بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: ریاضی

گروه: کاربردی

تخصیص مقدار ویژه برای سیستم های ناوردای زمانی خطی با تاخیر زمانی

دانشجو: نفیسه رضوانی

استاد راهنما:

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور:

دکتر محمد مهدی فاتح

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: اردیبهشت ۱۳۹۲

سپاس گذاری

از اســتاد گرامیم دکتر احسنی طهرانی به خاطر آموزش ها و راهنمایی های ایشان، صادقانه تشکر می کنم و از اســتاد مشــاورم دکتر فاتح نیز به خاطر راهنمایی ایشــان، بســیار متشــکرم. همچنین از دکتر ناظمی و دکتر هاشمی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را کشیده اند، سپاس گذارم.

تعهد نامه

اینجانب نفیسه رضوانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تخصیص مقدار ویژه برای سیستم های ناوردای زمانی خطی با تاخیر زمانی تحت راهنمائی دکتر حجت احسنی طهرانی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، روشی جدید که در سال های اخیر برای کنترل سیستم هایی از معادلات دیفرانسیل تاخیری و پایدارسازی آن ها با استفاده از تابع لامبرت مطرح شده را معرفی می کنیم. به این ترتیب روشی جدید برای طراحی کنترل کننده به وسیله تخصیص مقدار ویژه به همراه چند مثال ارائه می شود. با استفاده از این روش می توان یک زیر مجموعه از مقدارهای ویژه را به موقعیت های مطلوب انتقال داد. برای سیستمی که توسط معادلات دیفرانسیل تاخیری نشان داده می شود، جواب سیستم براساس تابع لامبرت بدست می آید و پایداری تعیین می شود. اگر سیستم پایدار نباشد، بعد از بررسی کنترل پذیری سیستم، یک پسخورد پایدار کننده به وسیله تخصیص مقدارهای ویژه طراحی می شود و سرانجام، سیستم حلقه بسته می تواند پایدار شود.

واژه های کلیدی: پایداری، تابع لامبرت، تاخیر زمانی، تخصیص مقدار ویژه، کنترل کننده پسخورد، معادلات دیفرانسیل تاخیری

مقاله مستخرج از پایان نامه

[1] N. Rezvani, H. Ahsani Tehrani, "Control of linear systems with state and input delays," 4th Conference on Mathematical Analysis and its Applications, Faculty of Khansar, Khansar, Iran, May 7-8, 2013.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مسـأله کنترل سیستم های تاخیری در چند دهه اخیر مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است به این خاطر که تاخیر زمانی اغلب در سـیسـتم های متنوعی مانند مهندسـی، پزشـکی، شیمی، فیزیک، اقتصاد و ... اتفاق می افتد به طوریکه وجود تاخیر در این سیستم ها باعث عملکرد نامناسب آن ها می شود. این سیستم ها توسط معادلات دیفرانسیل تاخیری نشان داده می شوند که این معادلات به طور گســـترده ای در دهه های گذشـــته مورد مطالعه قرار گرفته اند [۲۰]. وجود تاخیر باعث ایجاد تعداد نامتناهی ریشه در معادله مشخصه سیستم های تاخیری می شود به همین خاطر، تحلیل این سیستم ها با روش های کلاسـیک مخصـوصـاً در بررسی پایداری و طراحی کنترل کننده پسخورد، مشکل می باشـد. در طی سـه دهه اخیر، مسـأله تحلیل پایداری این سـیستم ها مورد توجه قرار گرفته و مقالات زیادی در این زمینه مطرح شده است [۹]. همچنین روش هایی مانند روش SP[۱] در [۲۴] و روش FSA[۲] در [۳۳] با تبدیل مسـأله به یک سیستم بدون تاخیر، برای کنترل سیستم های تاخیری استفاده شده اسـت. چنین روش هایی ممکن است هنگامی که برای سیستم های واقعی به کار برده می شوند باعث خطاهای غیر منتظره شـوند. بعلاوه اجرای کامل چنین روش هایی به خاطر مشکلات محاسباتی هنوز یک مسـأله باز اسـت. همچنین برای این سـیستم ها کنترل کننده هایی با استفاده از توابع لیاپانوف[۳] در [۸، ۱۲] با به کار بردن نامعادلات ماتریســـی خطی (LMIs)[۴] یا معادلات ریکاتی جبری (AREs)[۵] طراحی شـده است. اگر چه می توان از چنین روش هایی برای انواع کلی تری از سیستم های تاخیری مانند سـیســتم های غیر خطی، سـیستم های تغییر پذیر با زمان، سیستم هایی با تاخیرهای متغیر با زمان و سـیستم های با چند تاخیر استفاده کرد اما این روش ها نیاز به فرمول بندی پیچیده ای دارند و از طرف دیگر روش های سـیســتماتیک کلی برای سـاخت توابع لیاپانوف مناسـب در دســترس نمی

[۱] Smith Peredictor

[۲] Finite Spectrum Assignment

[۳] Lyapunov

[۴] Linear Matrix Inequalities

[۵] Algebraic Riccati Equations

باشـد. اخیراً یک روش تحلیلی برای بدسـت آوردن جواب این سیستم ها و تحلیل آن ها با استفاده از تابع لامبرت در [۱ ، ۲۷] مطرح شـده است که در این تحقیق به معرفی این روش می پردازیم و از آن برای کنترل چنین سیستم هایی استفاده می کنیم.

فصل اول از این پایان نامه، شامل مطالبی است که در فصل های بعد به آن ها نیاز داریم. در فصل دوم به معرفی تابع لامبرت می پردازیم و فرم فضای حالت سیستم هایی با تاخیر منحصر بفرد را نشان می دهیم. در فصـل بعد به دنبال بدسـت آوردن جواب برای این سیستم ها با استفاده از تابع لامبرت می باشـیم. در فصـل چهارم نیز به تحلیل پایداری این سـیسـتم ها با استفاده از این تابع می پردازیم. در فصـل پنجم که فصـل اصـلی این پایان نامه می باشد ابتدا به بررسی پایداری سیستم کنترل پذیر می پردازیم و در صـورتی که سـیسـتم پایدار نباشد، با استفاده از تخصیص مقدار ویژه و با طراحی کنترل کننده پسخورد، سعی می کنیم سیستم را به صورت پایدار، کنترل نماییم. همچنین در ادامه این فصل از روش تابع لامبرت به عنوان روشی جدید برای کنترل سیستم های ناوردای زمانی خطی با تاخیر در متغیر حالت و ورودی استفاده می کنیم و سپس نتایج بدست آمده را با ارائه یک مثال نشان می دهیم. در فصل آخر نیز خلاصه و نتایج این تحقیق را بیان می کنیم.

فصل اول

تعاریف و پیش نیازها

۱-۱ تعاریف و پیش نیازهای ریاضی

تعریف ۱-۱ فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. ریشه های چند جمله ای،

$$P_n(\lambda) = det(A - \lambda I) \tag{۱-۱}$$

را که به چند جمله ای مشخصه ی ماتریس A موسوم است، مقادیر ویژه ی[۱] ماتریس A گوییم. به عبارت دیگر، λ را یک مقدار ویژه ی ماتریس A می نامیم، اگر و تنها اگر بردار غیر صفر x موجود باشد به طوری که،

$$Ax = \lambda x \tag{۲-۱}$$

بردار x را بردار ویژه ی[۲] متناظر با مقدار ویژه ی λ گوییم.

یکی از کاربردهای مهم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در قطری سازی ماتریس های مربعی است. اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد، این ماتریس را با تبدیل تشابهی می توان قطری نمود ولی ماتریسی که مجموعه کاملی از n بردار ویژه مستقل خطی را نداشته باشد، نمی تواند قطری گردد چنین ماتریسی را باید به فرم متعارفی جردن[۳] تبدیل کرد.

قضیه زیر نشان می دهد که هر ماتریس دلخواه، همیشه مشابه با یک ماتریس بلوکی قطری می باشد.

قضیه ۱-۱ برای هر ماتریس دلخواه $A_{n\times n}$ ، یک ماتریس نامنفرد T وجود دارد به گونه ای که،

[۱] Eigenvalue
[۲] Eigenvector
[۳] Jordan Canonical Form

$$J_{n\times n} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_1 & & & & & \\ & J_2 & & & 0 & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot & \\ & & & & & J_m \end{bmatrix} \quad (۳-۱)$$

است که در آن هر یک از بلوک های جردن J_i به صورت،

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i} \quad , i = 1, \dots, m \quad (۴-۱)$$

می باشد که هر یک از λ_i ها مقادیر ویژه ی ماتریس A می باشند [۵].

بـه ماتریس تبدیل T که ماتریس $A_{n\times n}$ را به فرم قطری بلوکی تبدیل می کند ماتریس مُدال[۱] نیز می گویند. در نرم افزار MATLAB از دســتور jordan(A) و [T,J]=jordan(A) می توان برای بدست آوردن فرم متعارفی جردن ماتریس A استفاده نمود. دستور jordan(A) فقط ماتریس متعارفی جردن حاصل را ارائـه می دهـد و در دســــتور [T,J]=jordan(A) مـاتریس T ماتریس تبدیل مربوطه و J ماتریس فرم متعارفی جردن ماتریس A است.

تعریف ۱-۲: ماتریس $A_{n\times n}$ را پوچتوان[۲] گویند هر گاه عدد طبیعی مانند m وجود داشــته باشــد که $A^m = 0$.

همچنین یادآوری می کنیم که برای محاسبه پوچی[۳] ماتریس A می توان رابطه زیر را به کار برد،

$$rank(A) + nullity(A) = n \quad (۵-۱)$$

که در آن $rank(A)$ رتبه ماتریس A را نشان می دهد.

---
[۱] Matrix Modal
[۲] Nilpotent
[۳] Nullity

۲-۱ تعاریف و پیش نیازهای کنترل

در روش های مبتنی بر کنترل کلاسـیک، مدلسازی و تحلیل سیستم ها براساس تابع تبدیل[۱] سیستم صـورت می گیرد که این تابع ارتباط بین ورودی و خروجی سیستم را بیان می کند. اما در روش های مبتنی بر کنترل مدرن، مدلســازی ســیســتم بر پایه فضــای حالت[۲] اســت. از جمله مزایای این روش مدلسـازی، قابلیت اسـتفاده از آن برای سـیستم های چند ورودی- چند خروجی (MIMO)[۳]، سیستم های خطی، غیر خطی و تغییر پذیر با زمان[۴] می باشد. صورت کلی معادلات فضای حالت به شکل زیر است،

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t] \\ y(t) &= g[x(t), u(t), t] \end{aligned} \qquad (۱-۶)$$

که در آن $x_{n\times1}(t)$ بردار حالت است و عناصر آن را متغیرهای حالت می نامند. $u_{m\times1}(t)$ بردار ورودی و $y_{k\times1}(t)$ بردار خروجی هسـتند. در حالت کلی، f و g نیز توابع غیر خطی متغیر با زمان هستند که نحوه ارتباط بردارهای حالت، ورودی و خروجی را نشـان می دهند. برای سـیسـتم های خطی و تغییر ناپذیر با زمان (ناوردای زمانی)[۵] معادلات به صورت زیر قابل ساده سازی هستند،

$$\begin{aligned} \dot{x}(\mathrm{t}) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad (۱-۷)$$

کـه در آن، $A_{n\times n}$ ماتریس حالت، $B_{n\times m}$ ماتریس ورودی، $C_{k\times n}$ ماتریس خروجی و $D_{k\times m}$ ماتریســـی است که ارتباط مستقیم بین ورودی و خروجی را نشان می دهد.

متغیرهای حالت در یک سـیسـتم می تواند تعبیر فیزیکی داشـته باشد و قابل اندازه گیری با حسگر[۶] باشـد مانند ولتاژ، جریان، دما، سـرعت، فشـار و جابجایی و نیز می تواند کاملاً ریاضـی باشـد و تعبیر

[۱] Transfer Function
[۲] State Space
[۳] Multi Input-Multi Output
[۴] Time Varying
[۵] Time Invariant
[۶] Sensor

فیزیکی نداشته باشد و علت استفاده از آن ها فقط برای ساده سازی محاسبات ریاضی است. از آنجایی که نمایش فضای حالت، بستگی به انتخاب متغیرهای حالت انتخاب شده دارد به همین دلیل، برخلاف تابع تبدیل که یک نمایش منحصر به فرد از یک سیستم است، نمایش های فضای حالت متعددی برای یک سیستم می توان بدست آورد.

۱-۲-۱ حل معادلات فضای حالت

صورت کلی معادلات فضای حالت را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

برای حل این معادلات لازم اســت تا بردار $x(t)$ را از معادله اول بدســت آورد و با جایگذاری آن ها در معادله دوم، خروجی سیستم را محاسبه نمود. معادله اول را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = Ax(t) + Bu(t)$$

پاسخ کلی چنین معادله ای به صورت زیر می باشد،

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \qquad (۸-۱)$$

e^{At} تابع نمایی ماتریســی اســت که به آن ماتریس انتقال حالت[۱] می گویند و با نماد $\varphi(t)$ نیز نمایش می دهند،

$$x(t) = \varphi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

در صورتی که معادلات را به صورت همگن در نظر بگیریم،

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

در این صورت، جواب معادله همگن به شکل زیر خواهد بود،

[۱] State Transition Matrix

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) = \varphi(t - t_0)x(t_0) \quad (۹-۱)$$

که در آن ماتریس انتقال حالت در واقع بیان کننده پاسخ طبیعی یا بدون ورودی سیستم می باشد.

۱-۲-۲ کنترل پذیری

تعریف ۱-۳ سیستم خطی ناوردای زمانی،

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = Ax(t) + Bu(t)$$

را به ازای $t \geq t_0$ و با حالت اولیه ی $x(t_0) = x_0$ در نظر می گیریم. هرگاه ورودی $u(t)$ که $t \in [t_0, t_1]$، حالت اولیه ی x_0 را در زمان t_1 به حالت صفر انتقال دهد، حالت x_0 را در زمان t_0 کنترل پذیر[1] گوییم. لازم به ذکر است حالت صفر در اینجا بیانگر حالت تعادل می باشد.

کنترل پذیری یک سیستم، اهمیتی اساسی دارد. زیرا باید مسائلی مورد مطالعه قرار گیرند که در آن ها هدف، انتقال سیستم از یک حالت اولیه ی دلخواه، به حالت تعادل می باشد. در نتیجه کنترل پذیری، شرط لازم برای وجود جواب است.

۱-۲-۳ پایداری سیستم های کنترل

در طراحی یک سیستم کنترل، شناخت اجزای سیستم برای پیش بینی رفتار دینامیکی سیستم لازم است. یک سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی، در صورتی پایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه جدید به آن، به حالت تعادل خود برگردد. حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی، حالتی است که در صورت نبود ورودی و اغتشاش، خروجی در آن حالت باقی بماند.

حال به بررسی مفهوم ریاضی پایداری در سیستم های کنترل می پردازیم. سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی،

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۱۰-۱)$$

[1]Controllable

با بردار ورودی،

$$u(t) = Kx(t) \tag{۱-۱۱}$$

موسوم به قانون کنترل، که در آن $u(t)$ ، متناسب با بردار حالت $x(t)$ انتخاب شده است را در نظر می گیریم. در این صورت، سیستم کنترل را یک سیستم کنترل با پس خورد حالت و $K \in \mathcal{R}^{m\times n}$ را ماتریس پسخورد حالت[۱] گوییم.

با ترکیب دو معادله (۱-۱۰) و (۱-۱۱) رابطه ی زیر بدست می آید،

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \tag{۱-۱۲}$$

در این رابطه ماتریس A را ماتریس حلقه باز و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه سیستم حلقه باز گوییم. همچنین ماتریس $A + BK$ را ماتریس سیستم حلقه بسته و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته می نامیم.

در ادامه، برخی از تعاریف و اصطلاحات را که در مطالعه سیستم های کنترل با آنها برخورد خواهیم داشت، ارائه می کنیم.

تعریف ۱-۴ سیستم هایی که در آن ها خروجی هیچ نقشی بروی عمل کنترل ندارد را سیستم های کنترل حلقه باز گویند [۳۴].

تعریف ۱-۵ سیستم های کنترل پس خوردی را عموماً سیستم های کنترل حلقه بسته می نامیم. منظور از کنترل حلقه بسته استفاده از پس خورد برای کاهش خطای سیستم و رسیدن به پایداری است.

قضیه ۱-۲ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. به ازای هر بردار حالت اولیه ی x_0 ، سیستم خطی

[۱] State Feedback Matrix

ناوردای زمانی،

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = Ax(t)\,, x(0) = x_0$$

دارای یک جواب منحصر به فرد به صورت زیر می باشد،

$$x(t) = e^{At}x_0$$

با اســتفاده از این قضیه و انتخاب بردار حالت اولیه ی x_0 ، جواب سیستم حلقه بسته (۱-۱۰) و (۱-۱۱) را به صورت زیر بدست می آوریم،

$$x(t) = e^{(A+BK)t}x_0$$

چنانچه تمام مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته، در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند آنگاه داریم،

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \lim_{t\to\infty} e^{(A+BK)t} = 0$$

این رابطه بیان می کند که با گذر زمان، هر حالت اولیه در صــورتی به حالت تعادل برده می شــود که قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته، منفی باشند.

تعریف ۱-۶ ســیستم کنترل خطی تعریف شده توسط معادلات (۱-۱۰) و (۱-۱۱) را یک سیستم پایدار مجانبی می نامیم هر گاه قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته منفی باشد. در صورتی که قســمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی یا صـفر باشـد سـیسـتم را پایدار و در غیر این دو صـورت سیستم را ناپایدار نامیم.

تعریف ۱-۷ مســأله یافتن ماتریس پســخورد K ، برای ســیســتم کنترل خطی تعریف شــده توســط معادلات (۱-۱۰) و (۱-۱۱) به گونه ای که ســیســتم پایدار مجانبی باشد را مسأله تخصیص مقادیر ویژه گوییم.

در تحلیل و طراحی های این پایان نامه تنها ســیستم های خطی و تغییر ناپذیر با زمان در نظر گرفته خواهند شد.

فصل دوم

مقدمه ای بر سیستم های تاخیری

سیستم های تاخیری در دنیا فراوان هستند. یک دلیل آن است که طبیعت پر از تاخیرهای آشکار است. دلیل دیگر آن است که سیستم های تاخیری غالباً به عنوان مدلی برای یک رده بزرگ از سیستم های مهندسی به کار برده می شوند که در آن انتشار و انتقال اطلاعات یا ماده مورد بحث است. وجود تاخیر مخصوصاً تاخیرهای طولانی باعث می شود آنالیز و کنترل این سیستم ها در مقایسه با سیستم های بدون تاخیر بسیار پیچیده تر شود. در این فصل، چند مثال از سیستم های تاخیری مطرح می کنیم و همچنین به معرفی تابع لامبرت می پردازیم و فرم فضای حالت این سیستم ها را نشان می دهیم.

۲-۱ تاخیر

تاخیر زمانی[۱] ویژگی یک سیستم فیزیکی است که در نتیجه آن، واکنش یا پاسخ سیستم به یک نیروی وارد شده، به تاخیر می افتد. هر زمان که اطلاعات یا انرژی به لحاظ فیزیکی از یک مکان به مکان دیگر انتقال داده می شود به همراه انتقال، تاخیر به وجود می آید که مقدار آن به فاصله و سرعت انتقال بستگی دارد به این ترتیب بعضی تاخیرها کوتاه و برخی دیگر خیلی طولانی هستند.

تاخیر زمانی در هر یک از اجزای تشکیل دهنده ساختار یک سیستم می تواند به وجود آید و در سیستم های متنوعی مانند سیستم های بیولوژیکی، زیستی، صنعتی، الکتریکی، هوایی، اقتصادی، اجتماعی، فرایندهای شیمیایی، شبکه های هیدرولیکی و شبکه های ارتباطی و ... اتفاق می افتد. وجود تاخیر مخصوصاً تاخیرهای طولانی در این سیستم ها گاهی باعث ناپایداری می شود به همین خاطر در طی سه دهه اخیر، تحلیل این سیستم ها و مسأله پایداری آن ها موضوعاتی هستند که مورد توجه

[۱] Time Delay

محققان قرار گرفته اند.

۲-۲ معادلات دیفرانسیل تاخیری

معادلات دیفرانسـیل تاخیری (DDEs)[1] یک رده مهم و بزرگ از سیستم های دینامیکی هستند که در قرن هجدهم توسط کاندورست[2] و لاپلاس[3] معرفی شده اند [۹].

از آنجایی که معادلات دیفرانسیل معمولی (ODEs)[4] به صورت،

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = f(t, x(t)) \tag{۱-۲}$$

یک مدل رایج برای نمایش سـیسـتم های دینامیکی هسـتند که در این مدل، متغیرهای $x(t) \in \mathcal{R}^n$ متغیرهای حالت می باشند و معادله دیفرانسیل، تغییر متغیر های حالت را نسبت به زمان مشخص می کند، اما برای نمایش برخی از سـیسـتم های دینامیکی مانند سـیسـتم های تاخیری نمی توان از این معادلات اسـتفاده کرد زیرا در این سیستم ها برخلاف سیستم های بدون تاخیر، رفتار سیستم نه تنها به حالت های فعلی بلکه همچنین به حالت های قبل نیز وابسته است.

برای نمایش این سـیستم ها همانطور که اشاره کردیم از معادلات دیفرانسیلی استفاده می شود که در آنها فاکتورهای تاخیر زمانی وجود دارد که به آنها معادلات دیفرانسیل تاخیری می گویند.

صورت کلی معادله دیفرانسیل تاخیری برای $x(t) \in \mathcal{R}^n$ به صورت،

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t) \tag{۲-۲}$$

می باشد که در آن $x_t = \{x(h): h \leq t\}$ و f یک تابع از $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^n \times ₵$ به $\mathcal{R}^n$ است. نمایشی که در این پایان نامه برای نشان دادن یک سیستم با تاخیر منحصر به فرد استفاده می شود به صورت،

[1] Delay Differential Equations

[2] Condorcet

[3] Laplace

[4] Ordinary Differential Equations

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x(t-h)\big) \qquad (۳-۲)$$

اســت که در آن f یک تابع خطی است و h تاخیر زمانی را نشان می دهد. وجود تاخیر در این معادله باعث ایجاد عبارت نمایی در معادله مشــخصــه ســیســتم های تاخیری می شــود [۳۲] به همین دلیل، معادله مشــخصــه این ســیســتم ها دارای تعداد نامتناهی ریشــه می باشــد. در واقع، مشکل اصلی این معادلات آن اســت که باعث ایجاد یک طیف نامتناهی از مقدارهای ویژه می شوند. بنابراین تحلیل این ســیســتم ها با روش های کلاســیک به خصــوص در بررســی پایداری در مقایسه با سیستم های بدون تاخیر، پیچیده تر خواهد بود.

چنین مسائلی اغلب به طور غیر مستقیم و با استفاده از روش های ترسیمی، عددی و تقریبی حل می شوند. در بسیاری موارد از روش تقریب پاده[۱] استفاده می شود که یک تقریب گویا است و در این روش به جای عبارت نمایی در معادله مشــخصــه، یک عبارت کسری جایگزین می شود. اما این روش شامل محدودیت هایی اســت و می تواند منجر به ناپایداری در سیستم اصلی شود [۹]. روش های دیگری نیز وجود دارد که از آن ها برای تبدیل ســیستم تاخیری به یک سیستم بدون تاخیر و سپس پایدار کردن آن استفاده می شود. چنین روش هایی ممکن است زمانی که برای یک سیستم واقعی به کار برده می شوند، باعث خطاهای غیر منتظره شوند. علاوه بر این اجرای مطمئن آنها هنوز یک مسأله باز است.

در سال های اخیر، استفاده از روش تابع لامبرت[۲] در زمینه های علمی متنوع و مهندسی شامل تحلیل ســیســتم های تاخیری رواج پیدا کرده اســت. ایده به کار بردن تابع لامبرت برای بررسی سیستم های تاخیری متعلق به رایت[۳] می باشد [۲۵]. همچنین این مسأله توسط محققان دیگر نیز مورد بررسی قرار گرفته و بهبود داده شــده اســت [۱، ۲]. روشــی که در این پایان نامه برای پایدارســازی ســیستم های تاخیری و کنترل آن ها به کار برده می شــود، اســتفاده از تابع لامبرت می باشد که روشی جدید برای

[۱] Pade Approximation
[۲] Lambert W Function
[۳] Wright