دانشگاه قم

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش اتمی ملکولی

عنوان پایان نامه:

نظریه کوانتومی برای مدارهای الکتریکی مزوسکوپی

استاد راهنما:

دکتر حسن پهلوانی

پژوهشگر:

آرش رزمجو

مهر ۱۳۸۸

چکیده

عنوان : نظریه کوانتومی برای مدارهای الکتریکی مزوسکوپی

توسط: آرش رزمجو

از آن جایی که در علم نانوالکترونیک و مقیاس نانو، الکترون ها معمولاً خواص شبه موجی از خود نشان می دهند وقتی ابعاد سامانه در حدود طول همدوسی حامل هاست (حداکثر فاصله ای که یک ذره می تواند با حفظ اطلاعات مربوط به فاز خود طی کند) برای بررسی دینامیک سامانه نه تنها باید مکانیک کوانتومی به کار گرفته شود بلکه گسستگی بار الکترون نیز باید در نظر گرفته شود. بنابراین در فصل اول به بررسی و نقش گسستگی بار پرداخته شده است سپس این تئوری برای بررسی دینامیک به روش جبری در مدارهای Lو LC که تحت تأثیر میدان خارجی وابسته به زمان هستند، در فصل های دوم وسوم بکار برده شده است. از آن جایی که در مدارهای الکتریکی مقاومت الکتریکی نقش اساسی را بازی می کند، در فصل چهارم جریان ماندگاری و طیف انرژی یک مدار مزوسکوپی LCتحت تأثیر میدان خارجی با استفاده از تئوری کالدیرا مربوط به سیستم های اتلاف کوانتومی مطالعه شده است.

فهرست مطالب

پیشگفتار..... ۱

فصل اول: روش کوانتش مدارهای الکتریکی LC و بررسی نقش گسستگی بار در مدارهای مزوسکوپی

۱-۱ تشابه مدارهای الکتریکی با نوسانگرها..... ۳

۱-۲ کوانتش مدارهای الکتریکی LC..... ۶

۱-۳ مدار های الکتریکی مزوسکوپی..... ۱۰

۱-٤ روابط عدم قطعیت در مدارهای مزوسکوپی ۱۶

۱-٥ ویژه توابع جریان..... ۲۰

فصل دوم: بررسی دینامیک جبر مدار مزوسکوپی L

۲-۱ روش تجزیه لوی مالسیو..... ۲۲

۲-۲ مدار کوانتومی L ۲٤

۲-۳ مدار الکتریکی Lدر حضور منبع پتانسیل ۲۶

۲-٤ دینامیک جبری مدار الکتریکی مزوسکوپی L به روش جبر لی..... ۲۸

۲-٥ محاسبه جریان ماندگاری در مدار مزوسکوپی L واداشته..... ۳۱

فصل سوم: جریان ماندگاری و طیف انرژی برای مدارهای مزوسکوپی LC

۳-۱ مدار کوانتومی LC تحت تأثیر پتانسیل ثابت..... ۳۳

۳-۲ بررسی مدار الکتریکی مزوسکوپی LC بدون منبع خارجی..... ۳۵

۳-۳ جریان ماندگاری در مدار الکتریکی مزوسکوپی LC بدون منبع خارجی..... ۳۹

۳-٤ طیف انرژی برای مدار الکتریکی مزوسکوپی LC بدون منبع خارجی..... ۳۹

۳-٥ مدار الکتریکی مزوسکوپی LC واداشته ٤۲

۳-٦ طیف انرژی مدار الکتریکی مزوسکوپی LC واداشته..... ٤٤

فصل چهارم: جریان ماندگاری و طیف انرژی مدار کوانتومی مزوسکوپیRLC

٤-۱ مقدمه..... ٤۷

٤-۲ جریان در مدار کوانتومی مزوسکوپیRLC..... ٤۷

٤-۳ طیف انرژی مدار کوانتومی مزوسکوپی RLC..... ٥۱

نتیجه گیری ٥۳

منابع..... ٥٤

پیشگفتار

لغت مزو به معنی میان (بین) است. سامانه های مزوسکوپی سامانه هائی اند که از اتم بزرگترند. با وجود این که از مواد بزرگ امروزی که ما می توانیم آن ها را ببینیم یا لمس کنیم خیلی کوچکترند.آن ها هزارتا صدهزار برابر کوچک تر از قطر یک تار موی انسان می باشند و اندازه آن ها چند صد نانومتر است. این دلیل باعث شده تا موادی که ازترکیب سامانه های مزوسکوپی ساخته می شوند را به عنوان نانو ساختارها بشناسیم. تکنولوژی مربوط به این سامانه ها به نانو تکنولوژی معروف است. بنابراین در مقیاس مزوسکوپی می توان گفت اندازه ای وجود دارد که زیر آن یک جامد نمی تواند از خود رفتار حجمی نشان دهد. در این اندازه فیزیک ماده چگال ماکروسکوپی از فیزیک مزوسکوپی جدا می شود. به طور کلی در این مقیاس معمولا ساختارهای مجزائی از اتم ها به جای توزیع پیوسته، جرم آن ها، بار آن ها و غیره، جایگزین می گردد که برای بررسی خواص مواد در این مقیاس نیاز به مکانیک کوانتومی است.

با توجه به پیشرفت های روزافزون نانوفناوری درعرصه های مختلف علمی جهان بخصوص در علم نانوالکترونیک گسستگی بار در مقیاس نانو وسامانه های مزوسکوپی مهم می شود. در چنین سامانه های رفتار الکترون به صورت موجی است.

نخستین بار لی و چن[۱] یک نظریه کوانتومی برای مدارهای مزوسکوپی با بار گسسته ارائه دادند[۱]. در این نظریه گسسته بودن بار الکتریکی توسط عملگر خودالحاقی $\hat{q}$ که دارای یک طیف گسسته است در نظر گرفته می شود. یک مدل ساده از چنین سامانه هایی مدارهای کوانتومی LC هستند که با دو پارامتر اساسی خودالقاء L و ظرفیت C توصیف می شوند [۱۰-۲]. نظریه لی و چن در مسائل متنوعی مربوط به مدارهای مزوسکوپی به کار گرفته شده است[۱۲-۱۱]. یکی از موضوعات مهم در مدارهای مزوسکوپی قانون اهم است چرا که مقاومت الکتریکی (قانون اهم) یکی از پارامترهای اصلی در مدارهای الکتریکی است و نقش اساسی را در پدیده رسانش و انتقال ذره دارد. چون دینامیک این سامانه ها بر اساس اصول کوانتومی است لذا این عامل منجر به مطالعه سیستم های اتلافی در مکانیک کوانتومی می گردد. یکی از این روش ها تئوری کالدیرا[۲]، راجع به نوسانگرهای هارمونیک است[۱۹-۱۳]. از آنجا که روش کوانتش نوسانگر هارمونیک با مدارهای LC یکی است لذا می توان برای بررسی دینامیک این مدار اتلافی از هامیلتونی کالدیرا استفاده کرد[۲۰].

در فصل اول این پایان نامه به بررسی روش کوا نتش مدارهای LC و معرفی تئوری کوانتومی و نقش گسستگی بار پرداخته شده است. در فصل دوم بررسی دینامیک مدار L تحت تأثیر یک میدان پتانسیل خارجی اختیاری وابسته به زمان با استفاده از روش های مختلف مورد بررسی

---

[۱] - Li and Chen

[۲] -Caldeira theory

قرار گرفته است. در فصل سوم مدارهای LC مطالعه شده است و جریان ماندگاری و طیف انرژی برای یک مدار LC تحت تأثیر میدان خارجی اختیاری وابسته به زمان مطالعه شده است. در فصل چهارم با توجه به اهمیت مقاومت در مدارها، اتلاف مدارهای مزوسکوپی LC با در نظر گرفتن مقاومت R معرفی شده است و طیف انرژی و جریان ماندگاری برای این مدارها بدست آمده است.

فصل اول: روش کوانتش مدارهای الکتریکی LC و بررسی نقش گسستگی بار در مدارهای مزوسکوپی

۱–۱ تشابه مدارهای الکتریکی با نوسانگرها

مدار الکتریکی LC که دارای خازن C و القاگر L می باشد، یک نوسانگر الکترومغناطیسی را تشکیل می دهد که در آن جریان بر حسب زمان به صورت سینوسی تغییر می کند درست همان طور که جابجائی یک نوسانگر مکانیکی بر حسب زمان تغییر می کند. در واقع خواهیم دید بین نوسانگرهای الکترومغناطیسی و مکانیکی شباهت هایی وجود دارد. این شباهت ها به ما کمک می کند تا بر اساس مطالعاتی که بر روی نوسانگرهای مکانیکی صورت گرفته است شناختی از نوسانگرهای الکترومغناطیسی به دست آوریم.

در این فصل مدارهایی را مورد بررسی قرار می دهیم که شامل مقاومت و نیروی محرکه الکتریکی نیستند. اگر هیچ چشمه نیروی محرکه الکتریکی در مدار وجود نداشته باشد انرژی مدار ناشی از انرژی است که در ابتدا در یکی یا هر دو جزء آن ذخیره شده است. فرض کنید خازن C بوسیله یک چشمه خارجی پر شده باشد زمانی که بار روی صفحات آن ماکزیمم q_m , است، از چشمه خارجی قطع و به القاگر L وصل می شود. در آغاز کار انرژی ذخیره شده در خازن یعنی U_E عبارت است از

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{{q_m}^2}{C} \qquad (۱-۱)$$

در حالی که انرژی ذخیره شده در القاگربه شکل زیر است

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \qquad (۱-۲)$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

که در آن $i = \frac{dq}{at}$ جریان در این لحظه صفر است. اکنون خازن از طریق القاگر شروع به خالی شدن می کند و جریان از القاگر توسط حامل های بار مثبت عبور می کنند. بنابراین انرژی ذخیره شده در القاگر از صفرشروع به افزایش می یابد و همزمان با تخلیه بارخازن، انرژی ذخیره شده در خازن کم می شود. چون مدار بدون مقاومت است هیچ گونه انرژی تلف نمی شود و کاهش انرژی ذخیره شده در خازن بصورت افزایش انرژی ذخیره شده در القاگر جبران می شود به طوری که انرژی کل ثابت باقی می ماند. خازن پس از گذشت زمان مورد نیاز کاملا تخلیه شده و انرژی ذخیره شده در آن به صفر می رسد، این درحالی است که جریان در القاگر به ماکزیمم مقدار خود رسیده باشد و تمام انرژی موجود در مدار در انرژی میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می شود. حال جریان و انتقال انرژی بر عکس شده و القاگر کم کم انرژی خود را از دست می دهد. در این صورت با کاهش جریان در مدار بار خازن شروع به افزایش می یابد و به تبع آن انرژی موجود در مدار در انرژی میدان الکتریکی خازن ذخیره می شود. این فرایند مجدداً از سرگرفته می شود و چرخه به صورت نامحدود تکرار می شود و در نبود مقاومت که سبب اتلاف انرژی می شود بار و جریان در مدار در هر چرخه به بیشینه مقدار یکسانی باز می گردد. مدار نوسان کننده LC مانند سیستم جرم – فنر نوسان کننده دو نوع انرژی دارد، یکی انرژی مغناطیسی ذخیره شده در القاگر و دیگری انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن، بطور کلی انرژی ذخیره شده در مدار الکتریکی LC بدون مقاومت می تواند بین اجزای آن رفت و آمد کند درست همان طور که در نوسانگر مکانیکی انرژی می تواند بین انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (۳-۱)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$V = \frac{dx}{dt}$$

نوسان کند. از روابط (۱-۱) ، (۱-۲) و (۱-۳) می توان نتیجه گرفت که مدار الکتریکی LCشبیه سیستم مکانیکی جرم-فنر است و دارای شباهت های زیر است که خازن شبیه فنر و القاگر به نوعی شبیه جسم دارای جرم است و کمیت های مکانیکی x، V و پارامتر k به ترتیب با کمیت های الکترومغناطیسی q، iو $\frac{1}{C}$ متناظرند و m متناظر با L است.

بر این اساس می توان انرژی کل، U، یک مدار الکتریکی نوسان کننده LCرا در هر لحظه به شکل زیر نوشت

(۴-۱)

$$U = u_B + u_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}$$

چون در این مدار انرژی تلف نمی شود لذا U بر حسب زمان ثابت می ماند. با توجه بـه اینکـه کمیت های i و q وابسته به زمان اند با مشتق گیری از معادله (۱-۴) می توان نوشت

$$\frac{dU}{dt} = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0 \qquad (۱-۵)$$

حـال بـا توجـه بـه بـار q موجـود روی یـک صـفحه مـشخص از خـازن و آهنـگ جریـان بـار الکتریکی iصفحه مورد نظر یعنی

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (۱-۶)$$
$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

می توان معادله (۱-۵) را به شکل زیر نوشت

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \qquad (۱-۷)$$

معادله دیفرانسیلی(۱-۷) نوسان بار الکتریکی در یک مدار LC (بدون مقاومت) را توصیف مـی کند. جواب این معادله بطور مشابه با معادله دیفرانسیل نوسانگر جرم – فنر یعنی

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (۱-۸)$$

که نوسان مکانیکی یک ذره متصل به فنر را توصیف می کند، بدست می آید. بنابراین می توان جواب معادله (۱-۷) را به صورت زیرنوشت

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad (۱-۹)$$

که در آن q_m بار ماکزیمم روی صفحه خازن، φ یک ثابت فاز دلخـواه و ω بـسامد زاویـه ای نوسان های الکترومغناطیسی است. اکنون با قرار دادن رابطه (۱-۹) و مشتق دوم آن در رابطـه (۱-۷) به آرایش جدیدی از معادله (۱-۷) می رسیم که با متشابه سازی این دو آرایش، بـسامد زاویه ای

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad (۱۰-۱)$$

بدست می آید. به این ترتیب اگر به جای ω مقدار $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ را بگذاریم، معادله (۱-۹) واقعا جواب معادله (۱-۷) است. در هر مدارالکتریکی LC واقعی همواره یک مقاومت R وجود دارد. وقتی این مقاومت را در نظر بگیریم، در می یابیم که انرژی الکترومغناطیسی کل U ثابت نیست بلکه باگذشت زمان به واسطه اتلاف انرژی به صورت انرژی داخلی مقاومت کم می شود. مدار RLC کاملا شبیه نوسانگر میرای جرم – فنر، دارای حرکت نوسانی میرا است و معادله حرکت مدار به صورت زیر خواهد بود

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \qquad (۱۱-۱)$$

که در آن $q(t)$ نوسان های میرائی LC را توصیف می کند.

۱–۲ کوانتش مدارهای الکتریکی LC

در بخش قبل دیدیم که سامانه الکتریکی که از یک خازن و یک القاگر ساخته شده است، شباهت زیادی با سامانه های مکانیکی ارتعاشی دارد که شامل جرم – فنر می باشد. بنابراین روش کوانتش مدارهای الکتریکی با سامانه های مکانیکی جرم – فنر یکسان است. هرگونه فرایند اتلاف ناشی از مقاومت الکتریکی را نادیده می گیریم. بنابراین در شروع کار به شرح اجمالی در مورد ذراتی که در راستای یک خط راست به فنرهایی بسته شده اند و در طول همان خط ارتعاش می کنند می پردازیم. با کمال شگفتی می بینیم که یک رشته اتم در ساختار یک بلور – که جنبه طبیعی هم دارد- چنین مدلی را به خوبی نمایش می دهد. فرض می کنیم جرم هر یک از ذرات m و فاصله شان از یکدیگر، وقتی که ساکنند، l است و ثابت فنر برای هر فنر می تواند به صورت $k = m\omega_0^{\,2}$ نوشته شود، در این حالت جابجائی های ذرات نسبت به وضعیت تعادل شان با $q_1, q_2, q_3, ..., q_s, ..., q_n$ نمایش داده می شود. درچنین دستگاهی نیروهای ذخیره شده با باز شدن یا جمع شدن فنرها تامین می شود که بر اثر یک اختلال در سامانه ایجاد می شود. با ایجاد اختلال در شبکه می توان امواج عرضی و طولی در شبکه به وجود آورد.

با توجه به قانون هوک معادله حرکت s امین ذره در شبکه به صورت زیر نوشته می شود

$$m\frac{d^2q_s}{dt^2}+2kq_s-k(q_{s+1}+q_{s-1})=0 \qquad (۱۲-۱)$$

این معادله حرکت را می توان از هامیلتونی زیر برای سیستم مورد نظر بدست آورد

$$H=\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{{p_s}^2}{2m}+\frac{1}{2}k(q_{s+1}-q_s)^2\right\} \qquad (۱۳-۱)$$

که در آن p_s تکانه sامین ذره می باشد. برای بررسی معادله (۱-۱۲) یک تبدیل فوریه از مختصات ذره ای q_s و p_s به مختصات جدید Q_kو P_k می زنیم که در فیزیک حالت جامد می توان از آن به مختصات فونون یاد کرد. با توجه به تناوبی بودن بلور می توان طبق تبدیل فوریه زیر مختصات فونون Q_k را به مختصات ذره ای q_s ربط داد

$$q_s=N^{-\frac{1}{2}}\sum_k Q_k\exp(-iksa) \qquad (۱۴-۱)$$

که دارای تبدیل معکوس زیر است

$$Q_k=N^{-\frac{1}{2}}\sum_s q_s\exp(-iksa) \qquad (۱۵-۱)$$

در این روابط N ضریب بهنجارش، k عدد موج و a ثابت شبکه بلور است، به روشی مشابه با مختصات مکان ذره می توان مختصات تکانه ذره را در دستگاه فونون نوشت

$$\begin{aligned}p_s&=N^{-\frac{1}{2}}\sum_k P_k\exp(-iksa)\\ P_k&=N^{-\frac{1}{2}}\sum_s p_s\exp(iksa)\end{aligned} \qquad (۱۶-۱)$$

از آنجا که مختصات P_kو Q_k در چارچوب فونون هستند و دارای خاصیت کوانتومی اند ایجاب می کند که از رابطه جابجایی کوانتومی $\left[\hat{Q}_k,\hat{P}_k\right]=i\hbar$ پیروی کند که در زیر به ارائه آن می پردازیم.

$$[Q_k, P_k'] = N^{-1}\left[\sum_r q_r \exp(-ikra), \sum_s p_s \exp(ik'sa)\right] = \quad (۱۷-۱)$$
$$N^{-1}\sum_r\sum_s [q_r, p_s]\exp(-i(kr-k's)a)$$

که در مکانیک کلاسیک q_s و p_s در چارچوب ذرات از خاصیت کلاسیکی زیر تبعیت می کنند

$$[q_r, p_s] = \delta(r,s) \quad (۱۸-۱)$$

مطابق اصول مکانیک کوانتومی می توان رابطه بین مشاهده پذیرهای کلاسیکی و عملگرهای مکانیک کوانتومی را به شکل زیر نوشت

$$[q_r, p_s] = i\hbar\delta(r,s) \quad (۱۹-۱)$$

که در آن $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ و h، ثابت پلانگ و $\delta(r,s)$، دلتا کرونکر می باشد که در شرط زیر صدق می کند

$$\delta(r,s) = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases} \quad (۲۰-۱)$$

که با جایگذاری رابطه (۱-۱۹) در رابطه (۱-۱۷) رابطه جابجائی به صورت زیر بدست می آید

$$[Q_k, P_{k'}] = i\hbar\delta(k,k') \quad (۲۱-۱)$$

که در محاسبات فوق از رابطه زیر استفاده شده است

$$\sum_r \exp(-i(k-k')ra) = N\delta(k,k') \quad (۲۲-۱)$$

با استفاده از روابط (۱-۱۴) ، (۱-۱۶) و (۱-۲۲) می توان عبارات زیر را محاسبه کرد

(۲۳-۱)

$$\sum_s {p_s}^2 = N^{-1}\sum_s\sum_k\sum_{k'} P_k P_{k'} \exp[-i(k+k')sa] = \sum_k\sum_{k'} P_k P_{k'}\delta(-k,k') = \sum_k P_k P_{-k}$$

(۲۴-۱)

$$\sum_s (q_{s+1}-q_s)^2 = N^{-1}\sum_s\sum_k\sum_{k'} Q_k Q_{k'} \exp(iksa)\exp((ika)-1)\exp(ik'sa)\exp((ik'a)-1) = 2\sum_k Q_k Q_{-k}(1-\cos ka)$$

با جایگذاری این روابط در رابطه (۱-۱۳) عملگر هامیلتونی زیر در چارچوب فونون بدست می آید

$$H = \sum_k \left\{ \frac{1}{2m}\hat{P}_k\hat{P}_{-k} + k\hat{Q}_k\hat{Q}_{-k}(1-\cos ka)\right\} \qquad (۲۵-۱)$$

که با تعریف رابطه پاشندگی زیر

(۲۶-۱)

$$\omega_k = \left(\frac{2k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}(1-\cos ka)^{\frac{1}{2}}$$

هامیلتونی رابطه (۱-۲۵) به شکل زیر خواهد بود

$$H = \sum_k \left\{ \frac{1}{2m}\hat{P}_k\hat{P}_{-k} + \frac{1}{2}m{\omega_k}^2\hat{Q}_k\hat{Q}_{-k} \right\} \qquad (۲۷-۱)$$

در اینجا با استفاده از معادله حرکت هایزنبرگ می توان وابستگی زمانی عملگر $\hat{Q}_k$ را بدست آورد

$$i\hbar\dot{\hat{Q}}_k = \left[\hat{Q}_k, \hat{H}\right] \qquad (۲۸-۱)$$

که با جایگذاری هامیلتونی از رابطه (۱-۲۷) آن را محاسبه می کنیم

$$i\hbar\dot{\hat{Q}}_k = \left[\hat{Q}_k, \sum_k\left(\frac{1}{2m}\hat{P}_k\hat{P}_{-k} + \frac{1}{2}m{\omega_k}^2\hat{Q}_k\hat{Q}_{-k}\right)\right] = \frac{1}{2m}\sum_k\left[\hat{Q}_k, \hat{P}_k\hat{P}_{-k}\right] = i\hbar\frac{\hat{P}_{-k}}{m} \qquad (۲۹-۱)$$

اکنون با استفاده از معادله حرکت هایزنبرگ برای عملگر $\dot{\hat{Q}}$ و بکارگیری هامیلتونی رابطه (۲۷) داریم

$$i\hbar\ddot{\hat{Q}}_k = \left[\dot{\hat{Q}}, \hat{H}\right] = -i\hbar\omega_k{}^2\hat{Q}_k \qquad (۳۰-۱)$$

در آن از رابطه $\left[\hat{P}_k, \hat{Q}_k\right] = -i\hbar$ استفاده شده است. رابطه (۱-۳۰) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\ddot{Q}_k + \omega_k{}^2 Q_k = 0 \qquad (۳۱-۱)$$

رابطه (۱-۳۱)، معادله حرکت برای نوسانگر هارمونیک، با فرکانس ω_k در چارچوب فونون می باشد که دارای ویژه مقادیر انرژی زیر است

$$\varepsilon_k = \left(n_k + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k \qquad (۳۲-۱)$$

و $n_k = 0,1,2,3,....$ عدد کوانتومی نامیده می شود.
نتایج بدست آمده بالا دلالت بر کوانتش انرژی موج کشسان خطی دارد. بنابراین به طریقی مشابه می توان گفت که معادله حرکت کلاسیکی مدارهای الکتریکی با سیستم جرم و فنر یکسان است لذا دارای هامیلتونی کوانتومی مشابه است.

۱–۳ مدارهای الکتریکی مزوسکوپی

در مدارهای کوانتومی طیف پیوسته ای از بار الکتریکی را داریم ولی برای اولین بار لی و چِن[۱] در قالب یک نظریه کوانتومی در مورد مدارهای الکتریکی مزوسکوپی، گسستگی بار الکتریکی را معرفی کردند و نشان دادند که طیف گسسته ای از عملگر خود الحاقی $\hat{q}$ به شکل زیر به‌دست می‌آید[۱].

$$\hat{q}|q\rangle = nq_e|q\rangle \qquad (۳۳-۱)$$

[۱] -Li and Chen

که در آن $n \in z$ است و C $q_e = ۱/۶۰۲ \times ۱۰^{-۱۹}$ ، کوانتوم بار می باشد. با توجه به این گسستگی، آن ها کمینه عملگر جابه جایی $\hat{Q}$و $\hat{Q}^+$ را نیز به شکل زیر معرفی کردند

$$\hat{Q} = e^{iq_e \frac{\hat{p}}{\hbar}} \qquad (۳۴-۱)$$

$$\hat{Q}^+ = e^{-iq_e \frac{\hat{p}}{\hbar}}$$

که در آن دیمانسیون $q_e \hat{p}$ و $\hbar$ یکسان است. عملگرهای $\hat{Q}$ و $\hat{Q}^+$ به همراه $\hat{q}$ در روابط جابجایی زیر صدق می کنند

$$\left[\hat{q}, \hat{Q}\right] = -q_e \hat{Q} \qquad (۳۵-۱)$$

$$\left[\hat{q}, \hat{Q}^+\right] = q_e \hat{Q}^+$$

$$\hat{Q}\hat{Q}^+ = \hat{Q}^+\hat{Q} = 1$$

با توجه به روابط بالا عملگرهای $\hat{Q}$و $\hat{q}$ و همچنین $\hat{Q}^+$و $\hat{q}$ را با هم ناسازگار گویند. عملگرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را ناسازگار گویند هر گاه با هم جابجا نشوند

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \neq 0 \qquad (۳۶-۱)$$

و سازگار گویند هرگاه با هم جابجا شوند. مشاهده پذیرهای ناسازگار که نسبت به سازگار غیر بدیهی ترند، مجموعه کاملی از ویژه کت های همزمان ندارند. همچنین طبق رابطه (۱-۳۵) عملگرهای $\hat{q}$ ، $\hat{Q}$و $\hat{Q}^+$ از جبر لی[۱] تبعیت می کنند که از این خاصیت در محاسبات آتی (به کمک تجزیه لوی) استفاده خواهیم کرد. عملگر نردبانی $\hat{Q}$، عملگری یکانی است چون در شروط زیر صدق می کند

$$\hat{Q}^+\hat{Q} = 1 \qquad (۳۷-۱)$$
$$\hat{Q}\hat{Q}^+ = 1$$

[۱] - Li Algebraic

مطابق تئوری لی و چن یعنی رابطه (۱-۳۳) به وضوح معلوم است که ویژه مقادیر عملگر هرمیتی $\hat{q}$، گسسته هستند و این گسستگی، ناشی از گسستگی بار است. بنابراین می توان ویژه حالت $\hat{q}$ را به صورت $|n\rangle$، بعنوان حالت جایگزیده در اتم، نوشت یعنی

$$\hat{q}|n\rangle = nq_e|n\rangle \qquad (۱-۳۸)$$

با توجه به رابطه (۱-۳۸) و روابط جابجایی (۱-۳۵) به راحتی می توان تاثیر عملگرهای $\hat{Q}$و $\hat{Q}^+$ را بر ویژه بردار $|n\rangle$ بدست آورد. برای این منظور رابطه جابجایی بین $\hat{q}$ و $\hat{Q}$ می نویسیم یعنی

$$\left[\hat{q},\hat{Q}\right] = \hat{q}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{q} = -q_e\hat{Q} \qquad (۱-۳۹)$$

سپس طرفین رابطه (۱-۳۹) را بر ویژه حالت $|n\rangle$ اثر می دهیم

$$q_e\hat{Q}|n\rangle = \hat{Q}\hat{q}|n\rangle - \hat{q}\hat{Q}|n\rangle \qquad (۱-۴۰)$$

با انجام محاسباتی ساده به رابطه زیر می رسیم

$$\hat{q}\hat{Q}|n\rangle = (n-1)q_e\hat{Q}|n\rangle \qquad (۱-۴۱)$$

به روشی مشابه می توان رابطه زیر را نیز بدست آورد

$$\hat{q}\hat{Q}^+|n\rangle = (n+1)q_e\hat{Q}^+|n\rangle \qquad (۱-۴۲)$$

با توجه به روابط (۱-۴۱) و (۱-۴۲) به وضوح مشخص است که $\hat{Q}|n\rangle$ و $\hat{Q}^+|n\rangle$نیز ویژه حالت های عملگر $\hat{q}$ با ویژه مقادیر حقیقی هستند بنابراین می توان گفت

$$\begin{aligned}\hat{Q}|n\rangle &= c|n-1\rangle \\ \hat{Q}^+|n\rangle &= c'|n+1\rangle\end{aligned} \qquad (۱-۴۳)$$

یعنی $\hat{Q}$ و $\hat{Q}^+$ عملگر های بالا برنده و پایین آورنده هستند و c ثابتی عددی است که با الزام بهنجار بودن $|n\rangle$ و $|n-1\rangle$ تعیین می شود. ابتدا توجه کنید که

$$\langle n|\hat{Q}^{+}\hat{Q}|n\rangle = |c|^2 \qquad (۴۴-۱)$$

می باشد و سمت چپ رابطه (۱-۴۴) با توجه به اینکه $\hat{Q}$ عملگری یکانی است، یعنی $\hat{Q}^{+}\hat{Q}=1$ ، بدست می آید بنابراین

$$|c|^2 = 1 \qquad (۴۵-۱)$$

به طور قراردادی با توجه به رابطه (۱-۴۵) ، c را به صورت $e^{-i\alpha_n}$ در نظر می گیریم، که در آن α_n ثابت فاز اختیاری می باشد و روابط (۱-۴۳) به صورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned}\hat{Q}|n\rangle &= \exp(-i\alpha_n)|n-1\rangle \\ \hat{Q}^{+}|n\rangle &= \exp(i\alpha_{n+1})|n+1\rangle\end{aligned} \qquad (۴۶-۱)$$

برای ویژه حالت های $|n\rangle$ در فضای بی نهایت بعدی هیلبرت رابطه تکامل یا بستاری

$$\sum_{n\in z}|n\rangle\langle n| = \hat{1} \qquad (۴۷-۱)$$

و رابطه متعامد بهنجار

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \qquad (۴۸-۱)$$

را داریم. $\hat{1}$ درسمت راست رابطه (۱-۴۷) را به عنوان عملگر همانی می شناسیم. فضای فوک مورد استفاده ما در اینجا از اعداد صحیح مثبت و صفر $(Z^{+}+\{0\})$ تشکیل شده و نسبت به فضای فوک هایزنبرگی (هیلبرت) که دارای دامنه اعداد Z می باشد، متفاوت است.
حال ویژه مقادیر و ویژه توابع عملگر تکانه را بررسی می کنیم. اگر ویژه حالت های پایه در فضای تکانه بصورت زیر باشند

$$\hat{P}|p\rangle = p|p\rangle \qquad (۴۹-۱)$$

که در آن $|p\rangle$ ویژه حالت تکانه و p ویژه مقدار آن می باشد. آنگاه هر رابطه عملگری شبیه $(f(\hat{p}))$را می توان به صورت زیرداشت

(۵۰-۱)

$$f(\hat{p})|p\rangle = f(p)|p\rangle$$

در رابطه (۱-۴۷) و (۱-۴۸) دیدیم ویژه حالت های بهنجار $|n\rangle$ یک مجموعه کامل متعامد بهنجار را تشکیل می دهند. پس طبق اصول موضوعه مکانیک کوانتومی هر حالت دلخواه در فضای هیلبرت (فوک) را می توان بر حسب حالت های پایه $|n\rangle$ بسط داد. بنابراین یک ویژه حالت معلوم $|p\rangle$ در فضای تکانه را به کمک حالت های $|n\rangle$ می سازیم و آنرا به صورت زیر بسط می دهیم

$$|p\rangle = \sum_{n\in z} c_n(p)|n\rangle \qquad (۵۱-۱)$$

که در آن $c_n(p)$ ضرایب بسط می باشد.
عملگر $\hat{Q}$ را از رابطه (۱-۳۴) و همچنین به کمک رابطه (۱-۴۶) از سمت چپ بر حالت $|p\rangle$ اثر داده ، که به ترتیب منجر به روابط (۱-۵۲) و (۱-۵۳) می گردد

$$\hat{Q}|p\rangle = \exp\left(iq_e\frac{\hat{p}}{\hbar}\right)|p\rangle = \sum_n e^{iq_e\frac{p}{\hbar}}c_n(p)|n\rangle \qquad (۵۲-۱)$$

$$\hat{Q}|p\rangle = \sum_n c_n(p)\hat{Q}|n\rangle = \sum_n c_n(p)e^{-i\alpha_n}|n-1\rangle \qquad (۵۳-۱)$$

با تغییر متغیری ساده در رابطه (۱-۵۳) رابطه زیر بدست می آید

$$\hat{Q}|p\rangle = \sum_n c_{n+1}(p)e^{-i\alpha_{n+1}}|n\rangle \qquad (۵۴-۱)$$

حال با مساوی قرار دادن دو رابطه (۱-۵۲) و (۱-۵۴) رابطه بازگشتی زیر برای ضرایب بسط بدست می آید

$$\frac{c_{n+1}(p)}{c_n(p)} = \exp(i\frac{q_e p}{\hbar} + i\alpha_{n+1}) \qquad (۵۵-۱)$$

با شروع از $n=0$ و نوشتن چند جمله از رابطه بازگشتی بالا و فرض $c_0 = 1$، ضرایب بسط $c_n(p)$ به شکل زیر حاصل می شود

$$c_n(p)=\kappa_n \exp\left(inq_e \frac{p}{\hbar}\right) \qquad (۵۶-۱)$$

که در آن $\kappa_n = \exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)$ و $\kappa_{-n} = \exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\right)$ برای $n\rangle 0$ تعریف شده است.بنابراین داریم

$$|p\rangle = \sum_{n\in z} \kappa_n e^{inq_e\frac{p}{\hbar}}|n\rangle \qquad (۵۷-۱)$$

با توجه به تئوری لی و چن در مورد نقش اساسی گسسته بودن بار در مدارها، مشتق های پیوسته در معادله شرودینگر تبدیل به معادلات گسسته می شوند و شکل عملگرهای $\hat{Q}$ و $\hat{q}$ ، به کمک عملگرهای مشتق گسسته راست و چپ با نماد ∇_{q_e} و $\overline{\nabla}_{q_e}$ بدست می آوریم.
از تعریف ریاضی مشتق گسسته چپ و راست را به صورت زیر داریم

(۵۸-۱)

$$\nabla_{q_e} f(n)=\frac{f(n+1)-f(n)}{q_e}$$
$$\overline{\nabla}_{q_e} f(n)=\frac{f(n)-f(n-1)}{q_e}$$

حال با استفاده از انتگرال پیوسته که به نوعی حالت حدی جمع گسسته می باشد، داریم

$$\int_{x_1}^{x_n} f(n)dx = \sum_{n=n_i}^{n_f} q_e f(nq_e) = \begin{cases} \hat{Q}f(x_f)-f(x_i) \\ \\ f(x_f)-\hat{Q}^{+}f(x_i) \end{cases} \qquad (۵۹-۱)$$

و همچنین

$$\overline{\nabla}_{q_e} F = f, \nabla_{q_e} F = f$$

بر این اساس شکل انتگرالی ضرب اسکالری در نمایش بار به جمع تبدیل شده و می توان با تعریف مشتق های گسسته بر حسب عملگرهای نردبان $\hat{Q}^{+},\hat{Q}$

$$\nabla_{q_e} = \frac{\hat{Q}-1}{q_e} \qquad (۶۰-۱)$$
$$\overline{\nabla}_{q_e} = \frac{1-\hat{Q}^{+}}{q_e}$$

بر این اساس عملگرهرمیتی تکانه را به شکل زیر بدست آورد

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{2i}\left(\nabla_{q_e} + \overline{\nabla}_{q_e}\right) \qquad (۶۱-۱)$$

و با جایگذاری رابطه (۱-۶۰) در (۱-۵۶) داریم

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{2iq_e}\left(\hat{Q} - \hat{Q}^{+}\right) \qquad (۶۲-۱)$$

بر اساس آن می توان هامیلتونی را برای ذره آزاد بدست آورد

.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2L}\nabla_{q_e}\overline{\nabla}_{q_e} = \frac{-\hbar^2}{2Lq_e}\left(\nabla_{q_e} - \overline{\nabla}_{q_e}\right) = -\frac{\hbar^2}{2Lq_e^{\,2}}\left(\hat{Q} + \hat{Q}^{+} - 2\right) \qquad (۶۳-۱)$$

تکانه و هامیلتونی بدست آمده را تکانه و هامیلتونی آزاد می نامیم، به خاطر اینکه تحت تاثیر پتانسیل خارجی قرار ندارد. در روابطه (۱-۶۲) و (۱-۶۳) اگر حالت حدی $q_e \to 0$ را در نظربگیریم این روابط دقیقا تکانه و هامیلتونی آزاد در مکانیک کوانتومی قراردادی را نمایش می دهند. در حالت کلی هامیلتونی مدار مزوسکوپی LC (بدون مقاومت) را با توجه به عملگرهای تعریف شده در روابط (۱-۶۰)، (۱-۶۲) و (۱-۶۳) می توان به صورت زیر نوشت

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2Lq_e^{\,2}}\left(\hat{Q} + \hat{Q}^{+} - 2\right) + V(\hat{q}) \qquad (۶۴-۱)$$

که در آن L ضریب القائیدگی القاگر و $V(\hat{q})$ پتانسیل خارجی می باشد که اگر آنرا مساوی $\frac{\hat{q}^2}{2C}$ در نظر بگیریم هامیلتونی برای مدار کوانتومی مزوسکوپی LC بدست می آید.

۱–۴ روابط عدم قطعیت در مدارهای مزوسکوپی

یکی از موضوعات اساسی درهر سیستم کوانتومی بررسی رابطه عدم قطعیت است که در این بخش به آن می پردازیم. بطور کلی در مکانیک کوانتومی برای هر مشاهده پذیر مفروض $\hat{A}$، عملگر زیر را توصیف می کنیم

$$\Delta\hat{A} = \hat{A} - \left\langle \hat{A} \right\rangle \qquad (۶۵-۱)$$