دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

رساله

دکتری رشته ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های مبتنی بر فضای هیلبرت هسته بازتولید در حل معادلات با مشتقات جزیی

استاد راهنما

دکتر رضا مختاری

استاد مشاور

دکتر فرید بهرامی

پژوهشگر

مریم محمدی

۱۳۹۲

براستی، آفریننده ی باشکوه ترین لذت، نه دانش، بلکه آموختن است، نه داشتن، بلکه آفرینش است، نه در جایی بودن، بلکه بدانجا سفر کردن است. آن هنگام که من تمام نوری را دریافتم، به تاریکی دیگری برخواهم گشت. همانا انسان کنجکاو سیراب ناشدنی است، و آن هنگام که خانه ای بنا نهاد، به جای در آن آسودن، همت به خانه ای دیگر می گمارد.

"نامه گاوس به بولیای در دوم سپتامبر ۱۸۰۸"

به نام پروردگار یکتا

که آرامش و ستیز را در گذر لحظات سخت، سربلندی را در دورنمایی مبهم و آسمان رقابت و شکست را در میدان رویارویی جلوه‌های حیات قرار داده است. محبوبی که رأیت فتح در پهنهٔ بیکران کیهان، جز به فرمانش برافراشته نگردد و جبروت و شکوه بی انتها، جز او را نشاید.

نگارنده بر خود می‌داند که از راهنمایی‌های ارزشمند استاد گرامی جناب آقای دکتر مختاری که در کمال سعه صدر و حسن خلق از هیچ کمکی در راستای انجام این رساله دریغ ننمودند، تشکر و قدردانی نماید. بی‌شک همراهی پدرانه ایشان نه تنها در دوره دکتری که در دوره کارشناسی ارشد، سزاوار سپاسی بیش از این است.

همچنین از پروفسور روبرت شاباک به خاطر میزبانی گرم و حمایت‌های مثال زدنی‌شان در دوره فرصت مطالعاتی اینجانب در دانشگاه جورج-آگوست گوتینگن آلمان، کمال تشکر و قدردانی را دارم. دستیابی به بسیاری از نتایج این رساله بدون نقدها و راهنمایی‌های روشنگرانه ایشان، امکان‌پذیر نبود.

از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر بهرامی که در انجام مراحل تحقیق مساعدت فراوان مبذول فرمودند، سپاسگزارم.

مراتب امتنان خویش را تقدیم استاد گرانقدر جناب آقای دکتر بابلیان می‌دارم که حضورشان برایم افتخاری بس بزرگ بود و رهنمودهایشان فرصتی ارزشمند.

از مساعدت‌های ارزنده استاد بزرگوار جناب آقای دکتر چگینی که همواره مرا قرین لطف خویش فرمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر تاتاری که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند، بی‌نهایت سپاسگزارم.

همچنین از خانواده عزیزم که در تمام لحظات زندگی، عشق و محبت بی‌پایانشان راهگشای من بود، متشکرم.

در پایان از دوستان عزیزم که در این سال‌ها مرا همراهی نمودند، صمیمانه قدردانی می‌نمایم.

مریم محمدی

۱۳۹۲

کلیه حقوق مادی مترتّب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلّق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به

پدرم

که ناتوان شد تا من به توانایی برسم،

مادرم

که تار مویی از او به پای من سیاه نماند،

به پاس محبت های بی دریغ و گرمای امید بخش وجودشان.

و

عزیزتر از هرچه هست، آنکه دوستترش می دارم،

همسرم، حمید

فهرست مطالب

چکیده

در این رساله به بررسی روش‌های مبتنی بر فضای هیلبرت هسته بازتولید در حل معادلات با مشتقات جزیی می‌پردازیم. این روش‌ها به دو دسته نمادین و عددی تقسیم می‌شوند.

در روش‌های نمادین، تابع جواب به شکل یک سری در فضای هیلبرت هسته بازتولید نمایش داده می‌شود. در این روش‌ها، یا توابع پایه متعامد یکه را توسط فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت تولید کرده و به عنوان توابع پایه در تقریب تابع جواب مورد استفاده قرار می‌دهیم و یا فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت را حذف کرده و به جای آن حل دستگاه معادلات نرمال بر مبنای نظریه بهترین تقریب در فضاهای هیلبرت را جایگزین می‌کنیم. چگونگی پیاده‌سازی هر دو ایده را با استفاده از حل معادله موج بلند منظم تعمیم‌یافته، معادلات مشتقاتی-تفاضلی غیرخطی، مسائل وارون سهموی با شرایط مرزی غیرموضعی، رده‌ای از دستگاه معادلات با مشتقات جزیی غیرخطی و معادله شرودینگر یک بعدی به تفصیل بررسی خواهیم کرد.

در روش‌های عددی، توابع پایه نیوتن در فضای هیلبرت هسته بازتولید را به عنوان توابع پایه در نظر گرفته و تابع جواب را در راستای متغیر مکان با استفاده از توابع پایه به دو روش هم‌مکانی و گالرکین تقریب می‌زنیم. سپس با استفاده از روش خطوط، به دستگاهی از معادلات با مشتقات معمولی بر حسب تابع جواب در راستای متغیر زمان دست می‌یابیم. هر دو روش هم‌مکانی و گالرکین توام با روش خطوط را با استفاده از حل دستگاه دوبعدی واکنش-انتشار براسلیتور و زوج معادلات دوبعدی غیرخطی برگرز به تفصیل بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: *معادلات با مشتقات جزیی، فضای هیلبرت هسته بازتولید*

پیش‌گفتار

مدل ریاضی بسیاری از پدیده‌های طبیعی یک معادله با مشتقات جزیی (PDE) یا دستگاهی از معادلات با مشتقات جزیی، اعم از خطی و غیرخطی به همراه شرایط اولیه و مرزی است. در میان شرایط مرزی حاکم بر PDE می‌توان به شرایط مرزی غیرموضعی اشاره کرد، که در آن مقدار تابع بر روی مرز یا قسمتی از مرز به مقادیر درون دامنه یا سایر قسمت‌های مرز مربوط می‌شود. پارامترهای معلوم یک PDE با شرایط اولیه و مرزی، در حالت کلی عبارتند از: مرتبه، ضرایب معادله، ناحیه هندسی، تابع سمت راست معادله، شرایط اولیه و شرایط مرزی. چنانچه در یک PDE با شرایط اولیه و مرزی، یک یا چند پارامتر اشاره شده، جزء مجهولات مسأله به حساب آیند، آن را مسأله وارون معادله با مشتقات جزیی یا به اختصار، مسأله وارون می‌نامند. با توجه به افزایش تعداد مجهولات، جواب مسائل وارون در صورت عدم وجود شرط اضافی دیگری به جز شرایط اولیه و مرزی، یکتا نیست. بنابراین در حالت معمول، این دسته از مسائل جزء مسائل بدوضع به حساب می‌آیند. از طرفی اعمال شرایط بیش تعیین‌شده‌ای چون شرایط انتگرالی یا نقطه‌ای نیز در بسیاری از روش‌های متداول به سادگی امکان‌پذیر نیست. دسته‌ی دیگری از معادلات پرکاربرد در طبیعت، معادلات مشتقاتی-تفاضلی هستند که ترکیبی از یک معادله با مشتقات معمولی و رابطه‌ای بازگشتی هستند. این معادلات نقش مهمی را در مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی همچون ارتعاشات ذره در شبکه، جریانات در شبکه‌های الکتریکی، فیزیک کوانتوم، مهندسی نساجی و غیره دارند.

پیچیدگی حل بسیاری از مسائل وارون، معادلات مشتقاتی-تفاضلی غیرخطی و معادلات و دستگاه معادلات با مشتقات جزیی غیرخطی در ابعاد مختلف با شرایط مرزی متنوع از جمله شرایط مرزی غیرخطی و غیرموضعی محققان را به یافتن روش‌های ساده‌تر و در عین حال متکی بر اصول قوی نظری در آنالیز تابعی سوق داده است. در میان این روش‌ها می‌توان به روش‌های مبتنی بر فضای هیلبرت هسته بازتولید (RKHS) اشاره کرد.

هسته بازتولید برای اولین بار در اوایل قرن ۲۰ در تحقیقات زارمبا روی مسائل مقدار مرزی برای توابع همساز و دوهمساز مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۰۷ او اولین کسی بود که در حالتی خاص هسته متناظر با رده‌ای از توابع را معرفی و خاصیت بازتولید را بیان کرد. در سال ۱۹۰۹ مِرکِر، در نظریه معادلات انتگرال، هسته‌های معین مثبتی را ارائه کرد که در خصوصیت هسته بازتولید صدق می‌کردند. پس از وقفه‌ای طولانی، ایده هسته بازتولید در رساله‌های سه ریاضیدان آلمانی به نامهای زیگو (۱۹۲۱)، بِرگمَن (۱۹۲۲) و باخنِر (۱۹۲۲) احیا شد. برگمن هسته‌های بازتولید در یک یا چند متغیر را برای رده‌ای از توابع همساز و تحلیلی معرفی و توابع هسته نام‌گذاری کرد که بعد از ۳۰ الی ۴۰ سال کار بر روی آن‌ها، به هسته‌های برگمن معروف شدند. به دنبال آن نتایج ارزشمندی در استفاده از این هسته‌ها در توابع یک و چند متغیره (برگمن و باخنر)، نگاشت‌های همدیس (برگمن و زارانکویچ) و نگاشت‌های شبه-همدیس (برگمن، وِلک و

آرونزان) به دست آمد. در نتیجه تحقیقات مور در سال ۱۹۳۵، هسته‌هایی تحت عنوان ماتریس‌های هرمیتی معین مثبت، معرفی و دیدگاهی از کاربرد آن‌ها در تعمیم معادلات انتگرالی بیان شد. مور همچنین ثابت کرد متناظر با ماتریس هرمیتی معین مثبت K، فضای هیلبرت منحصر به فردی از توابع با هسته بازتولید K وجود دارد. نظریه هسته‌های بازتولید توسط آرونزان در سال ۱۹۴۸ نظم گرفت [۳]. برگمن و شیفر با توسعه ایده اولیه زارمبا در حل مسائل مقدار مرزی با استفاده از هسته‌های بازتولید، آن‌ها را به عنوان ابزاری قدرتمند در حل مسائل مقدار مرزی بیضوی معرفی کردند.

روش‌های مبتنی بر RKHS به دو دسته نمادین و عددی تقسیم می‌شوند. در روش‌های نمادین، ابتدا RKHS با توجه به مراتب مشتقات ظاهر شده و شرایط مرزی حاکم بر مسأله ساخته می‌شود. سپس تابع بازتولید فضا به صورت تابعی چند ضابطه‌ای با عملیاتی نمادین به دست می‌آید. اساس این روش‌ها، نظریه بهترین تقریب در فضاهای هیلبرت و استفاده از بسط فوریه در تقریب جواب است. بنابراین یا توابع پایه متعامد یکه را توسط فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت تولید کرده و به عنوان توابع پایه در تقریب تابع جواب مورد استفاده قرار می‌دهیم و یا فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت را حذف کرده و به جای آن حل دستگاه معادلات نرمال بر مبنای نظریه بهترین تقریب را جایگزین می‌کنیم. در این روش‌ها پس از ساخت توابع پایه، جواب دقیق مسأله به شکل سری نمادین در RKHS مربوطه، نمایش داده می‌شود و سپس جواب تقریبی با محاسبه n جمله از جواب دقیق به دست می‌آید. جملات سری متناظر با جواب دقیق در معادلات خطی به طور صریح و در معادلات غیرخطی با استفاده از فرایندی بازگشتی محاسبه می‌شوند. در هر دو حالت تحت شرایطی با افزایش n، جواب تقریبی به جواب دقیق به طور یکنواخت همگرا است. این دسته از روش‌ها، بی‌نیاز از شبکه، بسیار توانا در ارضای انواع شرایط مرزی، بی‌نیاز از گسسته‌سازی زمانی و در نتیجه فارغ از مشکلات پایداری جواب در طول زمان بوده و به کمك آن‌ها می‌توان دسته وسیعی از مسائل خطی و غیرخطی را حل کرد. روش‌های نمادین مبتنی بر RKHS که از فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت در ساخت توابع پایه استفاده می‌کنند، تاکنون در حل دسته‌ای از معادلات با مشتقات معمولی [۷۰، ۱۰، ۹]، معادلات انتگرال [۲۲، ۲۱، ۸]، معادلات مشتقاتی-انتگرالی [۷۷، ۷۲، ۶۹]، معادلات عملگری غیرخطی [۳۹]، مسائل وارون سهموی [۸۰، ۶۶، ۵۱]، معادله برگرز با ضرایب متغیر [۱۱]، معادله موج بلند منظم تعمیم‌یافته [۴۵]، معادله تلگراف هذلولوی غیرخطی [۷۳]، معادلات سهموی با شرایط مرزی غیرموضعی [۸۲، ۸۱]، معادلات شبه سهموی غیرخطی با شرایط مرزی غیرموضعی [۷۵]، معادلات شبه سهموی منفرد غیرخطی با شرایط مرزی ترکیبی غیرموضعی [۱۲]، رده‌ای از معادلات مشتقاتی-تفاضلی غیرخطی [۵۲]، معادله کلین‌گُردن غیرخطی [۷۴] و غیره موفق عمل کرده‌اند [۱۳]. وجود فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت در این دسته از روش‌ها منجر به افزایش زمان اجرای برنامه و ایجاد ناپایداری عددی در حل برخی از معادلات می‌شود. تکنیک پیاده‌سازی روش‌های نمادین مبتنی بر RKHS بدون استفاده از فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت به عنوان یکی از فعالیت‌های پژوهشی این رساله، معرفی و در حل رده‌ای از دستگاه معادلات با مشتقات جزیی غیرخطی، معادله شرودینگر یک بعدی و دو مسأله وارون سهموی با شرط مرزی غیرموضعی

مورد استفاده قرار گرفت [۴۹، ۴۷، ۴۶]. در حالت کلی، انجام محاسبات نمادین و به دنبال آن افزایش نسبی زمان اجرای برنامه‌ها از جمله معایب روش‌های نمادین محسوب می‌شود. همچنین به دلیل عدم امکان همگن‌سازی شرایط مرزی، تعمیم این روش‌ها در ابعاد بالا به سادگی امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل به استفاده از روش‌های عددی در RKHS ناگزیر هستیم.

در روش‌های عددی، هسته متقارن و معین مثبت K که معمولاً از توابع پایه شعاعی انتخاب می‌شود را در نظر گرفته و به یافتن جواب مسأله در فضای بومی متناظر با آن می‌پردازیم. در واقع فضای بومی ایجاد شده، یک RKHS با هسته بازتولید K است. در این روش‌ها، توابع پایه نیوتن در RKHS را به عنوان توابع پایه در نظر گرفته و تابع جواب را در راستای متغیر مکان به دو روش هم‌مکانی و گالرکین تقریب می‌زنیم. سپس با استفاده از روش خطوط، به دستگاهی از معادلات با مشتقات معمولی بر حسب تابع جواب در راستای متغیر زمان می‌رسیم. توسیع مباحث نظری و کاربردی هسته‌های معین مثبت از جمله ساخت پایه‌های لاگرانژ و نیوتن در RKHS [۵۴، ۵۳]، انتخاب بهینه نقاط هم‌مکانی [۲۹]، تخمین مرتبه خطا و همگرایی در روشهای مبتنی بر توابع پایه شعاعی [۷۱، ۶۱]، استفاده از هسته‌های معین مثبت در نظریه تقریب و درون‌یابی [۴۳]، حل معادلات با مشتقات جزیی [۲۸]، علوم کامپیوتر [۶۲] و آموزش ماشین [۶۴] حاصل فعالیت‌های ریاضیدان برجسته آلمانی روبرت شاباک در طی سال‌های ۱۹۹۰ تاکنون است. استفاده از توابع پایه نیوتن در حل مسائل کاربردی و معرفی روش‌های هم‌مکانی و گالرکین در RKHS از جمله نتایج مستخرج از این رساله در مقاله‌های [۵۰، ۴۸] است.

در این رساله، ابتدا به تعریف فضای هیلبرت هسته بازتولید و بیان مفاهیم پایه، تعاریف و قضایای مورد استفاده در فصل‌های بعد می‌پردازیم. در فصل دوم، روشهای نمادین مبتنی بر RKHS را مورد بررسی قرار می‌دهیم. از روش نمادین توام با فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت در حل معادله موج بلند منظم تعمیم‌یافته، معادلات مشتقاتی-تفاضلی غیرخطی و یک مسأله وارون سهموی با شرط مرزی غیرموضعی و از روش نمادین بی‌نیاز از فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت در حل رده‌ای از دستگاه معادلات با مشتقات جزیی غیرخطی، دو مسأله وارون سهموی با شرط مرزی غیرموضعی و معادله شرودینگر یک بعدی استفاده می‌کنیم. در فصل سوم روش‌های عددی مبتنی بر RKHS را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به همین منظور، ابتدا پایه‌های فضاهای مبتنی بر هسته را مرور می‌کنیم. سپس از روش هم‌مکانی توام با روش خطوط در شبیه‌سازی دستگاه دوبعدی واکنش-انتشار براسلیتور و از روش گالرکین توام با روش خطوط در حل زوج معادلات دوبعدی غیرخطی برگرز استفاده می‌کنیم. در نهایت نیز به جمع‌بندی مطالب موجود در رساله و ارائه پیشنهادات و راهکارهایی در جهت بهبود روش‌های مطرح‌شده می‌پردازیم.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل ابتدا به بیان تعاریف و مفاهیم مورد استفاده در این رساله می‌پردازیم. سپس فضای هیلبرت هسته بازتولید را معرفی کرده و دو فضای هیلبرت هسته بازتولید که در فصل بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را تعریف می‌کنیم. در سراسر این رساله تنها با میدان اعداد حقیقی کار می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم پایه

مطالب این بخش بر گرفته از مراجع [۴۱، ۱۶] است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای غیرتهی باشد. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متر می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

۱) $d(x,y) \geq 0$ و $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$،

۲) $d(x,y) = d(y,x)$،

۳) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. (نامساوی مثلثی)

مجموعه X به همراه متر d را یک فضای متریک نامیده و با نماد (X,d) نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۱. مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با متر

$$d(x,y) = |x-y|, \quad \forall x,y \in \mathbb{R},$$

و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ تعریف‌شده به صورت $\mathbb{R}^n = \{x | x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$، با متر

$$d(x,y) = [(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n,$$

نمونه‌های بدیهی از فضاهای متریک هستند.

تعریف ۳.۱.۱. (همگرایی در فضای متریک) فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. دنباله $\{x_n\}$ از اعضای X را همگرا به $x \in X$ گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$، عدد طبیعی M موجود باشد به طوری که

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad \forall n \geq M.$$

در این حالت می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ یا } x_n \to x.$$

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. خانواده $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از زیرمجموعه‌های باز X را یک پوشش باز E گوییم هرگاه $E \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. $K \subseteq X$ را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز K حاوی زیرپوششی متناهی باشد.

قضیه ۶.۱.۱. *فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. اگر $K \subseteq X$ فشرده باشد، آن‌گاه به ازای هر دنباله $\{x_n\} \subseteq K$ زیردنباله همگرای $\{x_{k_n}\}$ از آن وجود دارد به طوری که $x_{k_n} \to x \in K$.*

قضیه ۷.۱.۱. *فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. اگر $K \subseteq X$ به گونه‌ای باشد که به ازای هر دنباله $\{x_n\} \subseteq K$ زیردنباله همگرای $\{x_{k_n}\}$ از آن موجود باشد به طوری که $x_{k_n} \to x \in K$، آن‌گاه K فشرده است.*

تعریف ۸.۱.۱. (همگرایی نقطه‌ای) دنباله توابع حقیقی مقدار $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$، تعریف‌شده بر مجموعه X را به طور نقطه‌ای به f همگرا گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$ و هر $x \in X$، عدد طبیعی M موجود باشد به طوری که

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall n \geq M.$$

در این صورت می‌نویسیم

$$f_n \longrightarrow f.$$

تعریف ۹.۱.۱. (همگرایی یکنواخت) دنباله توابع حقیقی مقدار $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$، تعریف‌شده بر مجموعه X را به طور یکنواخت به f همگرا گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$، عدد طبیعی M موجود باشد به طوری که

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall n \geq M, \quad \forall x \in X.$$

در این صورت می‌نویسیم

$$f_n \rightrightarrows f.$$

تبصره ۱۰.۱.۱. *دنباله توابع $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به طور یکنواخت به f همگرا است اگر و تنها اگر وقتی $n \to \infty$ داشته باشیم*

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow ۰.$$

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. اگر تابع $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ چنان موجود باشد که

۱) $\|x\| \geq 0$ برای هر $x \in X$،

۲) $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$،

۳) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ برای هر $\alpha \in \mathbb{R},\ x \in X$،

۴) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$، برای هر $x, y \in X$ (نامساوی مثلثی)،

آن‌گاه X را یک فضای برداری نرم‌دار با نرم $\|\cdot\|$ می‌نامیم.

تبصره ۱.۱.۱۲. *هر فضای برداری نرم‌دار یک فضای متریک با متر $d(x, y) = \|x - y\|$ است.*

تعریف ۱.۱.۱۳. فضای $C(X)$ را فضای متشکل از تمام توابع پیوسته بر مجموعه فشرده $X \subset \mathbb{R}^n$ با نرم

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad \forall f \in C(X),$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری، $E \subseteq X$ و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع حقیقی تعریف‌شده بر E باشد. گوییم $\mathcal{F}$ بر E هم‌پیوسته است هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall x, y \in E \quad : \quad d(x, y) < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

قضیه ۱.۱.۱۵. *(قضیه آرزلا-آسکولی) دنباله توابع کران‌دار و هم‌پیوسته $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in C(X)$، دارای زیردنباله‌ای است که بر X همگرای یکنواخت است.*

نتیجه ۱.۱.۱۶. *$K \subset C(X)$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته، کران‌دار و هم‌پیوسته باشد.*

تعریف ۱.۱.۱۷. دنباله $\{x_n\}$ در یک فضای برداری نرم‌دار را کوشی نامیم هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، عدد طبیعی M موجود باشد به طوری که

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq M.$$

تعریف ۱.۱.۱۸. (همگرایی در فضای نرم‌دار) فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای برداری نرم‌دار باشد. دنباله $\{x_n\}$ از اعضای X را همگرا به $x \in X$ گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، عدد طبیعی M موجود باشد به طوری که

$$\|x_n - x\| < \epsilon, \quad \forall n \geq M.$$

در این صورت می‌نویسیم

$$x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x.$$

تعریف ۱.۱.۱۹. فضای نرم‌دار X را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در X به عضوی از X همگرا باشد. فضای برداری نرم‌داری که کامل باشد را فضای باناخ می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم $p \geq 1$ یک عدد حقیقی باشد و $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. فضای متشکل از تمام توابع اندازه‌پذیر $f : \Omega \to \mathbb{R}$ که انتگرال به مفهوم لبگ

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx,$$

موجود باشد را فضای $L^p(\Omega)$ می‌نامیم. فضای $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری نرم‌دار با نرم

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

است.

قضیه ۱.۱.۲۱. (*نامساوی هولدر*) *فرض کنیم* $1 < p < \infty$، $1 < q < \infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *اگر* $f \in L^p(\Omega)$ و $g \in L^q(\Omega)$، *آن‌گاه* $fg \in L^1(\Omega)$ *و*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

تعریف ۱.۱.۲۲. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. اگر تابع $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

۱) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$،

۲) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$،

۳) $\langle x, x \rangle \geq 0$،

۴) $\langle x, x \rangle = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$،

آن‌گاه X را یک فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ می‌نامیم.

مثال ۱.۱.۲۳. فضای l^2 متشکل از تمام دنباله‌های حقیقی $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ با شرط $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$ به همراه ضرب داخلی

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, \ldots), y = (y_1, y_2, y_3, \ldots),$$

یک فضای ضرب داخلی با بعد نامتناهی است.

مثال ۱.۱.۲۴. فضای $L^2(\Omega)$ یک فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) g(x) dx, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega),$$

است.

مثال ۲۵.۱.۱. فرض کنیم فضای X، ضرب دکارتی فضاهای ضرب داخلی X_1 و X_2 باشد، یعنی
$$X = X_1 \times X_2 = \{(x, y) : x \in X_1, y \in X_2\}.$$
آن‌گاه X یک فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی
$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle,$$
است.

تبصره ۲۶.۱.۱. *متناظر با هر فضای ضرب داخلی، نرم القایی حاصل از ضرب داخلی به صورت*
$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}},$$
تعریف می‌شود. بنابراین هر فضای ضرب داخلی یک فضای نرم‌دار است. ولی عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست. شرط لازم و کافی برای اینکه یک فضای برداری نرم‌دار یک فضای ضرب داخلی باشد آن است که قانون متوازی‌الاضلاع
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$
برای هر دو عضو x ، y در فضای ضرب داخلی برقرار باشد.

قضیه ۲۷.۱.۱. *(نامساوی کوشی-شوارتز) برای هر دو عضو x و y در یک فضای ضرب داخلی داریم*
$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|.$$
تساوی
$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|,$$
برقرار است اگر و فقط اگر x و y وابسته خطی باشند.

تعریف ۲۸.۱.۱. فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت می‌نامیم.

مثال ۲۹.۱.۱. فضاهای l^2 و $L^2(\Omega)$ فضاهای هیلبرت هستند.

تعریف ۳۰.۱.۱. (بهترین تقریب) فرض کنیم x عضوی از فضای برداری نرم‌دار X و Φ مجموعه‌ای از تقریب‌ها در X باشد. آن‌گاه $\phi \in \Phi$ را بهترین تقریب x گوییم هرگاه
$$\|x - \phi\| \le \|x - \nu\|, \quad \forall \nu \in \Phi.$$

در ادامه، منظور از Φ مجموعه‌ای از تقریب‌ها در X است.

تعریف ۳۱.۱.۱. چنانچه Φ زیرفضایی از X تولیدشده توسط $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ باشد، آن‌گاه مسأله بهترین تقریب معادل است با یافتن ضرایب $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ به طوری که عبارت
$$\|x - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)\|,$$
کمینه شود.

همانطور که در ادامه خواهیم دید، یافتن این ضرایب در فضاهای ضرب داخلی به سادگی امکان‌پذیر است.

قضیه ۳۲.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی و $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in X$ مجموعه‌ای مستقل خطی باشد. آن‌گاه برای هر $x \in X$ بهترین تقریب به مفهوم تعریف ۳۱.۱.۱ وجود دارد.*

قضیه ۳۳.۱.۱. *(نظریه بهترین تقریب) فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی و Φ زیرفضایی از X تولیدشده توسط $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ باشد. آن‌گاه برای هر $x \in X$ بهترین تقریب $\phi \in \Phi$ عبارت است از*

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

که در آن ضرایب α_i از حل معادلات زیر که به معادلات نرمال معروف است به دست می‌آیند،

$$\begin{aligned} &\langle x_1, x_1\rangle\alpha_1 + \langle x_2, x_1\rangle\alpha_2 + \cdots + \langle x_n, x_1\rangle\alpha_n = \langle x, x_1\rangle, \\ &\vdots \\ &\langle x_1, x_n\rangle\alpha_1 + \langle x_2, x_n\rangle\alpha_2 + \cdots + \langle x_n, x_n\rangle\alpha_n = \langle x, x_n\rangle. \end{aligned}$$

تعریف ۳۴.۱.۱. مجموعه $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ از بردارهای غیرصفر در فضای ضرب داخلی X را متعامد یکه گوییم هرگاه برای هر $i, j = 1, \ldots, n$ داشته باشیم

$$\langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

مثال ۳۵.۱.۱. مجموعه $\{e_1, e_2, \ldots\}$ که در آن

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{درایه i-اُم}}}{1}, 0, \ldots, 0),$$

مجموعه‌ای متعامد یکه در فضای l^2 است.

مثال ۳۶.۱.۱. مجموعه $\{\phi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ که در آن

$$\phi_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}},$$

مجموعه‌ای متعامد یکه در فضای $L^2([-\pi, \pi])$ است.

مثال ۳۷.۱.۱. چندجمله‌ای‌های لژاندر تعریف‌شده به صورت

$$\begin{aligned} &p_0(x) = 1, \\ &p_n(x) = \tfrac{1}{2^n n!} \tfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

مجموعه‌ای متعامد یکه در فضای $L^2([-1, 1])$ است.

تبصره ۳۸.۱.۱. *مجموعه‌های متعامد یکه، مستقل خطی هستند.*

قضیه ۳۹.۱.۱. (*فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت*) *فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی وبردارهای $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر از X باشد. آن‌گاه بردارهای $\{u_۱, u_۲, \ldots, u_n, \ldots\}$ که به صورت زیر ساخته می‌شوند، متعامد یکه هستند*

$$\begin{aligned} y_۱ &= x_۱, & u_۱ &= \tfrac{y_۱}{\|y_۱\|}, \\ y_۲ &= x_۲ - \langle x_۲, u_۱\rangle u_۱, & u_۲ &= \tfrac{y_۲}{\|y_۲\|}, \\ &\vdots \\ y_n &= x_n - \sum_{j=۱}^{n-۱}\langle x_n, u_j\rangle u_j, & u_n &= \tfrac{y_n}{\|y_n\|}. \end{aligned}$$

قضیه ۴۰.۱.۱. (*نامساوی بسل*) *فرض کنیم $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ مجموعه‌ای متعامد یکه در فضای ضرب داخلی X باشد. آن‌گاه برای هر $x \in X$ داریم*

$$\sum_{k=۱}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^۲ \leq \|x\|^۲. \tag{۱.۱}$$

تبصره ۴۱.۱.۱. چنانچه $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ *مجموعه‌ای متعامد یکه در فضای ضرب داخلی X باشد، بنا بر نظریه بهترین تقریب، بهترین تقریب x توسط ترکیب خطی بردارهای $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ عبارت است از*

$$\phi = \sum_{i=۱}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i.$$

از این ویژگی مجموعه‌های متعامد یکه در بسیاری از روش‌های کاربردی استفاده می‌شود.

اگر $\{x_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای متعامد یکه در فضای ضرب داخلی X باشد، آن‌گاه با فرض $n \to \infty$ در (۱.۱) داریم

$$\sum_{k=۱}^{\infty} |\langle x, x_k\rangle|^۲ \leq \|x\|^۲. \tag{۲.۱}$$

بنابراین سری $\sum_{k=۱}^{\infty}|\langle x, x_k\rangle|^۲$ به ازای هر $x \in X$ همگرا است. در واقع دنباله $\{\langle x, x_k\rangle\}_{k=۱}^{\infty}$ متعلق به $l^۲$ است. از طرفی بنا بر آن‌چه در تبصره ۴۱.۱.۱ بیان شد، سری $\sum_{k=۱}^{n}\langle x, x_k\rangle x_k$ بهترین تقریب x را برای تعداد متناهی از x_k می‌دهد. اما در حالت کلی تضمینی برای همگرایی سری $\sum_{k=۱}^{\infty}\langle x, x_k\rangle x_k$ در فضاهای ضرب داخلی نیست. قضیه زیر نشان می‌دهد، کامل بودن فضا، همگرایی این سری را تضمین می‌کند.

قضیه ۴۲.۱.۱. *فرض کنیم $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای متعامد یکه در فضای هیلبرت H و $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد باشند. آن‌گاه سری $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k$ همگرا است اگر و فقط اگر $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2<\infty$. همچنین داریم*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2.$$

قضیه ۴۲.۱.۱ و رابطه (۲.۱) بیانگر همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,x_k\rangle x_k$ برای هر $x\in H$ در فضای هیلبرت H است. اما ممکن است به عضو دیگری غیر از x همگرا باشد.

مثال ۴۳.۱.۱. فرض کنیم $H=L^2([-\pi,\pi])$ و $x_k(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt)$. دنباله $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای متعامد یکه در H است. از طرفی برای $x(t)=\cos(t)$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,x_k\rangle x_k(t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)\sin(kt)dt\right)\frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}0\cdot\sin(kt)=0\neq\cos(t).\end{aligned}$$

تعریف ۴۴.۱.۱. (دنباله کامل متعامد یکه) دنباله متعامد یکه $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ در فضای ضرب داخلی X را کامل گوییم، هرگاه برای هر $x\in X$ داشته باشیم

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,x_k\rangle x_k. \qquad (۳.۱)$$

تبصره ۴۵.۱.۱. *رابطه (۳.۱) بیانگر این است که*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,x_k\rangle x_k\right\|=0,$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم القایی حاصل از ضرب داخلی است.

مثال ۴۶.۱.۱. فرض کنیم $X=L^2([-\pi,\pi])$ و $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کامل و متعامد یکه در X باشد. از

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,f_k\rangle f_k, \qquad (۴.۱)$$

نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(t)\right|^2dt=0,\quad \alpha_k=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f_k(t)dt,$$

و بنابراین (۴.۱) به مفهوم همگرایی نقطه‌ای نیست، بلکه همگرایی در نرم L^2 است و نمی‌توان ادعا کرد که

$$\forall x\in[-\pi,\pi],\quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k f_k(x).$$

دو قضیه زیر به رده‌بندی دنباله‌های کامل متعامد یکه در فضاهای هیلبرت می‌پردازند.

قضیه ۴۷.۱.۱. *دنباله متعامد یکه $\{x_k\}_{k=۱}^{\infty}$ در فضای هیلبرت H کامل است اگر و فقط اگر با فرض*

$$\langle x, x_k\rangle = ۰, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

داشته باشیم

$$x = ۰.$$

یا به عبارتی تنها بردار عمود بر همه اعضای دنباله، بردار صفر باشد.

قضیه ۴۸.۱.۱. *(اتحاد پارسوال) دنباله متعامد یکه $\{x_k\}_{k=۱}^{\infty}$ در فضای هیلبرت H کامل است اگر و فقط اگر برای هر $x \in H$ داشته باشیم*

$$\|x\|^۲ = \sum_{k=۱}^{\infty} |\langle x, x_k\rangle|^۲.$$

تعریف ۴۹.۱.۱. (پایه متعامد یکه) مجموعه متعامد یکه B در فضای ضرب داخلی X را پایه متعامد یکه گوییم، هرگاه برای هر $x \in X$ نمایش منحصر به فرد

$$x = \sum_{k=۱}^{\infty} \alpha_k x_k,$$

موجود باشد که در آن $\alpha_k \in \mathbb{C}$ و x_kها اعضای متمایز B باشند.

تبصره ۵۰.۱.۱. *دنباله کامل متعامد یکه $\{x_k\}_{k=۱}^{\infty}$ در فضای هیلبرت H، یک پایه متعامد یکه است.*

تعریف ۵۱.۱.۱. فرض کنیم $\{x_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای کامل و متعامد یکه در فضای هیلبرت H باشد. برای هر $x \in H$ نمایش منحصر به فرد

$$x = \sum_{k=۱}^{\infty} \langle x, x_k\rangle x_k,$$

را سری فوریه تعمیم‌یافته و مقادیر $\langle x, x_k\rangle$ را ضرایب فوریه تعمیم‌یافته می‌نامند.

مثال ۵۲.۱.۱. مجموعه $\{\phi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ که در آن

$$\phi_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{۲\pi}},$$

مجموعه‌ای کامل و متعامد یکه در فضای $L^۲([-\pi, \pi])$ است.

مثال ۵۳.۱.۱. مجموعه توابع

$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(۲x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(۲x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

مجموعه‌ای کامل و متعامد یکه در فضای $L^۲([-\pi, \pi])$ است.