(x, y) = (|x|, |y|).$$

واضح است که

$$\partial f(\circ,\circ)=\left\{\begin{pmatrix}۱ & \circ\\ \circ & ۱\end{pmatrix},\begin{pmatrix}۱ & \circ\\ \circ & -۱\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-۱ & \circ\\ \circ & ۱\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-۱ & \circ\\ \circ & -۱\end{pmatrix}\right\}$$

یک شبه ژاکوبی تابع f در مبدا است.

قضیه ۶.۲.۲. *فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ تابعی پیوسته باشد. اگر f مشتق‌پذیر گاتو باشد، آنگاه $\nabla f(x)$ یک شبه ژاکوبی تابع f در نقطه x می باشد.*

برهان. ابتدا ثابت می کنیم:

$$\lim_{t\uparrow\circ}\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}=Mu.$$

هنگامی $t\uparrow\circ$ درنتیجه $-t\downarrow\circ$ ، پس قرار دهید $-t=k$ ، در نتیجه $k\downarrow\circ$. پس طبق تعریف ۱.۲

$$\lim_{t\uparrow\circ}\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}=\lim_{k\downarrow\circ}\frac{f(x-ku)-f(x)}{-k}=Mu$$

حال چون رابطه (۱.۲) برای هر $u\in\mathbb{R}^n$ برقرار می باشد، بنابراین قرار می دهیم $u=e_j$ پس،

$$\lim_{t\to\circ}\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t}=Me_j.$$

که در این صورت j امین ستون ماتریس M برابر است با:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_۱(x)}{\partial x_j}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_j}\end{pmatrix}$$