بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اراک
گروه فیزیک

عنوان:

نظریه های میدان کوانتومی در ابعاد بالا

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک

(گرایش ذرات بنیادی)

استاد راهنما :

دکتر سید کامران مویدی

تحقیق و نگارش :

فرشته چزانی شراهی

بهار ۱۳۹۱

و پروردگارت را پرستش کن، تا این که مرگ تو فرا رسد.

(سوره حجر، آیه ۹۹)

خداوند را سپاس بر آنچه نعمت داد و به قلب ها الهام فرمود؛ و مدح و ستایش برای خدایی که به نعمت های عامه اش قبل از استحقاق ابتدا کرد و هر گونه نعمتی را ارزانی داشت و یکی پس از دیگری بر ما فرو ریخت نعمتهایی که از شماره بیرون است و جزای آنها را هرگز نتوان داد و نهایتش را نتوان فهمید.

انسانها را ترغیب فرمود که شکر او را به جای آورند تا او نعمت هایش را فزونی بخشد و پی در پی عطا کند و از آنها طلب حمد وسپاس کرد تا نعمت هایش را بر آنها بریزد و آنها دوباره همانند آن نعمت ها را از او درخواست کنند.

(خطبه فدک حضرت زهرا (س))

تقدیم به شهدای عرصه علم و فناوری

و پدر و مادر عزیزم که در تمام این سالها دلسوزانه مرا تشویق و همراهی نمودند و پشتیبان همیشگی من بوده اند .

و باتقدیر وتشکر فراوان از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر سید کامران مویدی که اتمام این پایان نامه ثمره الطاف بی دریغ ایشان است.

چکیده

در این پایان نامه نظریه میدان های کوانتومی در ابعاد بالا (نظریه میدان های کوانتومی با ابعاد اضافی) به صورت مختصر معرفی می گردند. در ادامه ما به مطالعه نظریه‌های میدان کوانتومی بر روی یک فضا – زمان پنج بعدی با ساختار $M^{4} \times S^{1}$ می پردازیم که M^{4} معرف فضا – زمان چهار بعدی مینکوفسکی بوده و S^{1} نشان دهنده دایره واحد است. مدل ارکانی حامد – دیموپولوس – دوالی (ADD) مرور می شود. این مدل پاسخی به مسئله معروف سلسله مراتب در فیزیک ذرات است. در بخش انتهایی این پایان نامه تعادل ترمودینامیکی میان یک گاز پیرگونی (برانگیزش های گرانشی جرم دار یک میدان نرده ای) و میدان تابشی در هندسه $M^{4} \times S^{1}$ را بررسی می کنیم. تعداد پیرگون ها برای پیکربندی تعادلی محاسبه می شود.

واژه‌های کلیدی: نظریه میدان های کوانتومی با ابعاد اضافی، نظریه های کالوزا – کلاین، مدل ADD، مسئله سلسله مراتب، تعادل ترمودینامیکی

فهرست مطالب

فصل ۱

فرمول بندی نظریه میدان نرده ای حقیقی در $d+۱$ بعد فضا – زمان

۱.۱ مقدمه

ایده وجود ابعاد اضافی دارای سابقه ای طولانی است. برای نخستین بار ریاضیدانی به نام برنارد ریمان هندسه مربوط به خمینه هایی با ابعاد دلخواه را در حوالی سال ۱۸۵۰ میلادی مورد بررسی قرار داد [۱و۲]. در مدت زمان کوتاهی بعد از کار پیشتازانه ریمان، گروهی از ریاضیدانان نظیر چارلز هینتون [۱] و ادوین ابوت [۲] شیفته ایده ابعاد اضافی گردیدند و با نوشتن آثار قابل فهم برای عموم باعث شدند که امکان وجود ابعاد اضافی فضایی در کانون توجه واقع شود.

در سال ۱۹۰۹ برای نخستین بار مفهوم فضا – زمان توسط هرمان مینکوفسکی ابداع گردید [۱]. مینکوفسکی دریافت که اگر زمان را به صورت یک مختصه موهومی در نظر بگیرد، در این صورت رخدادهای فیزیکی را می توان به شکل نقاطی در یک فضا – زمان چهار بعدی با مختصات (x, y, z, ict) در نظر گرفت. در این شرایط تبدیلات لورنتس را می توان معادل با عمل

[۱] Charles Hinton
[۲] Edwin Abbott

دوران در فضا−زمان چهار بعدی در نظر گرفت. امروزه تمامی مدل های مطرح در فیزیک ذرات و گرانش توسط میدان هایی توصیف می گردند که این میدان ها در فضا − زمان زندگی می کنند.

در سال ۱۹۱۵ اینشتین نظریه نسبیت عام خود را تکمیل کرد. این نظریه، نظریه ای هندسی درباره ساختار فضا − زمان است و در آن هندسه عالم توسط نوع ماده توزیع شده در جهان تعیین می گردد.

در سال ۱۹۱۴ میلادی یک فیزیکدان فنلاندی به نام گونار نورد اشتروم [۱] دو نیروی گرانش و الکترو مغناطیس را که تنها نیرو های شناخته شده آن زمان بودند در چارچوب یک نظریه پنج بعدی که شامل یک بعد اضافی فضایی بود وحدت بخشید. با توجه به اینکه در آن زمان هنوز نظریه نسبیت عام اینشتین به صورت کامل فرمول بندی نشده بود از این رو نظریه گرانشی نورد اشتروم را می توان تنها به عنوان تقریبی بر نظریه نسبیت عام اینشتین به شمار آورد.

گام بعدی در ارتباط با نظریه های با ابعاد اضافی فضایی توسط تئودور کالوزا [۲] در سال ۱۹۲۱ میلادی برداشته شد. او با اضافه کردن یک بعد اضافی فضایی به نظریه نسبیت عام اینشتین موفق گردید که دو میدان گرانش و الکترومغناطیس را وحدت بخشد. معادلات میدان اینشتین در نسبیت عام در سه بعد مکان و یک بعد زمان نوشته می شوند. کالوزا با نوشتن معادلات میدان اینشتین در یک فضا − زمان پنج بعدی توانست نشان دهد که نظریه الکترو مغناطیس ماکسول از بعد پنجم حاصل می گردد. عدم مشاهده بعد پنجم در طبیعت مسئله ای بود که ذهن کالوزا را به خود معطوف ساخت. به منظور برطرف ساختن این مشکل کالوزا فرض کرد که مختصه پنجم دارای ساختار حلقوی بوده و شعاع وابسته به این مختصه بسیار کوچک است. بنابراین بعد فضایی اضافی غیر قابل آشکار شدن است. البته کالوزا هیچ روشی برای محاسبه شعاع این مختصه حلقوی ارائه نکرد.

---

[۱] Gunnar Nordstrom

[۲] Theodor Kaluza

در سال ۱۹۲۶ میلادی یک فیزیکدان سوئدی به نام اسکار کلاین موفق گردید که مکانیک کوانتومی را در نظریه کالوزا وارد ساخته و از این طریق شعاع وابسته به مختصه حلقوی را محاسبه کند. بر اساس محاسبات انجام شده توسط کلاین شعاع مختصه حلقوی باید از مرتبه بزرگی طول پلانک باشد.

ویژگی جالب توجه دیگر در نظریه کالوزا — کلاین پیش بینی طیف ذرات است. هنگامی که به بررسی جرم ذرات می پردازیم متوجه می شویم که حتی سبک ترین ذره در نظریه دارای جرمی، 10^{16} مرتبه سنگین تر از جرم پروتون است. بنابراین در مقیاس های کنونی انرژی، امکان مشاهده چنین ذراتی وجود ندارد هر چند امکان وجود چنین ذراتی در عالم آغازین محتمل می باشد. به دلیل وجود مشکلات گفته شده کار بر روی نظریه کالوزا — کلاین و ایده وجود ابعاد اضافی فضایی توسط فیزیکدان ها متوقف گردید و برای مدت زمانی نسبتا طولانی نظریه کالوزا — کلاین به فراموشی سپرده شد.

در دهه ۱۹۷۰ میلادی بار دیگر نظریه کالوزا — کلاین در کانون توجه نظریه پردازان قرار گرفت. ایده اولیه کالوزا و کلاین وحدت بخشی میان دو نظریه گرانش و الکترو مغناطیس که تنها نیروهای شناخته شده طبیعت در آن زمان بودند در یک فضا — زمان پنج بعدی بود که یک بعد فضایی اضافی را شامل می شد. در این زمان فیزیکدانان می دانستند که علاوه بر گرانش و الکترو مغناطیس دو نیروی اساسی دیگر نیز در طبیعت وجود دارند که یکی از آنها نیروی هسته ای قوی و دیگری نیروی ضعیف است. بنابراین اگر قرار باشد که در چارچوب یک نظریه کالوزا — کلاین تعمیم یافته هر چهار نیروی مورد اشاره وحدت یابند تعداد ابعاد فضا — زمان مورد نیاز در نظریه از پنج بیشتر خواهد شد.

امروزه یکی از اهداف نظریه های با ابعاد اضافی فضایی پاسخ به مسئله معروف سلسله مراتب [1] در فیزیک ذرات است. مسئله سلسله مراتب به بررسی این موضوع می پردازد که چرا

[1] hierarchy problem

نیروی گرانش در مقایسه با سایر نیروی های بنیادی طبیعت بسیار ضعیف تر است. بسیاری از نظریه ها کوشیده اند که از طریق معرفی مفهوم ابعاد فضایی اضافی توصیفی قانع کننده برای مسئله سلسله مراتب بیابند. از میان این نظریه ها می توان به نظریه ارائه شده توسط نیما ارکانی حامد و همکاران او اشاره کرد [۲]. بر طبق این نظریه که به نظریه ADD [۱] معروف است جهانی که ما در آن زندگی می کنیم بر روی یک زیر فضای چهار بعدی قرار دارد که این زیر فضا خود در داخل یک جهان n + ۴ بعدی واقع گردیده است. این زیر فضای چهار بعدی به $brane$ – ۳ موسوم بوده و به جهانی که $brane$ – ۳ در آن واقع شده توده [۲] گفته می شود. در مدل ADD برای حل مسئله سلسله مراتب فرض می شود که از میان نیروهای طبیعت تنها گرانش است که می تواند در داخل توده انتشار یابد و سه نیروی دیگر فقط می توانند بر روی $brane$ – ۳ منتشر شوند. از این رو گرانش نسبت به سه نیروی دیگر قدرت خود را بر روی فضای بزرگتری گسترش می دهد و به همین علت هنگامی که ما این نیرو را در جهان خودمان اندازه گیری می کنیم نسبت به سه نیروی دیگر ضعیف تر به نظر می رسد. علاوه بر مدل ADD مدل های دیگری نیز برای حل مسئله سلسله مراتب پیش نهاد شده اند که در بیشتر این مدل ها از مفهوم ابعاد فضایی اضافی استفاده شده است.

با توجه به مطالب گفته شده در این مقدمه ضرورت مطالعه نظریه میدان های کوانتومی در فضا – زمان هایی با ابعاد فضایی اضافی آشکار می گردد.

در این فصل ما به مطالعه نظریه میدان های نرده ای حقیقی در یک فضا – زمان تخت ۱ + d بعدی پرداخته و تابع گرین را برای یک پیکر بندی استاتیک این میدان بدست می آوریم.

---

[۱] Arkani-Hamed , Dimopoulos and Dvali

[۲] bulk

۲.۱ علائم و قرار دادها

فضا $-$ زمان تخت مینکوفسکی در $d+۱$ بعد توسط متریک زیر توصیف می گردد [۱]

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} . \qquad (1.1)$$

با توجه به متریک (۱.۱) می توان نوشت

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx_d^2 \,, \qquad (2.1)$$

که

$$\begin{aligned} dx_d^2 &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^d)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{d} (dx^i)^2 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

است.

در فیزیک ذرات بنیادی و نظریه میدان های کوانتومی متداول است محاسبات در دستگاه آحاد طبیعی انجام گردد، که در این دستگاه $\hbar = c = 1$ است.

۳.۱ چگالی لاگرانژی برای میدان های نرده ای حقیقی در $d+۱$ بعد فضا $-$ زمان

فرض کنید که $\phi(x)$ یک میدان نرده ای حقیقی باشد. کلی ترین شکل برای چگالی لاگرانژی $\mathcal{L}$ در غیاب جملات شامل مشتق میدان به صورت زیر است

$$\mathcal{L}_{no\ deriv} = \sum_n a_n\ \phi^n\ , \qquad (4.1)$$

که a_n ها پارامترهای ثابتی در نظر گرفته می شوند. با انتگرال گیری فضایی بر روی $\mathcal{L}$ لاگرانژی دستگاه بدست می آید، یعنی

$$L = \int \mathcal{L}\ d^d x\ , \qquad (5.1)$$

که

$$d^d x = dx^1\ dx^2\ ...\ dx^d \qquad (6.1)$$

است.

همچنین کنش دستگاه S به صورت زیر تعریف می گردد

$$S = \int \mathcal{L}\ d^{d+1} x\ , \qquad (7.1)$$

که $d^{d+1}x$ عنصر حجم در فضای مینکوفسکی $d+1$ بعدی است. از اکسترمم سازی کنش (۷.۱) معادله حرکت زیر بدست می آید

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0. \qquad (8.1)$$

معادله اویلر– لاگرانژ برای چگالی لاگرانژی (۴.۱) خواهد شد

$$\sum_n\ n\ a_n\ \phi^{n-1} = 0. \qquad (9.1)$$

معادله (۹.۱) فاقد هر گونه دینامیکی بوده و از منظر فیزیکی جالب توجه نمی باشد. ساده ترین چگالی لاگرانژی برای یک میدان نرده ای حقیقی که در بر گیرنده دینامیک میدان نرده‌ای باشد به شکل زیر است [۲]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\ \partial_\mu\phi\ \ \partial^\mu\phi \\ &= -\frac{1}{2}\ \eta^{\mu\nu}\ \ \partial_\mu\phi\ \ \partial_\nu\phi. \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

اکنون معادله حرکت وابسته به (۱۰.۱) را بدست می آوریم، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= 0\,, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)} &= -\frac{1}{2}\ \eta^{\mu\nu}\ \ (\delta^\alpha_\mu\ \ \partial_\nu\phi+\delta^\alpha_\nu\ \ \partial_\mu\phi) \\ &= -\frac{1}{2}(\eta^{\alpha\nu}\ \ \partial_\nu\phi+\eta^{\mu\alpha}\ \ \partial_\mu\phi) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial^\alpha\phi+\partial^\alpha\phi) \\ &= -\partial^\alpha\phi\,, \end{aligned}$$

بنا براین معادله حرکت خواهد شد

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = 0\ ,$$

و یا

$$(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2_d)\ \phi = 0. \tag{۱۱.۱}$$

در معادله (۱۱.۱) ∇_d^2 عملگر لاپلاس در یک فضای اقلیدسی d بعدی بوده و به صورت زیر تعریف می گردد

$$\nabla_d^2 = \frac{\partial^2}{\partial {x^1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x^2}^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial {x^d}^2} \; . \qquad (۱۲.۱)$$

معادله (۱۱.۱) ، معادله موج نرده ای بدون جرم نامیده می شود. اکنون به بررسی پاسخ های معادله (۱۱.۱) می پردازیم. برای این منظور لازم است که نخست بردار موج پادوردای k^μ را تعریف کنیم

$$\begin{aligned} k^\mu &= (k^0, k^1, ..., k^d) \\ &= (\omega, \vec{k}) \; . \end{aligned} \qquad (۱۳.۱)$$

همچنین بردار موج هموردای k_μ خواهد شد

$$\begin{aligned} k_\mu &= (k_0, k_1, ..., k_d) \\ &= (-\omega, \vec{k}) \; . \end{aligned} \qquad (۱۴.۱)$$

معادله موج (۱۱.۱) دارای جواب هایی به شکل زیر است

$$\begin{aligned} \phi &= A(e^{-ik.x} + e^{ik.x}) \\ &= A(e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})} + e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}) \\ &= 2A\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{x}) \; , \end{aligned} \qquad (۱۵.۱)$$

$$\begin{aligned} \phi &= -iA(e^{-ik.x} - e^{ik.x}) \\ &= -iA(e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})} - e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}) \\ &= 2A\sin(\omega t - \vec{k}.\vec{x}) \; . \end{aligned} \qquad (۱۶.۱)$$

پس از قرار دادن پاسخ های (۱۵.۱) و (۱٦.۱) در معادله موج (۱۱.۱) رابطه پاشندگی میان فرکانس زاویه ایω و عدد موج d بعدی k به صورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (k^1)^2 + ... + (k^d)^2 \\ &= \vec{k}^2. \end{aligned} \tag{۱۷.۱}$$

با افزودن جمله $-\frac{1}{2}m^2\phi^2$ موسوم به جمله جرمی به چگالی لاگرانژی (۱۰.۱) چگالی لاگرانژی زیر حاصل می گردد

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\ (\partial_\mu\phi\ \ \partial^\mu\phi + m^2\ \phi^2) \\ &= -\frac{1}{2}\ (\eta^{\mu\nu}\ \ \partial_\mu\phi\ \ \partial_\nu\phi + m^2\ \phi^2). \end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

با جایگذاری چگالی لاگرانژی (۱۸.۱) در معادله (۸.۱) معادله حرکت زیر بدست می آید

$$(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi = 0\ ,$$

و یا

$$(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla_d^2 - m^2)\ \phi = 0. \tag{۱۹.۱}$$

معادله (۱۹.۱) معادله موج نرده ای جرم دار یا معادله کلاین ـگوردن نامیده می شود[۲].
معادله موج (۱۹.۱) دارای پاسخ هایی به شکل امواج تخت، یعنی $\phi = Ae^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})}$ می باشد.
پس از قرار دادن این پاسخ ها در معادله (۱۹.۱) به رابطه پاشندگی به شکل زیر می رسیم

$$\begin{aligned} \omega^2 &= [(k^1)^2 + ... + (k^d)^2] + m^2 \\ &= \vec{k}^2 + m^2. \end{aligned} \tag{۲۰.۱}$$

رابطه (۲۰.۱) همان رابطه آشنای انرژی — تکانه در نسبیت خاص است [۱].

۴.۱ تابع گرین برای معادله موج نرده ای جرم دار

معادله موج (۱۹.۱) در حضور چشمه $\rho(x)$ به صورت زیر در می آید

$$(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla_d^2-m^2)\ \phi=\rho(x). \qquad (۲۱.۱)$$

در حالت استاتیک $\phi=\phi(\vec{x})$ بوده و به ازای $m=0$ معادله (۲۱.۱) به صورت زیر در می آید

$$\nabla_d^2\phi(\vec{x})=\rho(\vec{x}). \qquad (۲۲.۱)$$

معادله (۲۲.۱) همان معادله پواسون در فضای اقلیدسی d بعدی است. اکنون پاسخ های معادله موج (۲۱.۱) را در حالت استاتیک مورد بررسی قرار می دهیم. برای حالت استاتیک، معادله (۲۱.۱) به شکل زیر در می آید

$$(\nabla_d^2-m^2)\ \phi(\vec{x})=\rho(\vec{x}). \qquad (۲۳.۱)$$

برای حل معادله (۲۳.۱) از روش تبدیل فوریه استفاده می کنیم. می توان نوشت[۳]

$$\phi(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\ \ e^{-i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}}\ \ \tilde{\phi}(\vec{k})\ , \qquad (۲۴.۱)$$

$$\rho(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\ \ e^{-i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}}\ \ \tilde{\rho}(\vec{k})\ . \qquad (۲۵.۱)$$

در معادلات (۲۴.۱) و (۲۵.۱) $\phi(\vec{x})$ و $\rho(\vec{x})$ به ترتیب تبدیل فوریه $\tilde{\phi}(\vec{k})$ و $\tilde{\rho}(\vec{k})$ می باشند. معکوس روابط (۲۴.۱) و (۲۵.۱) به صورت زیر هستند

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) \;=\; \int d^dx\ \ e^{i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}}\ \ \phi(\vec{x})\ , \qquad (۲۶.۱)$$

$$\tilde{\rho}(\vec{k}) \;=\; \int d^dx\ \ e^{i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}}\ \ \rho(\vec{x})\ . \qquad (۲۷.۱)$$

اگر (۲۴.۱) را در سمت چپ معادله (۲۳.۱) قرار دهیم ، خواهیم داشت

$$(\nabla_d^2-m^2)\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\ \ e^{-i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}}\ \ \tilde{\phi}(\vec{k})=$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\ \ (\vec{k}^2+m^2)\ \ e^{-i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}}\ \ \tilde{\phi}(\vec{k})\ ,$$

بنابر این می توان نوشت

$$-\frac{۱}{(۲\pi)^d}\int d^dk\ \ (\vec{k}^۲+m^۲)\ \ e^{-i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}}\ \ \tilde{\phi}(\vec{k}) = \frac{۱}{(۲\pi)^d}\int d^dk\ \ e^{-i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}}\ \ \tilde{\rho}(\vec{k})\ ,$$

ویا

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) = -\frac{\tilde{\rho}(\vec{k})}{\vec{k}^۲+m^۲}\ . \tag{۲۸.۱}$$

اکنون با قرار دادن عبارت (۲۸.۱) در معادله (۲۴.۱) به رابطه زیر می رسیم

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= -\frac{۱}{(۲\pi)^d}\int d^dk\ \ e^{-i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}}\ \ \frac{\tilde{\rho}(\vec{k})}{\vec{k}^۲+m^۲}\\ &= -\frac{۱}{(۲\pi)^d}\int d^dk\ \ e^{-i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}}\ \ \frac{۱}{\vec{k}^۲+m^۲}\int d^dx'\ \ e^{i\vec{k}\,\cdot\,\vec{x'}}\ \ \rho(\vec{x'}).\end{aligned} \tag{۲۹.۱}$$

در نوشتن (۲۹.۱) از معادله (۲۷.۱) استفاده شده است. از طرفی معادله ناهمگن (۲۳.۱) دارای پاسخی به شکل زیر است [۲و۳]

$$\phi(\vec{x}) = \int d^dx'\ \ G(\vec{x},\vec{x'})\ \ \rho(\vec{x'})\ , \tag{۳۰.۱}$$

که $G(\vec{x},\vec{x'})$ تابع گرین برای معادله موج نرده ای جرم دار بوده و معادله زیر را بر آورده می سازد

$$(\nabla_d^۲-m^۲)\ G(\vec{x},\vec{x'}) = \delta(\vec{x}-\vec{x'})\ . \tag{۳۱.۱}$$

اثبات اینکه معادله (۲۳.۱) دارای پاسخی به شکل (۳۰.۱) می باشد به شرح زیر است

$$\begin{aligned}(\nabla_d^۲-m^۲)\ \phi(\vec{x}) &= (\nabla_d^۲-m^۲)\ \int d^dx'\ \ G(\vec{x},\vec{x'})\ \ \rho(\vec{x'})\\ &= \int d^dx'\ \ [(\nabla_d^۲-m^۲)\ G(\vec{x},\vec{x'})]\ \ \rho(\vec{x'})\\ &= \int d^dx'\ \ \delta(\vec{x}-\vec{x'})\ \ \rho(\vec{x'})\\ &= \rho(\vec{x})\ .\end{aligned}$$

حال با مقایسه میان معادلات (۲۹.۱) و (۳۰.۱) تابع گرین به شکل زیر بدست می آید

$$G(\vec{x},\vec{x'}) = -\frac{۱}{(۲\pi)^d}\int d^dk\ \ \frac{e^{-i\vec{k}\ .\ (\vec{x}-\vec{x'})}}{\vec{k}^۲+m^۲}\ . \qquad (۳۲.۱)$$

در اینجا متذکر می شویم که با توجه به حقیقی بودن $\rho(\vec{x})$ در معادله (۲۳.۱) ، $\phi(\vec{x})$ باید کمیتی حقیقی باشد. حقیقی بودن $\phi(\vec{x})$ در معادله (۲۴.۱) مستلزم آن است که رابطه زیر برقرار باشد

$$\tilde{\phi}^*(\vec{k}) = \tilde{\phi}(-\vec{k})\ . \qquad (۳۳.۱)$$

اثبات رابطه (۳۳.۱) به شرح زیر است

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= \frac{۱}{(۲\pi)^d}\int d^dk\ \ e^{-i\vec{k}\ .\ \vec{x}}\ \ \tilde{\phi}(\vec{k}) \\ &= \frac{۱}{(۲\pi)^d}\int d^dk\ \ e^{i\vec{k}\ .\ \vec{x}}\ \ \tilde{\phi}(-\vec{k})\ , \qquad (۳۴.۱)\end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\phi^*(\vec{x}) = \frac{۱}{(۲\pi)^d}\int d^dk\ \ e^{i\vec{k}\ .\ \vec{x}}\ \ \tilde{\phi}^*(\vec{k})\ . \qquad (۳۵.۱)$$

شرط $\phi^*(\vec{x}) = \phi(\vec{x})$ همراه با روابط (۳۴.۱) و (۳۵.۱) به اثبات رابطه (۳۳.۱) منجر می گردد.

۵.۱ پتانسیل یوکاوا

تاکنون ما تنها میدان های نرده ای حقیقی را به صورت آزاد مورد بررسی قرار داده ایم. حال به مطالعه اندرکنش میان میدان نرده ای حقیقی جرم دار با یک چشمه خارجی می پردازیم که توسط چگالی لاگرانژی زیر توصیف می گردد[۴]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_۰ + \mathcal{L}_{int} \\ &= -\frac{۱}{۲}\ \partial_\mu\phi\ \ \partial^\mu\phi - \frac{۱}{۲}\ m^۲\ \phi^۲ - \rho\ \phi\ . \qquad (۳۶.۱)\end{aligned}$$

اگر چگالی لاگرانژی (۳٦.۱) را در معادله (۸.۱) قرار دهیم معادله حرکت زیر حاصل می گردد

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^۲ \phi = \rho \, . \qquad (۳۷.۱)$$

اکنون انرژی وابسته به میدان توصیف شده توسط چگالی لاگرانژی (۳٦.۱) را محاسبه می کنیم. برای این منظور از تانسور انرژی – تکانه بهره می جوییم که به شکل زیر تعریف می گردد [۴]

$$T_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu \, \mathcal{L} - \partial_\mu \phi \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \, . \qquad (۳۸.۱)$$

با توجه به (۳٦.۱) و (۳۸.۱) تانسور انرژی – تکانه در نظریه ما به شکل زیر بدست می آید

$$T_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu \, (-\frac{۱}{۲} \; \eta^{\alpha\beta} \;\; \partial_\alpha \phi \;\; \partial_\beta \phi - \frac{۱}{۲} \;\, m^۲ \;\, \phi^۲ - \rho \, \phi) + \partial_\mu \phi \;\; \partial^\nu \phi \, . \qquad (۳۹.۱)$$

با توجه به مطالب بالا چگالی هامیلتونی مدل به صورت زیر تعیین می گردد

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -T_\circ^\circ \\ &= \frac{۱}{۲} \, (\frac{\partial \phi}{\partial t})^۲ + \frac{۱}{۲} \;\, | \, \nabla_d \phi \, |^۲ + \frac{۱}{۲} \, m^۲ \;\, \phi^۲ + \rho \, \phi \end{aligned} \qquad (۴۰.۱)$$

و انرژی میدان خواهد شد

$$\begin{aligned} H &= \int d^d x \;\; \mathcal{H} \\ &= \int d^d x \;\; \frac{۱}{۲} \;\; [(\frac{\partial \phi}{\partial t})^۲ + \; | \, \nabla_d \phi \, |^۲ + m^۲ \;\, \phi^۲ + ۲ \rho \, \phi \,] \, . \end{aligned} \qquad (۴۱.۱)$$

همان گونه که معادله (۴۱.۱) نشان می دهد در غیاب جمله چشمه انرژی مربوط به میدان همواره مقدار مثبت معینی می باشد. برای یک پیکربندی استاتیک انرژی مربوط به میدان خواهد شد

$$H = \frac{۱}{۲} \, \int d^d x \;\; [\, | \, \nabla_d \phi \, |^۲ + m^۲ \;\, \phi^۲ + ۲ \rho \, \phi \,] \, . \qquad (۴۲.۱)$$

معادله (۴۲.۱) را می توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} H &= \frac{۱}{۲} \int d^d x \;\; [\nabla_d . \, (\phi \; \nabla_d \phi) - \phi \nabla_d^۲ \phi + \; m^۲ \;\, \phi^۲ + ۲ \rho \, \phi \,] \\ &= \frac{۱}{۲} \int d^d x \; \nabla_d . \, (\phi \; \nabla_d \phi) + \frac{۱}{۲} \int d^d x \; \phi [-(\nabla_d^۲ - \; m^۲) \; \phi + ۲ \rho \,] \, . \end{aligned} \qquad (۴۳.۱)$$