بسمه تعالی

دانشگاه تربیت معلم

موسسهٔ ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب

پایان نامهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد (فوق لیسانس)

در رشتهٔ ریاضی

موضوع: تجزیهٔ اولیهٔ زیرمدولها

Primary Decomposition of Submodules

تدوین: علی زاغیان

استاد راهنما: دکتر محمد حسن بیژن زاده

سال ۱۳۶۶

قال علیع

من علمنی حرفاً فقد صیرنی عبداً

هرکس به من کلمه‌ای بیاموزد مرا بندهٔ خود ساخته است

شماره

تاریخ

پیوست

واحد

" بسمه تعالی "

جلسه دفاع از پایان نامه برادر/خواهر ...علی زارع ساسان.. دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ریاضی در روز یکشنبه... مورخه .۲۵/۱۰/۱۳۶۷. در موسسه ی ریاضیات تشکیل گردید ونتیجه آزمون به شرح زیر تعیین میگردد

۱- عالی ☐

۲- خوب ☒

۳- متوسط ☐
- نیاز به تجدید نظر دارد ☐
- نیاز به تجدید نظر ندارد ☐

۴- غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما

دکتر محمد حسن بیژن زاده

ممتحنین داخلی

۱- دکتر محسن ذاکری

۲- دکتر علیرضا مدقالچی

ممتحنین خارجی

دکتر رضا ...

سرپرست موسسه ی ریاضیات

دکتر غلامحسین مصاحب

علیرضا مدقالچی

عنوان پایان نامه: تجزیه اولیه زیرمدولها

گــــزارش پــــایــــان نــــامــــه :

– موضوع : تجـزیـهٔ اولیـهٔ زیـرمـدولـهـا

– پـایـان نـامهٔ کارشناسی ارشد (فوق لیسانـس)

– تسلیم به مؤسسهٔ ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب

– دانشگاه تربیت معلم ، گروه ریاضی

– توسط : علی زاغیان

– زمان اجراء : ۱۳۶۶

– استاد راهنما : آقای دکتر بیژن زاده

– ممتحنین و هیئت داوران :

۱– آقای دکتر انشائی

۲– آقای

۳– آقای

تقـــــــــدیم بـه :

پدر و مادرم

فهرست

عنوان	صفحه
ارتباط Ass با مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر	۷۸
ارتباط Ass با Supp	۸۰
ایده‌آلهای اول وابستهٔ یک مدول با طول ـ متناهی (قضیهٔ ۴ـ۲۰)	۸۷
ارتباط Ass با تجزیهٔ اولیه	۹۰
مدول هم‌اولیه	۹۳
ارتباط مجموعهٔ پوچ رادیکال با Ass	۹۶
ایده‌آلهای اول بطور ضعیف وابسته به یک مدول	۹۹
واژه نامه	۱۰۱
منابع و موءاخذ	۱۰۳

" بسمه تعالی "

مقدمه

دراین رساله ابتدا مروری مختصر بر ایده‌آلهای اولیه خواهیم داشت. تجزیه یک ایده‌آل به ایده‌آلهای اولیه‌که نظیر تجزیه‌اعداد صحیح به‌اعداد اول است از مباحث کلاسیک نظریه‌ایده‌آلها به شمار می‌آید و غالبا "به تجزیه اولیه (Primary Decomposition) مشهور است وقتیکه حلقهٔ موردبحث (که حلقه‌ها دراین رساله‌یکدا روجابجائی هستند)یک، حلقهٔ نوتری باشدمیدانیم که چنین تجزیه‌ای وجود دارد.

مشابه این نظریه، دراین رساله به‌بررسی و تعریف تجزیه اولیه زیر مدولها پرداخته‌ایم .

برای اینکا را بتدا ضمن تعریفات اولیه، تعریف زیر مدول اولیه و ویژگیهای آن (در فصل اول) را شرح داده‌ایم متعاقبا " تجزیه اولیه زیرمدولها ویکتائی آن بیان و اثبات شده‌اند ونشان داده شده وقتیکه یک مدول متناهی تولید شده روی یک حلقهٔ نوتری مفروض باشدهمواره تجزیه اولیه برای هرزیر مدول آن موجود است (قضیه ۱-۴۰) .

ناگفته پیداست ازآنجاکه مدولها تعمیم یافتهٔ ایده‌آلها هستند نظریهٔ زیرمدولهای اولیه وتجزیهٔ وابسته به آن تعمیم‌مطالب مشابه برای ایده‌آلها میباشد.

درفصل سوم‌مفهوم Support وقضایای مربوط به‌آن آورده‌شده‌وبدنبال آن درفصل چهارم‌مجموعه‌ایده‌آلهای اول وابسته‌به یک A- مدول M ، ($Ass_A(M)$) تعریف شده‌است‌این مجموعه‌که‌به‌همراه $Supp_A(M)$ نقش حیاتی در تکوین نظریه مدولها داردبه اختصار مورد مطالعه قرار گرفته‌وویژگیهای اساسی‌آن منجمله‌ارتباط آن با $Supp_A(M)$ (قضیه ۴-۱۰) ذکر شده‌اند .

ارتباط $Ass_A(M)$ با ایدهآلهای اول متناظر با تجزیه اولیه مینیمال زیرمدول صفر از M (در قضیه ۴-۲۷) بیان و اثبات شده است، فلذا نقش دیگری از اهمیت تجزیه اولیه زیرمدولها را آشکار خواهد ساخت. مطالب این رساله حل مسائل هماهنگ شده‌ای است درباب موضوعاتی که ذکر شد و امیدوارم که با این تلاش این رساله به‌گونه‌ای جدید مطالب اساسی راجع به تجزیهٔ اولیه و مطالب وابسته به آنرا در اختیار علاقمندان به جبر جا بجائی برای مطالعه پیشرفته و تخصصی‌تر فراهم آورده باشد.

درخاتمه بر خود لازم میدانم که از آقای دکتر محمدحسن بیژن زاده به خاطر راهنمائیهای بی‌دریغ ایشان در جهت تهیه و تدوین هرچه بهتر این پایان‌نامه و همچنین از آقای دکتر پاشا سرپرست سابق موسسه‌ی ریاضیات و آقای دکتر مدقالچی سرپرست محترم کنونی موسسه‌ی ریاضیات و هیأت علمی این موسسه که با طرح و پیشنهادات و انتقادات خود باعث ترغیب بیشتر اینجانب شده‌اند و از آقایان دکتر انشائی و دکتر ذاکری و دکتر مدقالچی که از ممتحنین و هیأت داوران این پایان نامه میباشند کمال تشکر و سپاسگزاری را نمایم.

علی زاغیان

فصل صفر

مروری مختصر بر ایده‌آلهای اولیه :

۰–۱– تعریف : ایده‌آل $\underline{q}$ از حلقهٔ A را اولیه گوئیم اگر $A/\underline{q}\neq 0$ و هر مقسوم علیه صفر در $A/\underline{q}$ پوچتوان باشد.

۰–۲– قضیه : اگر $\underline{q}$ یک ایده‌آل اولیه در حلقهٔ A باشد آنگاه $r(\underline{q})$ کوچکترین ایده‌آل اول شامل $\underline{q}$ است.

۰–۳– قضیه : اگر ایده‌آلهای $\underline{q}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ از حلقهٔ A ، $\underline{p}$-اولیه باشند آنگاه $\bigcap_{1\leq i\leq n} \underline{q}_i$ ، $\underline{p}$-اولیه است.

۰–۴– قضیه : فرض کنیم $\underline{q}$ یک ایده‌آل $\underline{p}$-اولیه از حلقهٔ A باشد و $x\in A$ در اینصورت داریم :

(i): اگر $x\in \underline{q}$ آنگاه : $(\underline{q}:x) = (1)$

(ii): اگر $x\notin \underline{q}$ آنگاه $(\underline{q}:x)$ یک ایده‌آل $\underline{p}$-اولیه است و بنابراین: $r(\underline{q}:x) = \underline{p}$

(iii): اگر $x\notin \underline{p}$ آنگاه : $(\underline{q}:x) = \underline{q}$

۰–۵– تعریف : یک تجزیه اولیه از ایده‌آل $\underline{a}$ در A عبارتست از $\underline{a}=\bigcap_{1\leq i\leq n}\underline{q}_i$ ، (که در حالت کلی چنین تجزیه‌ای ممکن است موجود نباشد و ثابت میشود درحالتیکه A نوتری باشد این تجزیه وجود دارد) که درآن $\underline{q}_i$ ها ایده‌آلهای $\underline{p}_i$-اولیه در A میباشند . $(1\leq i\leq n \ , \ \underline{p}_i\in \mathrm{Spec}(A))$

این تجزیه اولیه را مینیمال گوئیم هرگاه ایده‌آلهای $\underline{p}_1,\underline{p}_2,\dots,\underline{p}_n$ مجزا از هم باشند و هیچکدام از موءلفه‌های $\underline{q}_i$ قابل حذف شدن در $\bigcap_{1\leq i\leq n}\underline{q}_i$ نباشند بعبارت دیگر داشته باشیم $(1\leq i\leq n)$: $\bigcap_{j\neq i} \underline{q}_j\nsubseteq \underline{q}_i$

۰ـ۶ـ با مفروضات تعریف فوق، $\underline{p}_n, \ldots, \underline{p}_2, \underline{p}_1$ را ایده‌آلهای اول متعلق به ایده‌آل $\underline{a}$ گوئیم .

۰ـ۷ـ (اولین قضیه یکتائی): فرض کنیم $\underline{a}$ یک ایده‌آل درحلقهٔ A باشدکه دارای تجزیه اولیهٔ مینیمال $\underline{a} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \underline{q}_i$ است وفرض کنیم $\underline{p}_i = r(\underline{q}_i) \; ; \; (1 \leq i \leq n)$ آنگاه $\underline{p}_i$ ها دقیقا "ایده‌آلهای اول $r(\underline{a}:x)$ برای $x \in A$ میباشندوبنابراین مستقل از تجزیه $\underline{a}$ میباشند .

۰ـ۸ـ قضیه : فرض کنیم $\underline{a}$ یک ایده‌آل در حلقه A باشد که دارای تجزیه اولیه مینیمال $\underline{a} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \underline{q}_i$ است و فرض کنیم $r(\underline{q}_i) = \underline{p}_i \; ; \; (1 \leq i \leq n)$ آنگاه :

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \underline{p}_i = \{ x \in A : (\underline{a}:x) \neq \underline{a} \}$$

درحالت خاص اگر ایده‌آل 0 درحلقهٔ A دارای تجزیه اولیه مینیمال باشدآنگاه مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر A برابراتحادایده‌آلهای اول متعلق به‌ایده‌آل 0 میباشند .

۰ـ۹ـ قضیه : فرض کنیم S یک زیر مجموعهٔ بطورضربی‌بسته‌ازحلقهٔ A باشد و فرض کنیم $\underline{q}$ یک ایده‌آل $\underline{p}$-اولیه‌در A باشد، آنگاه :

(i) : اگر $S \cap \underline{p} \neq \phi$ آنگاه $S^{-1}\underline{q} = S^{-1}A$

(ii) : اگر $S \cap \underline{p} = \phi$ آنگاه $S^{-1}\underline{q}$ یک ایده‌آل $S^{-1}\underline{p}$- اولیه است که $\underline{q}$ انقباض $S^{-1}\underline{q}$ در A میباشد .

بنابراین ایده‌آلهای $\underline{p}$- اولیه درحلقهٔ A در یک تناظر با ایده‌آلهای $S^{-1}\underline{p}$- اولیه در حلقهٔ $S^{-1}A$ $(S \cap \underline{p} = \phi)$ میباشند .

۰-۱۰- (دومین قضیه یکتائی) : فرض کنیم $\underline{a}$ یک ایده‌آل در حلقهٔ A باشد که دارای تجزیهٔ اولیه مینیمال $\underline{a} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \underline{q}_i$ میباشد و فرض کنیم $\{\underline{p}_{i_1}, \underline{p}_{i_2}, \dots, \underline{p}_{i_m}\}$ مجموعهٔ ایده‌آلهای منفرد از ایده‌آلهای اول متعلق به $\underline{a}$ باشد آنگاه $\underline{q}_{i_1} \cap \underline{q}_{i_2} \cap \dots \cap \underline{q}_{i_m}$ مستقل از تجزیه $\underline{a}$ میباشد .

۰-۱۱- قضیه : در حلقه نوتری A هر ایده‌آل دارای تجزیهٔ اولیه است .

فصـــــل اول

======

تجزیه اولیه اززیرمدولها :

۱-۱- تعریف : فرض‌کنیم A یک حلقه جابجائی یکدار و M یک A- مدول ثابت ، و N یک زیر مدول از M باشد . رادیکال N در M رابصورت زیرتعریف می کنیم :

$$r_M(N) = \{ x\varepsilon A \mid \exists n>0 : x^n M \subseteq N \}$$

۱-۲- تعریف : فرض A یک حلقه‌ٔ جابجائی یکدارو $\underline{a}$ یک ایده ال از A باشد رادیکال $\underline{a}$ در A راچنین تعریف می کنیم :

$$r(\underline{a}) = \{ x\varepsilon A \mid \exists n>0 : x^n \varepsilon \underline{a} \}$$

۱-۳- تعریف : اگر $\underline{a}$ و $\underline{b}$ دوایده‌ال A باشند $\underline{a}:\underline{b}$ رابصـــورت زیرتعریف می کنیم :

$$\underline{a}:\underline{b} = \{ x \varepsilon A \mid x\underline{b} \subseteq \underline{a} \}$$

$\underline{a}:\underline{b}$ یک ایده‌آل درحلقه‌ٔ A میباشد که به آن ایده آل خارج قسمتی گوئیم .

بخصوص $0:\underline{b}$ راپوچ ساز $\underline{b}$ گوئیم وبه $Ann(\underline{b})$ نشان میدهیـــــم وداریم :

$$Ann(\underline{b}) = \{ x\varepsilon A \mid x\underline{b} = 0 \}$$

۱-۴- لـم : $r(\underline{a})$ یک ایدآل است .

اثبات : اولا" داریم $r(\underline{a}) \subseteq A$ واگر $x,y \varepsilon r(\underline{a})$ آنـــگاه $m>0$, $n>0$ موجودند بطوریکه : $x^m, y^n \varepsilon \underline{a}$

حال داریم :

$$(x - y)^{m+n} = \sum_{i+j=m+n} \alpha_{ij} x^i y^j \qquad (1)$$

دوحالت برای اندیس i درنظر می‌گیریم :

۱- $i \geq m$ دراینحالتخواهیم داشت $x^m \in \underline{a}$ ولذا مجموع دررابطه ۱ متعلق به $\underline{a}$ خواهد بود .

۲- $i < m$ دراینحالت خواهیم داشت : $j \geq n$ ولذا $y^j \in \underline{a}$ و بنابراین مجموع دررابطه ۱ متعلق به $\underline{a}$ خواهدبود .

لذا $(x-y)^{m+n} \in \underline{a}$ وبنابراین $x-y \in r(\underline{a})$

حال اگر $a \in A$ باشد و $x \in r(\underline{a})$ کافیست ثابت کنیم $ax \in r(\underline{a})$ تا $r(\underline{a})$ یک ایده آل گردد .

از $x \in r(\underline{a})$ داریم $\exists\, m>0 : x^m \in \underline{a}$ حال چون $a \in A$ پس $a \in \underline{a}$ ولذا $a^m x^m \in \underline{a}$ یعنی $ax \in r(\underline{a})$ ولم ثابت است .

۱-۵- خلاصه‌ای ازاعمال روی زیرمدولها :

الف : اگر $(M_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای اززیرمدولها از A- مدول M باشند آنگاه $\bigcap M_i$ یک زیرمدول از M خواهدبود .

ب : حاصلضرب دوزیر مدول را نمی‌توانیم تعریف کنیم ولی حاصلضرب $\underline{a}M$ که درآن $\underline{a}$ یک ایده‌ال در A و M یک A- مدول است رابصورت زیر تعریف می کنیم .

$$\underline{a}M = \{ \sum_{\text{متناهی}} a_i x_i \mid a_i \in \underline{a} \ , \ x_i \in M \}$$

میتوان براحتی‌نشان داد $\underline{a}M$ یک زیرمدول از M است .

ج: اگر N و P دوزیرمدول‌از M باشند $(N : P)$ رابصورت زیر تعریف می کنیم :

$$N:P = \{ a \in A \mid aP \subseteq N \}$$

و $N:P$ یک ایده آل در A میباشد .

درحالتخاص ایده‌آل $(0:M)$ را به $Ann(M)$ نمایش میدهیم و به آن پوچساز M گوئیم وداریم :

$$Ann(M) = \{a \in A \mid aM=0\}$$

اگر $\underline{a} \subseteq Ann(M)$ باشدآنگاه M را میتوان بعنوان یک $A/\underline{a}$-مدول درنظرگرفت .

زیرا اگر $x+\underline{a} \in A/\underline{a}$ باشد چون $\underline{a} \subseteq Ann(M)$ لذا $\underline{a}M=0$ پس داریم : $(x+\underline{a})m = xm \quad m \in M$

ولذا نتیجه‌حاصل است .

د : فرض M یک A-مدول وفرض $\{M_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای اززیرمدول های M باشد . مجموع ΣM_i راچنین تعریف می کنیم .

$\Sigma M_i = \{\Sigma x_i \ : \ x_i \in M_i$ بجزتعدادمتناهی‌ازنx_i ها بقیه‌صفرند$\}$

که ΣM_i کوچکترین زیرمدول M شامل تمام M_i ها خواهدبود .

۱-۶ - لم : نشان دهید : $r_M(N) = r(N:M) = r(Ann(M/N))$

ولذا $r_M(N)$ یک ایده‌ال است .

اثبات : بنابر (۱- ۵ - ج) داریم : $N:M=\{x \in A \mid xM \subseteq N\}$

حالخواهیم داشت :

$$r(N:M) = \{x \in A \mid \exists n>0 : x^n M \subseteq N\} = r_M(N)$$

به همین‌ترتیب داریم :

$$Ann(M/N) = \{x \in A \mid xM \subseteq N\}$$

$$r(Ann(M/N)) = \{x \in A \mid \exists n>0 : x^n M \subseteq N\} = r_M(N)$$