بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه الزهراء (س)
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

رساله جهت اخذ درجه دکتری

عنوان

حل عددی و تحلیل معادلات انتگرال دو بعدی

استاد راهنما

دکتر یداله اردوخانی

استادان مشاور

دکتر مهدی دهقان

دکتر داریوش بهمردی

دانشجو

سمیه نعمتی فومشی

آذر ۱۳۹۱

کلیه دستاوردهای این تحقیق
متعلق به دانشگاه الزهراء (س) است.

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

که از نگاهشان صلابت
از رفتارشان محبت
و از صبرشان ایستادگی را آموختم

تقدیم به همسرم

که در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نائل شدم

و تقدیم به دختر دلبندم

که امید بخش جان و آرامش زندگی من است.

سپاس گزاری

سپاس و ستایش آفریدگاری را که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخر نماید.

اکنون که به حول و قوت الهی توانسته‌ام این مرحله را با موفقیت به پایان برسانم بر خود فرض میدانم از تمام کسانی که مرا در محقق ساختن اهدافم یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر یداله اردوخانی و استادان مشاور خود، آقایان دکتر مهدی دهقان و دکتر داریوش بهمردی که در طول مدت انجام این رساله از رهنمودهای علمی واخلاقی ایشان بهره‌مند شدم، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

از جناب آقایان دکتر بابلیان، دکتر یوسفی، دکتر شاهرضایی و سرکار خانم دکتر تجویدی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل نمودند و با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود این رساله شدند و همچنین از جناب آقای دکتر پدرو لیما که در طول مدت فرصت مطالعاتی از راهنمایی‌های علمی ایشان بهره‌مند شده‌ام کمال امتنان را دارم.

در آخر، قدردان خانواده عزیزم هستم که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.

سمیه نعمتی فومشی

آذر ۱۳۹۱

اظهارنامه

تمام فصل های رساله به غیر از فصل های اول و دوم به مطالب اصیل اختصاص دارد.

چکیده

در این رساله، روش‌های عددی برای به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی برای معادلات انتگرال دوبعدی خطی و غیرخطی مطرح می‌شوند و با استفاده از توابع متعامد لژاندر انتقال یافته دوبعدی، توابع هایبرید لژاندر و خواص اساسی این دو دسته از توابع پایه‌ای به حل عددی انواع معادلات انتگرال دوبعدی می‌پردازیم.

ابتدا، معادلات انتگرال فردهلم و ولترای دوبعدی خطی در نظر گرفته می‌شوند. شرایط لازم برای وجود و یکتایی جواب برای این نوع از معادلات مطرح می‌شوند. با استفاده از خواص توابع لژاندر انتقال یافته دوبعدی، روش‌هایی برای حل عددی معادلات در نظر گرفته شده پیشنهاد می‌شوند. این روش‌ها معادلات مفروض را به‌طور مستقیم به دستگاهی از معادلات جبری خطی تبدیل می‌کنند. همگرایی روش‌های مطرح شده و جواب عددی حاصل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

سپس، معادلات انتگرال دوبعدی غیرخطی را در نظر می‌گیریم. شرایط لازم برای وجود و یکتایی جواب را به‌دست می‌آوریم. با بکارگیری خواص توابع متعامد لژاندر دوبعدی به همراه نقاط هم‌محلی، که همان نقاط گاوس-لژاندر انتقال‌یافته هستند، هر یک از معادلات مفروض را به دستگاهی از معادلات جبری غیرخطی تبدیل می کنیم. با حل این دستگاه‌ها، جواب تقریبی برای این معادلات حاصل می‌شود.

در آخر، با استفاده از روش نیمه- گسسته سازی بر پایه توابع متعامد هایبرید لژاندر و بلاک-پالس به حل عددی معادلات انتگرال فردهلم-ولترای آمیخته دوبعدی خطی و غیرخطی می‌پردازیم. آنالیز همگرایی روش مورد بحث قرار می‌گیرد.

برای نشان دادن کارایی روش‌های مطرح شده برای هر یک از انواع معادلات مثال‌هایی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی:

معادلات انتگرال دوبعدی، فردهلم، ولترا، آمیخته، چندجمله‌ای‌های لژاندر، توابع بلاک-پالس، هایبرید، ماتریس عملیاتی، روش مستقیم، هم‌محلی، روش نیمه- گسسته سازی، بهترین تقریب

رده بندی موضوعی (۲۰۱۰):

45A05, 45B05, 45D05, 65R20

مقدمه

بحث نظری مربوط به معادلات انتگرال و کاربرد این نوع از معادلات یک موضوع مهم در ریاضی کاربردی است. معادلات انتگرال به عنوان مدل‌های ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی استفاده می‌شوند. همچنین این معادلات در فرمول‌بندی مسایل ریاضی دیگر نیز ظاهر می‌شوند [۲].

در بسیاری از زمینه‌ها از جمله مکانیک کوانتوم، تئوری پتانسیل، ژئوفیزیک، الکتریسیته و مغناطیس، نظریه جنبشی گازها، پدیده‌های ارثی در فیزیک و زیست شناسی، نظریه نوسازی و پزشکی با معادلات انتگرال مواجه می‌شویم. بسیاری از مسایل مقدار کرانه‌ای شامل معادلات دیفرانسیل را می‌توان به صورت معادلات انتگرال فرمول‌بندی کرد. بنابراین پیدا کردن یک تقریب محاسباتی برای جواب معادلات انتگرال، یک شاخه اصلی در تحقیقات علمی به شمار می‌آید [۵۰].

بسیاری از مسایل در مهندسی و مکانیک به معادلات انتگرال دوبعدی تبدیل می‌شوند. برای نمونه، معمولاً محاسبات در فیزیک پلاسما منجر به حل معادلات انتگرال فردهلم[1] می‌شود [۲۸]. در [۳۰]، کاربردی از معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی در جواب یک مساله که در مهندسی برق رخ می‌دهد نشان داده شده است. مک‌کی[2] و دیگران [۶۴]، یک رده از معادلات تلگراف غیرخطی را به معادلات انتگرال ولترای دوبعدی تبدیل کرده‌اند. در [۸۴]، یک روش حل عددی سریع برای معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی خطی از نوع دوم پیشنهاد شده است. کاربردهای دیگری از معادلات انتگرال دوبعدی را می‌توان در [۴۱، ۶۴] یافت.

در مقایسه با آنالیز عددی مربوط به معادلات انتگرال یک‌بعدی (برای نمونه [۲، ۲۱، ۲۲، ۵۰] و مراجع آنها مشاهده شود)، آنالیز روش‌های محاسباتی برای حل عددی معادلات انتگرال چندبعدی اخیراً شروع شده است و به اندازه معادلات انتگرال یک بعدی توسعه نیافته است ([۱۰، ۱۲، ۴، ۱۷، ۱۶، ۳۰، ۳۵، ۳۶، ۳۹، ۴۰، ۴۷، ۶۴] مشاهده شود).

بهرحال، پیشرفت بامعنی در این عرصه در ۲۳ سال اخیر حاصل شده است، با شروع از کار معروف برونر[3] و کاوتن[4] [۱۲] که در آن روش‌های هم محلی و هم‌محلی تکراری را برای جواب معادلات انتگرال ولترای[5] خطی معرفی کردند. بعد از آن، کاوتن در [۴۷] این مطالعه را برای معادلات انتگرال فردهلم-ولترای خطی و برونر در [۱۰] برای معادله انتگرال ولترای غیر خطی گسترش دادند و آنالیزی از خواص همگرایی موضعی و جامع را برای این روش‌ها ارایه دادند.

[1] Fredholm
[2] Mckee
[3] Brunner
[4] Kauthen
[5] Volterra

از جمله کارهای مهم دیگری که در این زمینه انجام شده است می‌توان به کارهای هان[۶] و همکارانش اشاره کرد. آنها بسط‌های خطای مجانبی را برای روش‌های کلاسیک، وقتی بر روی معادلات انتگرال دوبعدی اعمال شده‌اند، به دست آورده‌اند و از آنها، به عنوان پایه ای برای معرفی الگوریتم های برونیابی استفاده کردند. در [۴۰]، از این روش برای آنالیز جواب معادله انتگرال فردهلم-ولترای خطی با روش ذوزنقه‌ای نیشتروم[۷] استفاده شده است. هان، روش نیشتروم را برای حل معادلات انتگرال فردهلم-ولترای غیرخطی مطرح کرد [۳۴]. در [۳۹] و [۳۵]، روش هم‌محلی تکراری برای جواب معادله انتگرال ولترای غیرخطی ارایه شده است. در [۳۶]، روش نیشتروم برای حل معادله انتگرال فردهلم غیر خطی و در [۳۷]، روش گالرکین[۸] تکراری برای حل این نوع از معادلات مطرح شده‌اند. همچنین، انها روش برونیابی بر پایه بسط مجانبی جواب های گالرکین تکراری را، برای معادلات انتگرال ولترای دوبعدی ارائه داده‌اند [۳۸].

در سال‌های اخیر توجه بیشتری به حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی شده است. از جمله کارهایی که در این زمینه صورت گرفته است، می توان به استفاده از روش موجک لژاندر[۹] دوبعدی برای حل معادلات انتگرال فردهلم ولترای آمیخته اشاره کرد [۷]. یوسفی و همکارانش [۸۶] روش تکراری خی[۱۰] را برای حل معادلات انتگرال فردهلم-ولترای غیر خطی مطرح کرده اند. مالک‌نژاد و مهدیانی در [۵۶]، به حل عددی این نوع از معادلات با استفاده از توابع بلاک-پالس[۱۱] دوبعدی پرداختند. همچنین، مالک‌نژاد و دیگران [۵۷]، از این توابع پایه‌ای برای حل عددی معادله انتگرال ولترای دوبعدی غیرخطی استفاده کرده‌اند. در [۴]، از توابع هار[۱۲] گویا شده برای حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی غیرخطی استفاده شده است. بزم و بابلیان [۸]، جواب معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی را با استفاده از قاعده انتگرال‌گیری گاوسی تقریب زده‌اند. در [۱]، یک روش عددی برای جواب معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی، بر پایه درونیابی با استفاده از توابع شعاعی گاوسی، بر حسب گره های لژاندر- گاوس- لباتو و وزن های متناظر مطرح شده است.

اکثر روش‌های محاسباتی برای جواب تقریبی یک معادله انتگرال را می‌توان به صورت روش‌های بسطی در نظر گرفت. این روش‌ها بر پایه بسط تابع مجهول و توابع موجود در معادله انتگرال بر حسب توابع پایه‌ای هستند. بنابراین، یک روش بسطی، الگوریتمی برای تعیین ضرایب بسط جواب معادله است. الگوریتم‌های زیادی برای روش بسطی وجود دارند که می‌توان به تقریب کمترین مربعات، روش هم‌محلی، روش گالرکین و ... اشاره کرد [۲۱]. اغلب، این روش‌ها یک معادله

[۶] Han
[۷] Nystrom
[۸] Galerkin
[۹] Legendre
[۱۰] He
[۱۱] Block-Pulse
[۱۲] Haar

انتگرال را به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌کنند. درهرصورت، انتخاب توابع پایه‌ای از مهم‌ترین مسایل در اجرای این روش‌ها است. درکل، می‌توان توابعی را به عنوان توابع پایه ای انتخاب کرد که در زمان اجرای الگوریتم، موجب کم‌کردن خطا در تلاش محاسباتی لازم برای اجرا شوند [۶، ۱۱، ۴۳، ۴۶، ۵۰].

در این پژوهش، از توابع لژاندر دوبعدی و توابع هایبرید لژاندر و بلاک-پالس استفاده می‌کنیم. از توابع لژاندر دوبعدی برای حل عددی انواع مختلفی از معادلات انتگرال فردهلم و ولترای دوبعدی استفاده می‌شود. همچنین، توابع هایبرید لژاندر، برای حل معادلات انتگرال فردهلم-ولترای آمیخته دوبعدی به کار برده می‌شوند. درکل، دو دسته از روش‌های عددی در نظر گرفته می‌شوند: روش‌های هم‌محلی و روش‌های مستقیم. پیکره اصلی این پژوهش به صورت زیر است:

فصل ۱، مربوط به مقدمات ریاضی در نظریه معادلات انتگرال و آنالیز تابعی است.

فصل ۲، به معرفی چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر و توابع هایبرید لژاندر و بلاک-پالس و خواص اساسی آنها اختصاص دارد.

در فصل ۳، با توجه به تعریف و خواص چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر، توابع متعامد لژاندر انتقال یافته دوبعدی تعریف، و خواص آنها بررسی می‌شوند.

در فصل ۴، روش‌هایی برای حل معادلات انتگرال فردهلم و ولترای دوبعدی خطی از نوع دوم مطرح می شوند. این روش‌ها، بر پایه بسط توابع بر حسب توابع متعامد لژاندر انتقال یافته دوبعدی و استفاده از روش مستقیم هستند، و تقریبی از جواب این معادلات را ارائه می‌دهند. پیرامون همگرایی جواب برای روش‌های مطرح شده بحث می شود. در آخر، روش مطرح شده برای معادلات انتگرال ولترا، برای دستگاهی از معادلات انتگرال ولترای دوبعدی استفاده می‌شود.

فصل ۵، به ارایه جواب تقریبی برای معادلات انتگرال فردهلم و ولترای دوبعدی غیرخطی، با استفاده از توابع لژاندر دوبعدی و روش هم‌محلی مربوط می شود.

در فصل ۶، روش عددی برای حل معادلات انتگرال فردهلم-ولترای آمیخته دوبعدی خطی و غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این روش بر پایه نیمه-گسسته سازی و استفاده از توابع پایه‌ای هایبرید لژاندر است. در آخر آنالیز همگرایی مورد بحث قرار می‌گیرد.

فهرست مطالب

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\|.\|_\infty$ نرم ماکسیمم

$\|.\|_۲$ نرم میانگین مربعات

(u,v) ضرب داخلی u و v

$D(T)$ دامنه عملگر T

$R(T)$ برد عملگر T

$\mathcal{N}(T)$ مجموعه پوچ عملگر T

$\mathbb{K}$ میدان اعداد

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

$C[a,b]$ مجموعه توابع پیوسته روی $[a,b]$

$\mathcal{L}(V,W)$ مجموعه همه عملگرهای پیوسته از فضای نرمدار V به فضای نرمدار W

$x =^\circ y$ معادل بودن x و y

$\mathcal{P}_n$ فضای همه چندجمله ایهای از درجه حداکثر n

$\delta(u,K)$ فاصله u تا فضای K

$span\{\phi_۱,\dots,\phi_n\}$ فضای تولید شده توسط $\phi_۱,\dots,\phi_n$

$L_n(x)$ چندجمله ای لژاندر از درجه n

δ_{ij} دلتای کرونکر

$\otimes$ ضرب کرونکر

$T^{-۱}$ معکوس عملگر T

فصل ۱

پیشنیازها و تعاریف مقدماتی

در این فصل، برخی مفاهیم و نتایج مربوط به آنالیز تابعی که در این رساله از آنها استفاده می‌شود بیان می‌شوند. ابتدا، معادلات انتگرال به صورت مختصر معرفی می‌شوند.

۱.۱ معادلات انتگرال

معادله انتگرال ، معادله ای است که در آن تابع مجهول در داخل علامت انتگرال ظاهر می‌شود. طبیعتاً، در چنین معادله ای جملات دیگر نیز می‌توانند ظاهر شوند. معادلات انتگرال به طور طبیعی در بسیاری از زمینه های مکانیک و فیزیک ریاضی رخ می دهند. آنها همچنین به عنوان نمایش فرمول هایی برای جواب های معادلات دیفرانسیل به وجود می آیند. جزییات بیشتر درباره معادلات انتگرال را می‌توان در منابع [۲، ۲۲، ۴۳، ۴۶، ۴۸، ۵۰، ۷۴] یافت. در اینجا، انواع معادلات انتگرال معرفی می‌شوند.

۱.۱.۱ معادلات انتگرال یک بعدی

روش‌های استاندارد برای معادلات انتگرال به معادلات انتگرال یک بعدی به شکل‌های زیر مربوط می‌شوند:

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt; \quad a \leq x \leq b, \tag{۱.۱}$$

یا

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt; \quad a \leq x \leq b, \tag{۲.۱}$$

که در آنها λ یک پارامتر عددی (احتمالاً مختلط) و $f(x)$ تابع معلوم و $u(t)$ تابع مجهول است. این دو به ترتیب، معادلات انتگرال فردهلم خطی از نوع اول و دوم برای تابع مجهول $u(t)$ هستند. در (۱.۱) و (۲.۱)، تابع $k(x,t)$ هسته معادله نامیده می‌شود که در مربع $a \leq x \leq b$ و $a \leq t \leq b$ از صفحه (x,t) تعریف می‌شود. این معادلات به طور کامل با مفروض بودن بازه $[a,b]$، هسته $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ مشخص می‌شوند.

اگر $k(x,t) = 0$ وقتی $x < t$، معادله (۱.۱) یا (۲.۱) را می‌توان به شکل‌های زیر نوشت،

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt; \quad a \leq x \leq b, \tag{۳.۱}$$

یا

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt; \quad a \leq x \leq b. \tag{۴.۱}$$

این معادلات بترتیب، معادلات انتگرال ولترای خطی از نوع اول و دوم نامیده می‌شوند.

معادلات انتگرال به شکل (۱.۱) و (۳.۱) معادلات از نوع اول نامیده می‌شوند، چون تابع مجهول $u(t)$ فقط در داخل علامت انتگرال ظاهر می‌شود. معادلات انتگرال به شکل (۲.۱) و (۴.۱) که در آنها تابع مجهول $u(t)$ هم در علامت انتگرال و هم در بیرون آن ظاهر می‌شود، از نوع دوم گفته می‌شوند.

اگر در معادله (۲.۱) $f(x) = 0$، معادله انتگرال همگن از نوع دوم به دست می آید

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt; \quad a \leq x \leq b, \tag{۵.۱}$$

که به آن معادله مقدار ویژه یا یک معادله فردهلم از نوع سوم گفته می‌شود. وقتی (۲.۱) و (۵.۱) هم زمان در نظر گرفته شوند، (۵.۱) معادله همگن مرتبط با (۲.۱) نامیده می‌شود.

برای یک مقدار معلوم λ، (۵.۱) دارای جواب بدیهی $u(x) = 0$ است؛ λ هایی که برای آنها جواب غیر بدیهی وجود دارد مقادیر مشخصه نامیده می‌شوند. ممکن است هیچ مقداری (متناهی) وجود نداشته باشد، برای مثال، اگر $k(x,t) = 0$ برای $x < t$، بنابراین (۵.۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود،

$$u(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt, \quad a \leq x \leq b.$$

تحت شرایط منظم مناسب روی k و uهیچ مقدار مشخصه متناهی برای این معادله وجود ندارد.

هر یک از معادلات (۱.۱)-(۴.۱) معادلات انتگرال خطی نامیده می‌شوند زیرا برای این معادلات می‌توان نوشت:

$$L[u(x)] = f(x),$$

که در آن عبارت $L[u(x)]$ شامل تابع مجهول $u(x)$، خطی است به این معنی که

$$L[\lambda_۱ u_۱(x) + \lambda_۲ u_۲(x)] = \lambda_۱ L[u_۱(x)] + \lambda_۲ L[u_۲(x)].$$

به طور کلی، می‌توان معادلات انتگرال فردهلم و ولترای غیرخطی را تشخیص داد.
معادله انتگرال فردهلم غیرخطی از نوع اول:

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t,u(t))dt; \quad a \leq x \leq b,$$

از نوع دوم:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t,u(t))dt; \quad a \leq x \leq b,$$

از نوع سوم:

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t,u(t))dt; \quad a \leq x \leq b.$$

معادلات انتگرال ولترای غیرخطی از نوع اول:

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t,u(t))dt; \quad a \leq x \leq b,$$

از نوع دوم:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t,u(t))dt; \quad a \leq x \leq b.$$

۲.۱.۱ معادلات انتگرال چند بعدی

به طور کلی، می‌توان معادلات انتگرالی را در نظر گرفت که در آن تابع مجهول فقط به یک متغیر وابسته نیست بلکه به چندین متغیر وابسته است.

فرض کنیم $D = \prod_{i=۱}^{d}[a_i, b_i]$ یک مجموعه بسته و کران دار در $\mathbb{R}^d$، $a_i,\ b_i \in \mathbb{R}$ و $d > ۱$ باشد، و

$$\mathbf{x} = (x_۱,\ x_۲, \ldots, x_d), \quad \forall \mathbf{x} \in D,$$

را در نظر می گیریم. برای هر $\mathbf{x},\ \mathbf{t} \in D$، می گوییم $\mathbf{x} < \mathbf{t}$ اگر $x_i < t_i,\ i = ۱,\ ۲, \ldots, d$.
معادله انتگرال فردهلم d-بعدی خطی کلی از نوع اول دارای شکل زیر است،

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \int_D k(\mathbf{x},\mathbf{t}) u(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad \mathbf{x} \in D, \qquad (۶.۱)$$

که در آن λ یک پارامتر عددی و توابع $k(\mathbf{x},\mathbf{t})$ و $f(\mathbf{x})$ توابع معلوم و $u(\mathbf{t})$ تابع مجهول است. چنین معادلاتی معمولاً به عنوان بد-وضع دسته بندی می‌شوند، زیرا جواب uبه تغییرات کوچک در تابع داده f حساس است [۲].

معادله انتگرال فردهلم d-بعدی خطی از نوع دوم به شکل زیر است،

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda \int_D k(\mathbf{x},\mathbf{t})u(\mathbf{t})d\mathbf{t}; \quad \mathbf{x} \in D. \tag{۷.۱}$$

مشابه حالت یک-بعدی، اگر $k(\mathbf{x},\mathbf{t}) = ۰$ وقتی $\mathbf{t} < \mathbf{x}$، به ترتیب، معادله (۶.۱) یا (۷.۱) را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت:

$$f(\mathbf{t}) = \lambda \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} k(\mathbf{x},\mathbf{t})u(\mathbf{t})d\mathbf{t}; \quad \mathbf{x} \in D,$$

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} k(\mathbf{x},\mathbf{t})u(\mathbf{t})d\mathbf{t}; \quad \mathbf{x} \in D,$$

که $a = (a_۱, a_۲, \ldots, a_d)$ و از نماد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} G(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \int_{a_۱}^{x_۱}\int_{a_۲}^{x_۲}\ldots\int_{a_d}^{x_d} G(t_۱, t_۲, \ldots, t_d)dt_d \ldots dt_۲ dt_۱.$$

همچنین می‌توان معادلات انتگرال فردهلم و ولترای چند بعدی غیرخطی روی D را به شکل زیر تعریف کرد:

معادلات انتگرال فردهلم d-بعدی غیرخطی از نوع اول:

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \int_D k(\mathbf{x},\mathbf{t},u(\mathbf{t}))d\mathbf{t}; \quad \mathbf{x} \in D,$$

از نوع دوم:

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda \int_D k(\mathbf{x},\mathbf{t},u(\mathbf{t}))d\mathbf{t}; \quad \mathbf{x} \in D,$$

از نوع سوم:

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_D k(\mathbf{x},\mathbf{t},u(\mathbf{t}))d\mathbf{t}; \quad \mathbf{x} \in D.$$

معادلات انتگرال ولترای d-بعدی غیرخطی از نوع اول:

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} k(\mathbf{x},\mathbf{t},u(\mathbf{t}))d\mathbf{t}; \quad \mathbf{x} \in D,$$

از نوع دوم:

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} k(\mathbf{x}, \mathbf{t}, u(\mathbf{t}))d\mathbf{t}; \quad \mathbf{x} \in D.$$

یک نوع خاص از معادلات انتگرال چند بعدی که در این رساله به حل عددی آن می پردازیم، معادله انتگرال فردهلم-ولترای آمیخته دوبعدی است. شکل کلی این نوع از معادلات به‌صورت زیر است،

$$u(x,t) = f(x,t) + \int_{\circ}^{t} \int_{\Omega} K(x,t,y,z,u(y,z))dydz,$$

به طوری‌که، $u(x,t)$ یک تابع با مقدار عددی مجهول است که روی $D = \Omega \times [\circ, T]$ تعریف می‌شود، و Ω یک زیرمجموعه بسته از $\mathbb{R}^n$، با $n = ۱, ۲, ۳$ است. توابع $f(x,t)$ و $K(x,t,y,z,u)$، بترتیب، توابع معلوم روی D و $S = \{(x,t,y,z,u) : \ x,y \in \Omega, \ \circ \le z \le t \le T\}$ هستند [۱۱].

۲.۱ فضاهای خطی

فضاهای خطی یا برداری، زمینه استاندارد برای مطالعه و حل قسمت عظیمی از مسایل در معادلات دیفرانسیل و انتگرال، نظریه تقریب، نظریه بهینه سازی و موضوعات دیگر در ریاضی کاربردی هستند. در این بخش برخی از مفاهیم و نتایج مربوط به فضاهای خطی، و به طور خاص بعضی از فضاهای خطی مهم تر مانند فضاهای باناخ[۱]، فضاهای هیلبرت[۲] و فضاهای تابعی دیگر که مکرراً در ریاضی کاربردی استفاده می‌شوند، مطرح خواهند شد [۳].

تعریف ۱.۲.۱. یک فضای خطی V مجموعه ای از عناصر $\{u, v, \ldots\}$ است (که به عنوان نقاط یا بردارها شناخته می‌شوند) به‌طوری‌که نسبت به جمع و تحت ضرب در یک اسکالر α (حقیقی یا مختلط) بسته است. برای دیدن خواص کامل یک فضای برداری به [۲۲] مراجعه شود.

مثال ۲.۲.۱. فضای $C[a,b]$ متشکل از همه توابع حقیقی مقدار و یا با مقدار مختلط پیوسته‌ی تعریف شده روی بازه $[a,b]$ با جمع $(v_۱ + v_۲)(s) = v_۱(s) + v_۲(s)$ و ضرب اسکالر $(\alpha v)(s) = \alpha v(s)$ یک فضای برداری است.

۱.۲.۱ فضاهای نرمدار

در آنالیز عددی، به طور مکرر به بررسی نزدیکی جواب عددی به جواب دقیق نیاز داریم. برای پاسخ دادن به این سؤال به صورت کمی، یک مقیاس برای تعیین بزرگی فاصله بین جواب عددی و جواب دقیق لازم است. یک نرم در یک فضای خطی چنین مقیاسی را فراهم می کند.

[۱] Banach
[۲] Hilbert

تعریف ۳.۲.۱. یک تابع حقیقی مقدار $\|.\|$ تعریف شده روی فضای برداری V نرم نامیده می‌شود اگر خواص زیر برای آن برقرار باشد:

(i) برای هر $v \in V$، $\|v\| \geq ۰$، و $\|v\| = ۰$ اگر و تنها اگر $v = ۰$،

(ii) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$ و $v \in V$، $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$،

(iii) برای هر $u, v \in V$، $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

خاصیت (iii) نامساوی مثلثی است. اگر در خاصیت (i) $\|v\| = ۰$ ضرورتاً منجر به $v = ۰$ نشود، $\|.\|$ یک نیم-نرم نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. یک فضای برداری V مجهز به نرم $\|.\|$ فضای نرمدار گفته می‌شود.

مثال ۵.۲.۱. فضای برداری $C[a,b]$ که در مثال ۲.۲.۱ تعریف شده است، با دو نرم زیر فضای نرمدار است.

نرم ماکسیمم: $\|v\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |v(t)|,$

یا نرم میانگین مربعات: $\|v\|_۲ = \left(\int_a^b |v(t)|^۲ dt\right)^{\frac{۱}{۲}}.$

با توجه به مفهوم نرم می‌توان راجع به همگرایی یک دنباله نامتناهی از عناصر بحث کرد.

تعریف ۶.۲.۱. (همگرایی قوی) فرض کنید $\{v_n\}$ یک دنباله نامتناهی از عناصر در یک فضای نرمدار V باشد و $v \in V$ طوری باشد که $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = ۰$. آنگاه $\{v_n\}$ به v همگراست.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید V یک فضای نرمدار باشد. یک دنباله $\{v_n\} \subset V$ که در شرط زیر صدق کند، دنباله کوشی[۳] نامیده می‌شود:

$$\lim_{n,m\to\infty} \|v_n - v_m\| = ۰.$$

اگر دنباله $\{v_n\}$ همگرا باشد، آنگاه کوشی نیز است. به عبارت دیگر دنباله کوشی بودن یک شرط لازم برای همگرا بودن دنباله است. اما برعکس آن برقرار نیست، زیرا حد یک دنباله ممکن است در فضا نباشد. به عنوان مثال، حد یک دنباله از توابع پیوسته ممکن است پیوسته نباشد.

مفهوم فضای نرمدار معمولاً بسیار کلی است و توجه خاص به نوع ویژه ای از فضای نرمدار است که فضای باناخ نامیده می‌شود.

[۳] Cauchy