دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

گرایش آنالیز عددی

حل عددی معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل با استفاده از موجک‌های سینوس-کسینوس

اساتید راهنما:

دکتر مهدی قاسمی-دکتر محمد شفیع دهاقین

استاد مشاور:

دکترعلیرضا امینی هرندی

پژوهشگر:

فاطمه هکی

تیر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار
به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان
به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند
و به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید.

تشکر و قدردانی

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو و چه خرد است بزرگی آن در کنار قدرت تو، و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان و چه اندک است در کنار نعمت های آن، جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه رسیدن راندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدان چه رستگاری من در آن است متوجه فرما که چنین کار از راهنمایی های تو ناشناخته نیست و از کفایت های تو نه.

در ابتدا از کلیه ی اعضای خانواده ام به ویژه **پدر و مادر بزرگوارم** که در راه کسب علم و دانش همواره یاریگر و مشوق من بوده و راه تحصیل و پیشرفت مرا هموار نموده اند، از صمیم قلب تشکر می کنم.

شایسته است به پاس زحمات اساتید راهنمای گرامی ام، **جناب آقای دکتر مهدی قاسمی و آقای دکتر محمد شفیع دهاقین** و همچنین استاد مشاور بزرگوارم **جناب آقای دکتر علیرضا امینی هرندی** که با سعه ی صدر و دقت نظرشان باعث هر چه پربار شدن این پایان نامه شدند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از استاد گرانقدرم **جناب آقای دکتر رضا خوش سیر** به خاطر راهنمایی های ارزشمندشان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از **جناب آقای دکتر علی داوری دولت آبادی** و **جناب آقای دکتر محمدرضا احمدی دارانی** که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، تشکر می کنم.

فاطمه هکی

تیرماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه به حل عددی معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی و نیز دسته‌ای از معادلات انتگرال غیرخطی با استفاده از موجک سینوس- کسینوس می‌پردازیم. این روش بر این اساس استوار است که هر کدام از جملات موجود در معادله را با استفاده از موجک سینوس- کسینوس به عنوان یک پایه‌ی متعامد یکه، تقریب می‌زند و سپس معادله موجود را به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌کند. در مورد معادلات انتگرال- دیفرانسیل خطی جواب $y(t)$ معادله به صورت $y(t) \simeq (Y^T P + Y_0^T)\Psi(t)$ تقریب زده می‌شود که در آن P ماتریس عملیاتی انتگرال برای موجک سینوس- کسینوس و $y(0) \simeq Y_0^T \Psi(t)$ است. همچنین $\Psi(t)$ بردار موجک سینوس- کسینوس می‌باشد. در این مسأله دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه خطی است که با حل آن می‌توان جواب تقریبی معادله را پیدا کرد.
در مورد معادلات انتگرال غیرخطی، جواب $y(t)$ به صورت $y(t) \simeq Y^T \Psi(t)$ تقریب زده می‌شود که در آن Y^T بردار مجهولات است. در این مسأله دستگاه حاصل، یک دستگاه غیرخطی از معادلات است. با یافتن بردار مجهولات جواب تقریبی معادله به دست خواهد آمد.

واژه‌های کلیدی: *معادلات انتگرال، معادلات انتگرال- دیفرانسیل، موجک سینوس- کسینوس.*

فهرست مطالب

فهرست نمادها

آنالیز چند تجزیه‌ای	MRA
ترانهاده ماتریس A	A^T
زیر مجموعه	$\subset$
سوپریمم	$\sup$
متمم متعامد Y	$Y^{\perp}$
مجموع مستقیم W و V	$W \oplus V$
مجموع مستقیم W_jها	$\oplus W_j$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
مجموعه اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
مجموعه توابع مربع انتگرال پذیر	$L^۲$
موجک سینوس- کسینوس	SCW

مقدمه

معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل در بسیاری از مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند. معادلات انتگرال-دیفرانسیل در اوایل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا[1] معرفی شدند. برحسب اینکه معادله انتگرال از چه نوع مسئله‌ای ظاهر شود، تکنیک‌ها و ایده‌های مختلفی برای تعیین جواب آنها به کار برده می‌شود. از طرفی امکان پیدا کردن جواب تحلیلی برای اکثر معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل وجود ندارد و یا در صورت امکان خیلی مشکل و پیچیده است. در چنین مواقعی به روش‌های عددی روی می‌آوریم که همیشه با نوعی خطا همراه هستند. البته از بین روش‌های عددی، روشی بهترین جواب را به دست می‌دهد که خطای روش کمترین مقدار را داشته باشد.

حل عددی معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل توسط افراد زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. روش‌هایی مبتنی بر قانون‌های انتگرال‌گیری، هسته‌های تبهگن، هم‌محلی، درونیابی و ... مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. اما در این روش‌ها غالباً باید شرایط خاصی اعمال گردد که عمدتاً پیچیده است و یا از دقت کافی برخوردار نمی‌باشد.

در دهه‌های اخیر استفاده از توابع متعامد پیوسته(چندجمله‌ای‌های لژاندر[2] ، چبیشف[3] ، لاگور[4] و هرمیت[5])، توابع متعامد سینوس-کسینوس و توابع تکه‌ای پیوسته ثابت(بلاک‌پالس، والش[6] و هار[7]) جهت حل معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل توجه خاصی را در بین محققان ایجاد کرده است. ویژگی این تکنیک‌ها این است که معادلات موجود را به دستگاه‌های جبری تبدیل می‌کند.

در سال ۱۹۸۱ حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا با استفاده از روش‌های هایبرید توسط ماکروگلو[8] به انجام رسید. یوسفی[9] و رزاقی[10] [۳۸] با استفاده از موجک لژاندر روشی را برای حل معادلات انتگرال

[1] $Volterra$
[2] $Legendre$
[3] $Chebyshev$
[4] $Laguerre$
[5] $Hermit$
[6] $Wallsh$
[7] $Haar$
[8] $Makroglou$
[9] $Yousefi$
[10] $Razzaghi$

ولترا- فردهلم غیرخطی ارائه دادند. همچنین در سال ۲۰۰۷ رحیمی[11] و شاهمراد[12] [۲۸] روش تاو محاسباتی را برای حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل خطی ارائه کردند .
نظریه موجک‌ها یک رویداد نسبتاً جدید در ریاضیات کاربردی است. موفقیت کنونی این موضوع دو دلیل عمده دارد. از یک طرف فرضیه موجک‌ها را می‌توان تلفیقی از علوم مهندسی، فیزیک و ریاضیات محض در نظر گرفت و از طرف دیگر موجک‌ها یک ابزار نسبتاً ساده‌ی ریاضی هستند که کاربردهای گوناگونی دارند. موارد کاربرد موجک‌ها در زمینه‌های تحلیل سیگنال، پردازش تصاویر، حل عددی معادلات انتگرال و ... می‌باشد.

این پایان‌نامه در پنج فصل تنظیم شده است. در فصل اول به بیان مفاهیم مقدماتی و پیش نیازهایی که در فصول بعد مورد نیاز است، می‌پردازیم. در فصل دوم با در نظر گرفتن شرایطی، بعضی از قضایای وجود و یکتایی جواب معادلات انتگرال را بیان نموده و نیز روش‌هایی برای حل آنها ارائه می‌دهیم. در فصل سوم به معرفی موجک‌ها و ویژگی‌های آنها پرداخته و معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی را با استفاده از موجک سینوس- کسینوس حل می‌نماییم. در فصل چهارم با استفاده از موجک سینوس- کسینوس روشی برای حل معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی بیان می‌کنیم. در فصل پنجم نیز یک نتیجه‌گیری کلی از آنچه در فصل‌های قبل بیان کردیم، ارائه می‌دهیم.

[11] $Rahimi - Ardabili$

[12] $Shahmorad$

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازها

این فصل را به مرور برخی مفاهیم پایه و مقدماتی که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند، اختصاص می‌دهیم. در بخش اول بعضی از مفاهیم ابتدایی آنالیز حقیقی را یادآوری می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه ناتهی X را یک فضای برداری (فضای خطی حقیقی یا فضای برداری خطی) روی $\mathbb{R}$ گویند هرگاه توابع $+ : X \times X \longmapsto X$ و $\times : \mathbb{R} \times X \longmapsto X$ وجود داشته باشند به طوری که در شرایط زیر صدق کنند:

۱. $\forall x, y \in X; x + y = y + x$

۲. $\forall x, y, z \in X; (x + y) + z = x + (y + z)$

۳. $\exists 0 \in X, \forall x \in X; x + 0 = 0 + x = x$

۴. $\forall x \in X \exists -x\ ;\ x + (-x) = 0$

۵. $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}; \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

۶. $\forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

۷. $\forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

۸. $\forall x \in X; 1x = x1 = x$

تعریف ۲.۱.۱. یک تابع حقیقی نامنفی $\|.\|$ که روی فضای برداری X تعریف گردد نرم نامیده می‌شود هرگاه:

۱. $\forall x \in X; \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

۲. $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}; \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

۳. $\forall x, y \in X; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

تعریف ۳.۱.۱. فضای ضرب داخلیX یک فضای برداری با یک ضرب داخلی تعریف شده بر روی آن است. یک ضرب داخلی روی X، یک نگاشت از $X \times X$ به یک میدان اسکالر مانند K، که $K = \mathbb{R}$ یا $K = \mathbb{C}$ است به طوری که برای هر جفت از بردارهای $x, y \in X$ یک اسکالر $\langle x, y\rangle$ از K وجود دارد که آن را ضرب داخلیx و y می‌نامیم. برای همه بردارهای x, y, z و اسکالر α شرایط زیر برقرار می‌باشد:

۱. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

۲. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

۳. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

۴. $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

روی این فضای ضرب داخلی یک نرم را به صورت $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۱.۱. عنصر x از فضای ضرب داخلی X را نسبت به عنصر $y \in X$ متعامد گویند هر گاه $\langle x, y\rangle = 0$.

تعریف ۵.۱.۱. یک مجموعه متعامدM، زیرمجموعه‌ای از فضای ضرب داخلی X است که هر دو عضو متمایز آن نسبت به هم متعامدند. یک زیر مجموعه متعامد یکه $M \subset X$، مجموعه‌ای متعامد در X است که هر عضو آن دارای نرم یک باشد. به عبارت دیگر برای هر x, y در M

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq y \\ 1 & , \quad x = y \end{cases}$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد. نرم f را به صورت

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۷.۱.۱. تابع $f(x)$ را در یک بازه پیوسته یکنواخت گوییم اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوان $\delta > 0$ای چنان یافت که هر گاه $|x_1 - x_2| < \delta$ (که در آن x_1 و x_2 دو نقطه دلخواه در بازه‌اند) داشته باشیم $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید تابع حقیقی مقدار f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد. گوییم f در شرط لیپ‌شیتز صدق می‌کند هرگاه وجود داشته باشد $L \geq 0$ به طوری که

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

تعریف ۹.۱.۱. برای هر $1 \leq p < \infty$، فضای متشکل از تمام توابع اندازه پذیر لبگ $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{C}$ که

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

را فضای $L^p[a, b]$ گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱. دنباله $\{x_n(t)\}$ از توابع L^2 را به طور نسبی همگرای یکنواخت به تابع حدی $x(t)$ گوییم اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مثبت $n_0(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon p(t), \quad (n \geq n_0, \quad a \leq t \leq b)$$

که در آن $p(t)$ یک تابع L^2 و نامنفی است.

تعریف ۱۱.۱.۱. سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ از توابع L^2 را به طور نسبی همگرای یکنواخت گوییم هرگاه دنباله مجموع جزیی آن به طور نسبی همگرای یکنواخت باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ از توابع L^2 را به طور نسبی همگرای یکنواخت مطلق گوییم هرگاه سری $\sum |x_n(t)|$ به طور نسبی همگرای یکنواخت باشد.

لم ۱۳.۱.۱. *اگر $\{x_i\}$ یک مجموعه متعامد نرمال(یکه) از توابع L^2 باشد، آنگاه این مجموعه متعامد مستقل خطی است.*

برهان. □

به مرجع [۲۱، لم ۳.۴.۲] مراجعه کنید.

قضیه ۱۴.۱.۱. *اگر $x_1, x_2, \cdots, x_n$ یک مجموعه متعامد نرمال از توابع L^2 باشد و $x \in L^2$ آنگاه ضرایب $c_1, c_2, \cdots, c_n$ وجود دارند به طوریکه*

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\|$$

مینیمم شود. به $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ تقریب کمترین مربعات یا تقریب میانگین مربعات x گویند.

برهان. فرض کنیم $\xi_i = (x, x_i)$ بنابراین :

$$\begin{aligned}\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\|^2 &= (x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i)\\ &= (x,x) - \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i, x) - \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i (x, x_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \bar{c}_j (x_i, x_j)\\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{\xi}_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{c}_i\\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\xi}_i + \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - c_i)(\bar{\xi}_i - \bar{c}_i)\\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - c_i|^2\end{aligned}$$

آخرین عبارت سمت راست رابطه بالا وقتی به مینیمم خود می‌رسد که $c_i = \xi_i \quad (1 \le i \le n)$. پس داریم

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2. \qquad (1.1.1)$$

چون سمت چپ رابطه (۱.۱.۱) نمی‌تواند منفی باشد پس نابرابری $\|x\|^2 \ge \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$ برقرار است.
$\square$

تعریف ۱۵.۱.۱. دنباله یکامتعامد $\{x_i\}$ کامل است اگر برقراری رابطه $(x_i, x) = 0$ برای هر i، رابطه $x = 0$ را نتیجه دهد.

تعریف ۱۶.۱.۱. ضرب داخلی توابع f و g در L^2 را به صورت

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

تعریف می‌کنیم. همچنین ضرب داخلی وزن دار توابع f و g با تابع وزن w را به صورت

$$(f, g) = \int_a^b w(t) f(t)\overline{g(t)}dt$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد و برای هر $x, y \in X$ قرار می‌دهیم $d(x, y) = \|x - y\|$. در این صورت d یک متر روی X است(d متر تولید شده به وسیله نرم است.) بنابراین هر فضای نرم دار یک فضای متریک است.

تعریف ۱۸.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم‌دار X کوشی گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی N وجود داشته باشد به طوری که اگر $m, n > N \quad (m, n \in \mathbb{N})$ آنگاه $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

تعریف ۱۹.۱.۱. هرگاه هر دنباله کوشی در فضای خطی نرم‌دار X همگرا باشد، آنگاه X را فضایی کامل گوییم.

تعریف ۲۰.۱.۱. یک فضای هیلبرت یک فضای ضرب داخلی کامل (کامل در مترتولید شده به وسیله ضرب داخلی) است.

تعریف ۲۱.۱.۱. فضای خطی نرم دار X را یک فضای باناخ گوییم هر گاه X نسبت به متر تولید شده کامل باشد.

ملاحظه ۲۲.۱.۱. فضای هیلبرت یک فضای باناخ است.

قضیه ۲۳.۱.۱. *فضای* $L^p[a,b]$ ، $1 < p < \infty$ ، *با نرم*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

یک فضای کامل است.

برهان. مرجع [۲۱، قضیه ۲.۲.۷] را ببینید. □

تعریف ۲۴.۱.۱. برای هر $m \geq 0$، فضای سوبولف را با نماد H^m نشان می‌دهیم و به صورت

$$H^m([a,b]) = \left\{ f \in L^2([a,b]) | \frac{d^n f}{dt^n} \in L^2([a,b]), \ 0 \leqslant n \leqslant m \right\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید K یک عملگر کراندار خطی در فضای هیلبرت H باشد. همچنین $\{x_n\}$ یک دنباله نامتناهی کراندار یکنواخت در فضای هیلبرت H باشد. K را یک عملگر فشرده گوییم اگر دنباله $\{Kx_n\}$ دارای یک زیر دنباله کشی $\{Kx_{nk}\}$ باشد.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد و Y و Z دو زیر فضا از X باشند. X را مجموع مستقیم Y وZ گویند و به صورت

$$X = Y \oplus Z$$

نمایش می‌دهند هرگاه هر $x \in X$ دارای نمایشی یکتا به صورت $x = y + z$ باشد که در آن $y \in Y$ و $z \in Z$ است. Z را متمم جبری Y در X و بالعکس Y را متمم جبری Z در X گویند.

تعریف ۲۷.۱.۱. برای یک زیر فضای برداری Y، مجموعه همه بردارهایی که نسبت به Y متعامدند را متمم متعامد Y گوییم و با نماد $Y^\perp$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۸.۱.۱. *فرض کنید Y یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت H باشد. در این صورت*

$$H = Y \oplus Z$$

که در آن $Z = Y^{\perp}$.

به عبارت دیگر برای هر $h \in H$ یک $y \in Y$ و یک $z \in Y^{\perp}$ وجود دارند به طوری که $h = y + z$.
در اینجا y را تصویر متعامد h روی Y گویند.

برهان. مرجع [۲۱، قضیه ۳.۳.۴] را ببینید. □

۱.۱.۱ تقریب در فضاهای نرم‌دار

نظریه تقریب در واقع به بیان تقریب توابع از یک نوع مشخص(به طور مثال توابع پیوسته روی یک بازه) به وسیله توابع دیگر (احتمالاً مشابه، برای مثال چندجمله‌ای‌ها) می‌پردازد. مشابه چنین حالتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال به وسیله سری تیلور[1] بیان می‌شود. اگر یک تابع دارای سری تیلور باشد ممکن است از مجموع جزیی این سری به عنوان یک تقریب برای این تابع استفاده کرد. در نظریه تقریب هدف این است که شرایطی را قرار دهیم تا بهترین تقریب را به دست آوریم.
یک مجموعه X از توابع را در نظر بگیرید. Y را یک مجموعه از توابع قرار دهید که اعضای آن به وسیله اعضای X تقریب زده می‌شوند. هدف ما بررسی وجود، یکتایی و ایجاد بهترین تقریب در چنین مسئله‌ای است.
اکنون فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. همچنین فرض کنید هر $x \in X$ به وسیله یک $y \in Y$ تقریب زده می‌شود که Y یک زیر فضای ثابت از X است. فاصله x از Y را با δ نشان داده و به صورت

$$\inf_{y \in Y} \|x - y\| = \delta = \delta(x, Y)$$

تعریف می‌کنیم. اگر یک $y_0 \in Y$ وجود داشته باشد که $\|x - y_0\| = \delta$، آنگاه y_0 را بهترین تقریب برای x روی Y گوییم.

قضیه ۲۹.۱.۱. (*بهترین تقریب*) *اگر Y یک زیرفضای متناهی‌البعد فضای نرم‌دار X باشد، برای هر $x \in X$ یک بهترین تقریب روی Y وجود دارد.*

برهان. مرجع [۲۱] را ببینید. □

[1] $Taylor$

۲.۱ سری فوریه

فرض کنید $f(t)$ یک تابع متناوب روی بازه $[۰, T]$ باشد. سری مثلثاتی

$$f(t) = a_۰ + \sum_{m=۱}^{\infty} \left(a_m \cos(\frac{۲m\pi}{T}t) + a_m^* \sin(\frac{۲m\pi}{T}t) \right) \qquad (۱.۲.۱)$$

را سری فوریه f گویند که در آن

$$\begin{aligned} a_۰ &= \tfrac{۱}{T}\int_۰^T f(t)dt \\ a_m &= \tfrac{۲}{T}\int_۰^T f(t)\cos(\tfrac{۲m\pi}{T}t)dt \\ a_m^* &= \tfrac{۲}{T}\int_۰^T f(t)\sin(\tfrac{۲m\pi}{T}t)dt. \end{aligned}$$

اگر سری نامتناهی (۱.۲.۱) را برش دهیم، می‌توان رابطه (۱.۲.۱) را به صورت

$$f(t) \simeq a_۰ + \sum_{m=۱}^{L} (a_m\phi_m(t) + a_m^*\phi_m^*(t)) = C^T\Phi(t)$$

نوشت که

$$\begin{aligned} \phi_m(t) &= \cos(\tfrac{۲m\pi}{T}t), \quad m = ۰, ۱, \cdots \\ \phi_m^*(t) &= \sin(\tfrac{۲m\pi}{T}t), \quad m = ۱, ۲, \cdots \\ \Phi(t) &= [\phi_۰(t), \phi_۱(t), \cdots, \phi_L(t), \phi_۱^*(t), \cdots, \phi_L^*(t)]^T \\ C &= [a_۰, a_۱, \cdots, a_L, a_۱^*, a_۲^*, \cdots, a_L^*]^T \end{aligned}$$

a_m و a_m^* را به ترتیب ضرایب فوریه کسینوس و سینوس و ϕ_m وϕ_m^* را توابع فوریه می‌نامیم. مؤلفه‌های بردار $\Phi(t)$ در بازه $[۰, T]$ متعامدند. همچنین روابط زیر برای توابع فوریه برقرار می‌باشند.

$$\int_۰^T \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} ۰ & , \quad m \neq n \\ \frac{T}{۲} & , \quad m = \quad n \neq ۰ \\ T & , \quad m = \quad n = ۰ \end{cases} \qquad (۲.۲.۱)$$

$$\int_۰^T \phi_m^*(t)\phi_n^*(t)dt = \begin{cases} ۰ & , \quad m \neq n \\ \frac{T}{۲} & , \quad m = n \end{cases} \qquad (۳.۲.۱)$$

$$\int_۰^T \phi_m(t)\phi_n^*(t)dt = ۰ \qquad (۴.۲.۱)$$

$$\int_{0}^{T} \Phi(t)\Phi^{T}(t)dt = Tdiag[1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}] \quad (5.2.1)$$

$$\int_{0}^{t} \Phi(s)ds = \begin{pmatrix} t \\ \frac{T}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{T}t) \\ \vdots \\ \frac{T}{2L\pi}\sin(\frac{2L\pi}{T}t) \\ -\frac{T}{2\pi}\cos(\frac{2\pi}{T}t) + \frac{T}{2\pi} \\ \vdots \\ -\frac{T}{2L\pi}\cos(\frac{2L\pi}{T}t) + \frac{T}{2L\pi} \end{pmatrix}$$

مجموعه توابع فوریه یک مجموعه متعامد کامل در فضای هیلبرت $L^{2}[0, 2\pi]$ است[۲۹].

۳.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

بنابر نظر بوچر[2] نام معادله انتگرال توسط بویس-ریموند[3] در سال ۱۸۸۸ پیشنهاد شده بود هر چند که اولین پیدایش معادله انتگرال توسط آبل[4] به رسمیت شناخته شده است. آبل در کار پایان نامه‌اش در سال های ۱۸۲۳ تا ۱۸۲۶ مشغول مطالعه معادلاتی از قبیل

$$f(x) = \int_{a}^{\infty} (x-t)^{-\alpha} f(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

بود که f تابعی پیوسته و در شرط $f(a) = 0$ صدق می‌کند. همچنین عقیده‌ای وجود دارد که اولین پیدایش معادله انتگرال به کار لاپلاس[5] درسال ۱۷۸۲ برمی‌گردد که روی تبدیلات لاپلاس و معکوس آنها مطالعه می‌کرد. به عنوان مثال تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$, $0 < t < \infty$ به صورت

$$L[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{\infty} \exp(-st)f(t)dt, \quad s > a$$

است، به شرط آنکه به ازای $s > a$ همگرا باشد. حال اگر تابع $F(s) = \frac{1}{s^{2}}$, $s > 0$ تابع معلومی باشد، برای پیدا کردن تبدیل معکوس لاپلاس یعنی تابع مجهول $f(t)$ با حل معادله انتگرال

$$\frac{1}{s^{2}} = \int_{0}^{\infty} \exp(-st)f(t)dt, \quad s > 0$$

---

[2] $Bocher$

[3] $Bois-reymond$

[4] $Abel$

[5] $Laplace$

مواجه خواهیم شد.

درسال ۱۸۲۰ فوریه[۶] تبدیلات فوریه را مطرح کرد که پیدا کردن تبدیل معکوس فوریه به حل معادله انتگرال منجر می‌شود.

در سال ۱۸۹۶ ولترا در مطالعه موضوع رشد جمعیت مسئله

$$\varphi(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

را بررسی کرد. در سال ۱۹۰۰ فردهلم[۷] معادله

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

را مطالعه کرد.

۴.۱ مفاهیم مقدماتی معادلات انتگرال

تعریف ۱.۴.۱. به هر معادله که تابع مجهول در داخل علامت انتگرال قرار داشته باشد، معادله انتگرال گویند.

فرض کنید $y(t)$ تابعی مجهول باشد. در این صورت به معادله

$$y(t) = x(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} k(s,t)y(s)ds \qquad (۱.۴.۱)$$

یک معادله انتگرال گویند که در آن $k(s,t)$ به عنوان هسته معادله انتگرال، یک تابع معلوم، $\alpha(t)$ و$\beta(t)$ حدود انتگرال و $x(t)$ یک تابع معلوم است. در این معادله تابع مجهول $y(t)$ در سمت راست، تنها در داخل علامت انتگرال ظاهر شده است و در حالت‌های دیگر ممکن است تابع مجهول در سمت راست در خارج از علامت انتگرال هم حضور داشته باشد.

هدف ما تعیین تابع $y(t)$ است به قسمی که در معادله (۱.۴.۱) صدق کند. به معادلات انتگرال نظیر معادله(۱.۴.۱)، معادله انتگرال خطی گویند زیرا تابع مجهول $y(t)$ در داخل علامت انتگرال حالت خطی دارد. اما اگر تابع $y(t)$ در داخل علامت انتگرال با توابعی غیر خطی مانند $y^۲(t)$ ، $\cos(y(t))$ و یا $\exp(y(t))$ جابه جا شود، آنگاه معادله انتگرال را غیر خطی گویند.

[6] $Fourier$
[7] $Fredholm$

تعریف ۲.۴.۱. تابع $k(s,t)$ تعریف شده بر ناحیه $D=\{(s,t)|s,t\in[a,b]\}$ را یک هسته L^2 گویند هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $k(s,t)$ یک تابع اندازه پذیر نسبت به (s,t) در ناحیه $a\leq s,t\leq b$ است. یعنی

$$\int_a^b\int_a^b|k(s,t)|^2dsdt<\infty.$$

۲) $k(s,t)$ یک تابع اندازه پذیر نسبت به t است. یعنی

$$\int_a^b|k(s,t)|^2dt<\infty,\qquad a\leq s\leq b.$$

۳) $k(s,t)$ یک تابع اندازه پذیر نسبت به s است. یعنی

$$\int_a^b|k(s,t)|^2ds<\infty,\qquad a\leq t\leq b.$$

شرایط (۳-۱) را شرایط نظم می‌گویند.

فرض کنید هسته $k(s,t)$ بر ناحیه $D=\{(s,t)|s,t\in[a,b]\}$ پیوسته باشد. هسته‌ی یک معادله انتگرال به پنج دسته زیر تقسیم می‌شود:

۱) هسته جدا شدنی یا تبهگن:

هسته $k(s,t)$ جدا شدنی نامیده می‌شود هرگاه:

$$k(s,t)=\sum_{k=0}^{n}g_k(t)h_k(s)$$

که در آن g_kها و h_kها مستقل خطی‌اند.

۲) هسته هرمیتی:

اگر هسته$k(s,t)$ یک هسته با مقادیر مختلط باشد به طوری که $k(s,t)=\overline{k(t,s)}$، در این صورت k را هسته هرمیتی می‌نامند.

۳) هسته تفاضلی:

اگر $k(s,t)=k(s-t)$ در این صورت k را یک هسته تفاضلی می‌گوییم.

۴) هسته قطبی:

هسته $k(s,t)$ قطبی نامیده می‌شود هرگاه:

$$k(s,t)=\frac{g(s,t)}{(s-t)^{\alpha}}+h(s,t),\quad 0\leq\alpha\leq 1$$

که g و h روی D کراندار هستند وه $g(s,s)\neq$.

۵) هسته لگاریتمی: