بسم الله الرحمن الرحیم

الم یعلم بان الله یری

آیا نمیدانید که خدا می بیند

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

رشته:

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان پایان‌نامه:

روی چه حلقه‌هایی هر مدول تصویری جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی‌تولید شده است؟

نگارنده:

محسن ژولانژاد

استاد راهنما:

دکتر ولی گرجی زاده

استاد مشاور:

دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده

اردیبهشت ماه ۱۳۹۰

سپاس‌گزاری

خدا را بر توفیقی که بر اطاعتش داده، و ما را از نافرمانی بازداشته، ستایش مـی‌کنیم، و از او می‌خواهیم که نعمتش را کامل و دست ما را به ریسمان محکمش متّصل گرداند.

و شهادت می‌دهیم که محمّد(صلی الله علیه و آله) بنده و فرستاده‌ی اوست، که در راه رضایتِ حق، در کامِ هر گونه سختی و ناراحتی فرو رفت، و جام مشکلات و ناگواری‌ها را سرکشید. روزگاری خویشاوندان او به دورویی و دشمنی پرداختند، و بیگانگان در کینه‌توزی و دشمنی با او متّحد شدند. اعراب برای نبرد با پیامبر(صلی الله علیه و آله) عنان‌گسیخته، و با تازیانه بر مرکب ها نواخته و از هر سو گرد می‌آمدند، و از دورترین سرزمین، و فراموش شده‌ترین نقطه‌ها، دشمنی خود را بر پیامبر(صلی الله علیه و آله) فرود آوردند.

ای بندگان خدا! شما را به ترس از خدا سفارش می‌کنم، و شما را از منافقان می‌ترسانم، زیرا آنها گمراه و گمراه کننده‌اند، خطاکارند و به خطاکاری تشویق کنند، به رنگ‌های گوناگون ظاهر می شوند، از ترفندهای گوناگون استفاده می‌کنند، برای شکستن شما از هر پناهگاهی استفاده می کنند، و در هر کمینگاهی به شکار شما می‌نشینند. قلب‌هایشان بیمار، و ظاهرشان آراسته است، در پنهانی راه می‌روند، و از بیراهه‌ها حرکت می‌کنند. وصفشان دارو، و گفتارشان درمان، امّا کردارشان دردی است بی‌درمان. بر رفاه و آسایش مردم حسد می‌ورزند، و بر بلاء و گرفتاری مردم می‌افزایند، و امیدواران را ناامید می‌کنند. آنها در هر راهی کشته‌ای، و در هر دلی راهی دارند، و بر هر اندوهی اشک‌ها می‌ریزند. مدح و ستایش را به یکدیگر قرض می‌دهند، و انتظار پاداش می کشند. اگر چیزی را بخواهند اصرار می‌کنند و اگر ملامت شوند، پرده‌دری می‌کنند، و اگر داوری کنند اسراف می‌ورزند. آنها برابر هر حقّی باطلی، و برابر هر دلیلی شبهه‌ای، و برای هر زنده‌ای قاتلی، و برای هر دری کلیدی، و برای هر شبی چراغی تهیّه کرده‌اند.

با اظهار یأس می‌خواهند به مطامع خویش برسند، و بازار خود را گرم سازند، و کالای خود را بفروشند. سخن می‌گویند، امّا به اشتباه و تردید می‌اندازند، وصف می‌کنند امّا فریب می‌دهند، در آغاز، راه را آسان و سپس در تنگناها به بُن‌بست می‌کشانند، آنها یاوران شیطان و زبانه‌های آتش جهنّم می‌باشند:« آنان پیروان شیطانند، و بدانید که پیروان شیطان زیانکارانند ».

خطبه‌ی ۱۹۴ نهج البلاغه

تقدیم

تقدیم به تمامی شهدا که به واسطه‌ی ایثار، فداکاری و ازخودگذشتگی آنهاست که ما در کمال آرامش به تحصیل و تحقیق پرداخته و می‌پردازیم.

کجا هستند مردمی که به اسلام دعوت شده و پذیرفتند، و قرآن تلاوت کردند و معانی آیات را شناختند، به سوی جهاد برانگیخته شده چونان شتری که به سوی بچّه خود روی می‌آورد شیفته‌ی جهاد گردیدند، شمشیرها از نیام برآوردند، و گرداگرد زمین را گروه گروه، صف به صف، احاطه کردند، بعضی شهید، و برخی نجات یافتند. هیچ‌گاه از زنده ماندن کسی در میدان جنگ شادمان نبودند، و در مرگ شهیدان نیازی به تسلیت نداشتند، با گریه‌های طولانی از ترس خدا، چشم‌هایشان ناراحت، و از روزه‌داری فراوان، شکم هایشان لاغر و به پشت چسبیده بود. لب‌هایشان از فراوانی دعا خشک، و رنگ‌های صورت از شب زنده‌داری‌ها زرد، و بر چهره‌هایشان غبار خشوع و فروتنی نشسته بود. آنان برادران من هستند که رفته اند، و بر ماست که تشنه‌ی ملاقاتشان باشیم، و از اندوه فراقشان انگشت حسرت به دندان بگیریم.

همانا شیطان راه‌های خود را به شما آسان جلوه می‌دهد، تا گره‌های محکم دین شما را یکی پس از دیگری بگشاید، و به جای وحدت و هماهنگی، بر پراکندگی شما بیفزاید. و در پراکندگی شما را دچار فتنه گرداند. از وسوسه و زمزمه و فریبکاری شیطان روی گردانید، و نصیحت آن کس را که خیرخواه شماست گوش کنید و به جان و دل بپذیرید.

بخش‌هایی از خطبه‌ی ۱۲۱ نهج‌البلاغه

چکیده

نام خانوادگی: ژولانژاد	**نام:** محسن
عنوان پایان نامه: روی چه حلقه‌هایی هر مدول تصویری جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است؟	
استاد راهنما: دکتر ولی گرجی زاده	**استاد مشاور:** دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** جبر
محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز	**دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰/۲/۱۲	**تعداد صفحات:** ۲۴۱
واژه‌های کلیدی: مدول تصویری نامتناهی تولید شده، نظریّه‌ی تجزیه، حلقه‌ی ایدآل اصلی، حلقه ی بزوت، حلقه‌ی نیم‌موروثی(ضعیف)، حلقه‌ی توابع پیوسته	

چکیده: در این پایان‌نامه حلقه‌هایی را مشخص می‌کنیم که روی آنها هر مدول تصویری جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است، و مثال‌هایی متنوّع از حلقه‌هایی با، و بدون این ویژگی ارائه می‌کنیم.

پیشگفتار

این پایان‌نامه بر پایه‌ی مقاله‌ی زیر نوشته شده است:

W.McGovern, G.Puninski, P.Rothmaler, *When every projective module is a direct sum of finitely generated modules*, J.Algebra 315(2007) 454-481.

هدف اصلیِ این مقاله، مشخص‌کردن حلقه‌هایی است که روی آنها هر مدول تصویری، جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است و در ضمن مثال‌هایی متنوّع از حلقه‌هایی با، یا بدون این ویژگی ارائه می‌شود.

برای درک بهتر قضایا، حتّی‌الامکان سعی شده است، تمام اثبات‌های ارائه‌شده در مقاله‌ی مذکور، به‌گونه‌ای در پایان‌نامه بیان شود که نیازی به ارجاعاتِ خارج از متن نباشد(هرچند در برخی مواردِ جزئی مجالی برای رعایت این نکته نبوده است).

لازم می‌دانم از تلاش‌ها و زحمات اساتید راهنما و مشاور، آقای دکتر ولی گرجی زاده و آقای دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده کمال تشکّر و قدردانی را داشته باشم.

فهرست مطالب

مقدّمه iii

فصل ۱ کلّیات و مفاهیم مقدماتی ۱

۱.۱ مدول‌های تصویری ۱

۲.۱ مدول‌های یکدست و زیرمدول‌های محض ۱۶

۳.۱ بعدگلدی و بعدگلدی دوگان ۲۷

۴.۱ حلقه‌ی کسرها و مدول کسرها ۳۸

۵.۱ حلقه‌ی خارج قسمتی راست و قضیه‌ی گلدی ۴۶

۶.۱ مطالبی در رسته‌ی مدول‌ها ۵۲

۷.۱ ابعاد هومولوژیک ۶۳

۸.۱ جمعوندهای مستقیم و درونریختی‌های خودتوان ۷۰

۹.۱ بعدکرول ۷۳

۱۰.۱ مطالبی در توپولوژی ۷۶

فصل ۲ مدول‌های تصویری و حلقه‌ها ۸۹

فصل ۳ حلقه‌های تبادلی ۱۱۱

فصل ۴ مدول‌های تصویری و نظریّه‌ی الگویی برای مدول‌ها ۱۲۵

۱.۴ خلاصه‌ای از نظریّه‌ی الگویی برای مدول‌ها ۱۲۵

۲.۴ خاصّیت حلقه‌هایی‌که هر مدول تصویری روی آنها جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است ۱۳۳

فصل ۵ حلقه‌های نیم‌موروثی‌ضعیف ۱۴۱

فصل ۶ حلقه‌های ایدآل اصلی ۱۵۱

فصل ۷ محدودکردن سایز ماتریس‌ها ۱۵۶

فصل ۸ حلقه‌های بزوت ۱۶۴

فصل ۹ حلقه‌های توابع پیوسته ۱۷۰

کتاب‌نامه ۱۹۷

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۲۰۵

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۲۱۷

فهرست راهنما ۲۲۹

مقدّمه

مطالعه‌ی مدول‌های تصویری متناهی تولید شده یک موضوع کلاسیک در نظریّه‌ی مدول‌هاست. این نوع مدول ها در قضایای از نوع موریتا وجود دارند، امّا از این گذشته ارتباطی وسیع با K-تئوری، توپولوژی و هندسه‌ی جبری فراهم می‌کنند.در مقابل، مدول‌های تصویری نامتناهی تولید شده توجّه کمی به خود جلب می‌کنند. با وجود این، قضایای کلاسیک متعددی درباره‌ی حالت کلّی(و نه لزوماً متناهی تولید شده) چیزی برای گفتن دارند. برای مثال، کاپلانسکی [۳۳] نشان داده است که « هر مدول تصویری روی یک حلقه‌ی موضعی، آزاد است ». بعداً باس [۶] ثابت کرده است که « هر مدول تصویریِ نامتناهی تولید شده روی یک حلقه‌ی نوتریِ تعویضپذیرِ تجزیه ناپذیر، آزاد است ». با وجود این(و تا اندازه‌ای به واسطه‌ی تبصره‌ی دلسردکننده‌ی باس [۶، صفحه‌ی ۲۴]) مدول‌های تصویری‌ای که متناهی تولید شده نیستند، برای مدّتی طولانی توجّه کمی به خود جلب کرده‌اند.

وجود مثال‌های « خیلی بد »(یعنی، جالب!) دلیل دیگری است که تحقیق درباره‌ی مدول‌های تصویری‌ای که متناهی تولید شده نیستند را تا اندازه‌ای دلسردکننده می‌سازد، مثال‌هایی که از آزاد شدن دور هستند.این مثال‌ها حتّی زمانی که تمام مدول‌های متناهی تولید شده ، آزاد هستند نیز می تواند رخ دهد.در حقیقت، این مورد روی کلاس‌هایی از حلقه‌های نیم‌موضعی است، به عنوان مثال [۲۴، تمرین ۲۷.۱۴] یا [۵۰] را ببینید. مثال‌هایی دیگر از این نوع(منسوب به کاپلانسکی) به وسیله‌ی حلقه‌ی $C([0,1])$، یعنی حلقه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی مقدار روی بازه‌ی $[0,1]$، داده شده است. هر مدول تصویریِ متناهی تولید شده روی این حلقه، آزاد است، و هنوز یک مدول تصویریِ تجزیه ناپذیر که متناهی تولید شده نیست، روی این حلقه وجود دارد. فصل ۹ را برای یک نظریّه‌ی کامل از ایدآل‌های تصویری از حلقه‌ی $C([0,1])$ ببینید.

نقطه‌ی مقابل آشناتر است – هنگامی که مدول‌های تصویری، متناهی تولید شده نیستند، با اینکه ممکن است آزاد نباشند، ولی شفافتر از نوع متناهی تولید شده‌شان هستند. برای مثال لوی و رابسون [۳۶] مدول‌های تصویری‌ای را که متناهی تولید شده نیستند، روی حلقه‌های اولِ نوتریِ موروثی طبقه‌بندی کرده‌اند.

توجّه کنید که حتّی مدول‌های آزاد هم می‌توانند، از دید تجزیه، بسیار نابدیهی باشند. در حقیقت، با عبور از مدولِ M به حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایش S، یک S-مدول آزاد با همان تئوریِ تجزیه‌ی مانندِ M، بدست می‌آوریم. چون جمع مستقیم تجزیه‌های M می‌تواند به طور دلخواه، بد باشد(برای دیدن مثال‌ها [۱۸] را ببینید)، طبقه‌بندی کردنِ مدول‌های تصویری در حالت کلّی کاری نومیدکننده است(همچنین [۴۵] را برای یک راه متفاوت ببینید).

در اینجا این سوال مورد بررسی قرارگرفته است: « ***چه موقع هر مدول راست تصویری، جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است؟*** » یک نتیجه‌ی مهم از این دسته‌بندی، منسوب به آلبرچ [۳] است: « هر مدول راست تصویری روی یک حلقه‌ی نیم‌موروثیِ راست، جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است که هرکدام با یک ایدآل راست از حلقه، یکریخت است »(و این یک جزءِ اساسی در طبقه‌بندی ذکر شده ی لوی و رابسون است). باس [۷] همان را برای مدول‌های چپ تصویری روی حلقه‌های نیم‌موروثیِ راست ثابت‌کرد - با جایگزین‌کردن ایدآل‌های چپ به جای ایدآل‌های راست.

بعداً برگمن [۹] هر دو قضیه را با ثابت‌کردن اینکه « هر مدول تصویری روی یک حلقه‌ی نیم‌موروثیِ‌ضعیف، جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است » تعمیم داد.

مولر [۴۳] نشان داده است‌که « هر مدولِ تصویری روی یک حلقه‌ی نیم‌کامل، جمع مستقیمی از مدول‌هایِ متناهی تولید شده است ». برای تعمیم‌دادنِ این، وارفیلد [۶۱] ثابت‌کرده است‌که « هر مدول راست تصویری روی یک حلقه‌ی تبادلی، جمع مستقیمی از ایدآل‌های راست‌اصلیِ تولید شده به وسیله‌ی یک عنصر خودتوان است »، این را با قضیه‌ی ۶.۳ مقایسه‌کنید.

در قضیه‌ی ۹.۲.۴ معیار دقیقی برای اینکه هر مدول راست تصویری، یک جمع مستقیم از مدول های متناهی‌مولّد شود، می‌دهیم. قطع نظر از جزئیات، این معیار می‌گوید‌که « مجموعه‌ی ماتریس های خودتوان روی حلقه‌ی زمینه‌اش چگال است، یعنی هر دنباله‌ی پایدار از ماتریس‌های مستطیلی را قطع می‌کند »؛ فصل ۴ را برای فرمول‌بندی دقیق ببینید. با استفاده‌کردن از این معیار در فصل ۵ یک اثبات جدید از نتایجِ پیش از این اثبات شده‌ی برگمن می‌دهیم. همچون یک نتیجه‌ی مسلّم دیگر، در فصل ۶، ثابت می‌کنیم‌که « هر مدول تصویری روی یک حلقه‌ی ایدآل راست اصلی، یک جمع مستقیم از مدول‌های متناهی تولید شده است ».

تمام اینها، بر این مشاهده‌ی اساسی استوار است(تا اندازه ای رجوع‌کنید به [۶۲]) که هر دنباله‌ی پایدار $\{A\}$ از ماتریس‌ها به یک مدول تصویری شمارا تولید شده‌ی $P\{A\}$ برده می‌شود، و برعکس، هر مدول تصویری شمارا تولید شده به این شکل است.

به طورکلّی، ماتریس‌های موجود در معیار، می‌توانند اندازه‌های به دلخواه بزرگی داشته باشند. نتیجه‌ی ۷. ۱۵ نشان می‌دهدکه این مشکل، اساسی است. از روی‌کنجکاوی، برای ثابت‌کردن این حقیقت منفی، ما مجبوریم

بعضی نتایج مسلّم نظیر زیر را احضارکنیم. اگر یک حلقه، نشاننده در حلقه‌ی درونریختی‌های یک مدول متناهی‌طول باشد، و $\{A\}$ یک دنباله‌ی پایدار از ماتریس‌ها با اندازه‌های به طور یکنواخت کراندار باشد، آنگاه $P\{A\}$ جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است. در قضیه‌ی ۲۱.۷ می‌بینیم که، همان مطلب برای مدول‌های تصویری روی حلقه‌های با بعدکرول یک طرفه درست است(توجّه کنید که این، حلقه‌های نوتری یک طرفه را نیز شامل می‌شود).

سوال ما هنوز برای حلقه‌های نوتری ، به طور گسترده باز است. می‌دانیم که پاسخ برای حلقه‌های تعویض‌پذیر، مثبت است و هنگامی که این حلقه ساده است، همین پاسخ می‌تواند از نتایج باس مشتق شود، فصل ۲ را ببینید. برای تعمیم اولی، آن را در میان چیزهای دیگر می‌کشیم، نتیجه‌ی زیر از یک نتیجه از هینوهارا [۲۹] است: « هر مدول تصویری روی یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر نوتری، جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است »(قضیه‌ی ۵۹.۲).

از طرف دیگر، از آکاساکی [۲] و لاینیل [۳۷] نتیجه می‌شود که روی حلقه‌ی گروهی‌صحیح $\mathbb{Z}A_5$، یک مدول تصویری بدون هیچ جمعوند مستقیم متناهی تولید شده‌ای، وجود دارد. با موضعی‌کردن این حلقه، یک حلقه‌ی نوتری نیم‌موضعیِ متناهی روی مرکزش با یک مدول تصویری که جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده نیست، وجود دارد(مثال ۶۵.۲)(از این مثال برای نشان دادن اینکه، به طور کلّی نمی‌توان اندازه‌ی ماتریس‌ها در قضیه‌ی ۹.۲.۴(معیار) را تحدیدکرد، استفاده می‌شود، نتیجه‌ی ۲۲.۷ را ببینید).

با استفاده از یک لم معین، مثال مذکور به ما اجازه می‌دهد که وجود یک مدول آرتینیِ‌دوری M و یک جمعوند مستقیم N از $M^{(\omega)}$ را نتیجه بگیریم به طوری که N هیچ جمعوند مستقیم متناهی تولید شده‌ای ندارد(قضیه‌ی ۶۸.۲).

در فصل ۸ نشان داده شده است که روی یک حلقه‌ی بزوت چپ، مجبور نیستیم که به ماتریس‌های با اندازه‌ی رشدکننده رسیدگی کنیم: در نظرگرفتن عناصر حلقه در معیار کفایت می‌کند. نتیجه‌ی ۶.۸ ثابت می‌کند که هر مدول راست تصویری، روی یک حلقه‌ی بزوت با بعدکرول یک طرفه جمع مستقیمی از ایدآل های راست اصلی تولید شده به وسیله‌ی خودتوان‌ها است. در قضیه‌ی ۱۰.۸ ، حلقه‌های بزوت تعویض‌پذیری مشخص شده‌اند که هر مدول تصویری، جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است مانندِ f–حلقه‌های مطالعه شده در واسکونکلوس [۶۰] و جاندروپ [۳۱] از اینجا استنتاج می‌کنیم که هر مدول تصویری روی یک حلقه‌ی بزوت تعویض‌پذیر از بعدگلدی‌متناهی یک جمع مستقیم از مدول‌های متناهی تولید شده است. در مقابل، مثالی از یک حلقه‌ی بزوت تعویض‌پذیر تجزیه ناپذیر از بعدضعیف ۱ داده شده است با یک مدول تصویری بدون جمعوندهای مستقیم تجزیه ناپذیر(مثال ۸۳.۹).

به طور کلّی هیچ استلزامی(بجز حالت بدیهی) بین قضیه‌های مذکور از وارفیلد، برگمن، باس، آلبرچ و هینوهارا وجود ندارد. اگرچه با تحدید حلقه به حلقه‌های $C(X)$ از توابع پیوسته‌ی حقیقی مقدار روی یک فضای توپولوژی X، این نتایج در یک سلسله مراتب خطّی همچون زیر اتّفاق می‌افتند.

قضیه‌ی وارفیلد کلّی‌تر از بقیّه است: هر $C(X)$–مدول تصویری، جمع مستقیمی از مدول‌های متناهی تولید شده است اگر و فقط اگر $C(X)$ یک حلقه‌ی تبادلی باشد اگر و فقط اگر X قویاًصفربعدی باشد. نتیجه‌ی برگمن ضعیف‌تر است: در قضیه‌ی ۷۰.۹ ثابت کرده‌ایم که $C(X)$ نیم‌موروثی‌ضعیف است اگر وفقط اگر X یک F–فضای قویاًصفربعدی باشد. قضایای باس و آلبرچ حتّی محدودترند: یک حلقه‌ی $C(X)$ نیم‌موروثی است اگر و فقط اگر X اساساً ناهمبند باشد(برای حالت خاصّی از $C(X)$، این، به طور مستقل به بروکشیر [۱۱] و دی مارکو [۱۶] منسوب است). سرانجام، قضیه‌ی هینوهارا ضعیف‌ترین است: حلقه‌ی $C(X)$ نوتریِ‌ضعیف است اگر و فقط اگر X یک فضای گسسته‌ی متناهی باشد.

خلاصه‌ای از مثال‌های موجود در فصل ۹، در جدول زیر آمده است:

نوع حلقه / حلقه	نوتری‌ضعیف (= F–حلقه)	نیم‌موروثی	نیم‌موروثی ضعیف	بزوت ($\mathrm{wd}\leq 1$ =)	$\boldsymbol{f}$–حلقه
$C(\mathbf{1})$	بله	بله	بله	بله	بله
$C(\mathbb{N})$	خیر	بله	بله	بله	بله
$C(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$	خیر	خیر	بله	بله	بله
$C(\mathbb{Q})$	خیر	خیر	خیر	خیر	بله
$C(\beta\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{R}^+)$	خیر	خیر	خیر	بله	خیر
$C([0,1])$	خیر	خیر	خیر	خیر	خیر

موضوع مورد مطالعه آنچنان که لیست شده جا انداخته می شود، در فصل ۱ ، تعدادی از پیش‌نیازها را که در ادامه لازم می‌شوند و در فصل ۲ ، بعضی از نتایج آشنا درباره‌ی سوال اصلی، به طور خلاصه مرور شده است.

تعدادی از سوالات باز در مکان‌های مناسب پخش‌شده‌است. برای مثال نمی‌دانیم که آیا هر مدول تصویری روی یک دامنه‌ی صحیح تعویض‌پذیر، یک جمع مستقیم از مدول‌های متناهی تولید شده است، سوال ۸۳.۲.

فصل ۱

کلّیات و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مدول‌های تصویری

۱.۱.۱. قــرارداد: (۱) حلقــه‌هـا یکــدار و مـدول‌هـا یکـانی فـرض مـی‌شـوند و زیرحلقـه‌هـا واحـد حلقـه را دارند.(حلقه‌ها تعویضپذیر نیستند، مگر اینکه خلاف آن تصریح شود.)

(۲) منظــور از مــدول، یــک مــدول راســت روی یــک حلقـــه‌ی یکــدار اســت، مگــر اینکــه خــلاف آن تصــریح شــده باشــد(در حــالتی کــه M یــک مــدول راســت روی حلقـــه‌ی تعویضـــپذیر R باشــد، آنگاه با تعـریفِ $\forall r \in R, m \in M\ ;\ rm = mr$ یک مدول چپ نیز می‌باشد).

۲.۱.۱. تعریف و قضیه: فرض کنیم A یک گروه آبلی جمعی باشـد. یـک درونـریخـتی A عبـارت اسـت از یک همریختی گروهیِ $f: A \longrightarrow A$، به عبارت دیگر، اگر تابع را از چپ روی عناصر A اثر دهیم، داشته باشیم:

$$\forall a,b \in A \ \ ,\ f(a+b) = f(a) + f(b)\ .$$

اگر E مجموعه‌ی درونریختی‌های A باشد، آنگاه E با عمل جمع تعریف شده به صورت زیر، $\forall f,g \in E$،

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) \qquad , \qquad \forall a \in A$$

یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد. حال روی E عمل ترکیب توابع، شرکت پذیر و قابل پخش روی جمع می‌باشد، بنابراین اگر $A \neq 0$ (یعنی، اگر E دست کم دو عضو داشته باشد)، آنگاه E دقیقاً حلقه‌ای یکدار با نگاشت همانی $Id_A: A \longrightarrow A$ است که **حلقه‌ی درونریختی گروه آبلی A** نامیده می‌شود. امّا توجّه کنید که اگر $f, g \in E$، آنگاه به طور کلّی حاصلضرب fog در E به این وابسته است که آیا توابع از راست یا از چپ روی اعضای A عمل می‌کنند، یعنی: $(a)(fog) = \big((a)f\big)g$ یا $(fog)(a) = f\big(g(a)\big)$.

به عبارت دیگر، به طور طبیعی هر گروه آبلی(ناصفر) A دارای دو حلقه‌ی درونریختی است، یک حلقه از درونریختی‌های راست و یک حلقه از درونریختی‌های چپ، که به ترتیب با $End^r(A)$ و $End^l(A)$ نمایش داده می‌شوند. البته $End^l(A) = \big(End^r(A)\big)^{op}$.

اثبات: مثال ۴.۱.۲ صفحه‌ی ۳۳ از [۶۷] را ببینید.■

۳.۱.۱. لم: فرض کنیم M و N دو R-مدول باشند. قرار می‌دهیم:

$$Hom_R(M,N) = \left\{ f: M \longrightarrow N \;\middle|\; \text{یک } R - \text{همریختی باشد } f \right\}.$$

مجموعه‌ی $Hom_R(M,N)$ با عمل +، که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک گروه آبلی است.

برای هر $f, g \in Hom_R(M,N)$: $\quad (\forall m \in M) \quad (f+g)(m) = f(m) + g(m)$.

اثبات: تمرین ۷.۱.۴(آ) صفحه‌ی ۲۷۹ از [۶۸] را ببینید.■

۴.۱.۱. تعریف: فرض کنیم M یک R-مدول باشد. با توجّه به لم ۳.۱.۱، $Hom_R(M,M)$ یک گروه آبلی است. با فرض M≠0 اگر مانند ۲.۱.۱، عمل ضرب روی این مجموعه را ترکیب توابع تعریف کنیم، آنگاه $Hom_R(M,M)$ به یک حلقه‌ی تبدیل می‌شود که آن را **حلقه‌ی درونریختی‌های مدول M** می‌نامیم. امّا دقیقاً مانند گروه‌ها، دو تا از چنین حلقه‌هایی وجود دارد و ما بایستی بین آنها تفاوت قائل شویم. فرض کنیم $End_R^l(M)$ و $End_R^r(M)$ نمایش حلقه‌ی درونریختی‌های مدول M_R، که به ترتیب عمل کننده‌های چپ روی M و عمل کننده های راست M فرض می‌شوند، باشند. بنابراین، اینها حلقه‌های متضادی از همدیگر هستند. این باعث می‌شود که فقط یک طرف عرضه شود. در حقیقت چون ما همیشه به نوشتن درونریختی‌ها نیاز داریم، ***قرارداد می کنیم که اعضای حلقه‌ی درونریختی‌ها در سمت مخالف اسکالرها قرار می گیرند.*** برای یک R-مدول چپ M می نویسیم: $End({}_RM) = End_R^r(M)$، برای حلقه‌ی درووریختی M عمل کننده روی راست، و برای یک R-مدول راست N می‌نویسیم: $End(N_R) = End_R^l(N)$، برای حلقه‌ی درونریختی N عمل کننده روی چپ.

۵.۱.۱. قضیه: اگر M یک R-مدول راست باشد، آنگاه M با تعریف زیر به یک $End(M_R)$-مدول چپ تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \cdot: End(M_R) \times M \longrightarrow M \\ \qquad f.m = f(m) \end{cases}.$$

اثبات: تمرین ۱.۷.۴(پ) صفحه‌ی ۲۷۹ از [۶۸] را ببینید.■

۶.۱.۱. تعریف: فرض کنیم F یک R-مدول باشد. مجموعه‌ی مولّد X برای F یک **پایه** نامیده می‌شود هرگاه مستقل خطی باشد، یعنی به ازای هر n عضو از X که متمایز باشند، مثل $x_1 , … , x_n$، و هر n عضو از R مثل $r_1 , … , r_n$، $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = 0$، نتیجه دهد $r_1 = 0 , … , r_n = 0$.

مدول F را **آزاد** نامیم در صورتی که پایه داشته باشد.

۷.۱.۱. قضیه: شرایط زیر بر R-مدول F با هم معادلند:

(۱) F_R آزاد است؛

(۲) F_R با جمع مستقیمی(احتمالاً نامتناهی) از نسخه‌هایی از R_R یکریخت است؛

(۳) F_R با یک زیرمجموعه‌ی $B = \{e_i\}_{i \in I}$ دارای « خاصّیت عمومی » زیر است: برای هر مدول M_R و هر $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq M$ یک R-همریختی منحصر به فرد $f : F \longrightarrow M$ با $f(e_i) = m_i$ برای هر $i \in I$ وجود دارد.

اثبات: به قضیه‌ی ۱.۲ صفحه‌ی ۲۸۲ از [۶۸] رجوع کنید.■

۸.۱.۱. قضیه: هر R-مدول A نقش همریخت یک R-مدول آزاد مانند F است. هرگاه A متناهی تولید شده باشد، آنگاه F را می‌توان با تولید متناهی انتخاب کرد.

اثبات: به نتیجه‌ی ۲.۲ صفحه‌ی ۲۸۵ از [۶۸] رجوع کنید.■

۹.۱.۱. نمادگذاری: اگر I یک مجموعه‌ی اندیس‌گذاری دلخواه باشد و برای هر $i \in I$، R_i نسخه‌ای از R_R باشد، آنگاه جمع مستقیم $\sum_{i \in I} \oplus R_i$ را با $R^{(I)}$ و حاصلضرب مستقیم $\prod_{i \in I} R_i$ را با R^I نمایش می‌دهیم. همچنین می‌دانیم که اگر I متناهی با n عضو باشد، آنگاه مجموع مستقیم و حاصلضرب مستقیم بر هم منطبق هستند، در این صورت برای $R^I = R^{(I)}$ می‌نویسیم R^n.

۱۰.۱.۱. تعریف: یک مدول را **تصویری** گوییم در صورتی که جمعوند مستقیم یک مدول آزاد باشد.

۱۱.۱.۱. قضیه: مدول P_R تصویری است اگر و فقط اگر برای هر دیاگرام

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

از R-همریختی‌ها که سطر پایین کامل باشد، R-همریختی $h: P \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که دیاگرام

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

جابه‌جایی باشد، یعنی $goh = f$.

اثبات: به قضیه‌ی ۴.۳ صفحه‌ی ۲۹۹ از [۶۸] رجوع کنید.■

۱.۱.۱۲. تعریف: دنباله‌ی کامل کوتاه $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ را **شکافنده** گوییم هرگاه $f(N) = Im\, f = \ker g$ جمعوند مستقیم M باشد، یعنی $M = f(N) \oplus Q$ برای R-زیرمدول Q از M.

۱.۱.۱۳.قضیه: دنباله‌ی کامل کوتاه $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت احکام زیر معادلند.

(۱) دنباله‌ی بالا شکافنده است؛

(۲) R-همریختی $h: M \longrightarrow N$ وجود دارد به طوری که $foh = Id_N$؛

(۳) R-همریختی $k: P \longrightarrow M$ وجود دارد به طوری که $kog = Id_P$.

اثبات: به قضیه‌ی ۱۸.۱ صفحه‌ی ۲۷۷ از [۶۸] رجوع کنید.■

۱.۱.۱۴. قضیه: P_R تصویری است اگر وفقط اگر هر دنباله‌ی کامل کوتاه $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی شکافنده باشد.

اثبات: به قضیه‌ی ۴.۳ صفحه‌ی ۲۹۹ از [۶۸] رجوع کنید.■

۱.۱.۱۵. لم: اگر A یک گروه آبلی و $n \in \mathbb{N}$ باشد به طوری که برای هر $a \in A$، $an = 0$، آنگاه A یک $\mathbb{Z}_n$-مدول با تعریف $a\bar{k} = ak$ است به طوری که $k \in \mathbb{Z}$.

اثبات: فقط ثابت می‌کنیم که عمل فوق خوش‌تعریف است و بقیه‌ی اثبات به خواننده واگذار می‌شود. اگر $a \in A$ و $\bar{k} = \bar{l}$، آنگاه:

$$a \in A\,, \overline{k-l} = 0 \;\Rightarrow\; a \in A\,, \exists t \in \mathbb{N} \ni k - l = nt \;\Rightarrow\; a(k-l) = a(nt) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ak - al = \underbrace{(an)}_{0}\, t = 0 \;\Rightarrow\; ak = al \;\Rightarrow\; \boxed{a\bar{k} = a\bar{l}}\,.\blacksquare$$

۱۶.۱.۱. لم: برای هر $m,n \in \mathbb{N}$، $\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ که،کوچکترین مضرب مشترک m,n $= [m,n] = p$.

اثبات: ابتدا توجّه کنید که منظور از k_l عنصر $[k]$ از $\mathbb{Z}_l$ است. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} f\colon \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \\ f(k_p) = (k_m, k_n) \end{cases}$$

f خوش تعریف است زیرا:

$$k_p = k'_p \;\Rightarrow\; (k-k')_p = 0_p \;\Rightarrow\; \exists t \in \mathbb{Z} \;\ni k - k' = pt \xrightarrow{p=[m,n]} \exists r,s \in \mathbb{Z} \ni k - k'$$

$$= (mr)t \;, \qquad k - k' = (ns)t \;\Rightarrow k - k' = m(rt)\,, k - k' = n(st) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (k,k')_m = 0_m\,,(k-k')_n = 0_n \Rightarrow\; k_m = k'_m\,, k_n = k'_n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (k_m, k_n) = (k'_m, k'_n) \Rightarrow \boxed{f(k_p) = f(k'_p)}.$$

اکنون نشان می‌دهیم که f یک $\mathbb{Z}_p$-یکریختی است. برای هر $r_p\,, k_p, l_p \in \mathbb{Z}_p$ داریم:

$$(i)\;\; f(k_p + l_p) \;=\; f\big(\,(k+l)_p\big) = (\,(k+l)_m\,,(k+l)_n) = (\,k_m + l_m\,, k_n + l_n\,) =$$

$$= (k_m\,, k_n) + (l_m\,, l_n) = f(k_p) + f(l_p)$$

$$(ii)\;\; f(k_p r_p) \;= f\big((kr)_p\big) = (\,(kr)_m\,,(kr)_n) = (\,k_m r_m\,, k_n r_n) = (\,k_m\,, k_n) r_p = f(k_p) r_p$$

$$(iii)\;\; k_p \in \ker f \Rightarrow f(k_p) = 0 \Rightarrow (k_m\,, k_n) = 0 \Rightarrow k_m = 0_m\,, k_n = 0_n \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists t,s \in \mathbb{Z} \;\ni k = nt\,, k = ms \;\Rightarrow nt = ms \Rightarrow$ هستند n,m مضربهای مشترکی از $t,s \;\Rightarrow$

$\Rightarrow t = rp\,, s = r'p \;\ni r,r' \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow k = nrp\,, k = mr'p \Rightarrow k_p = 0_p \Rightarrow$ یک به یک است f

(iv) چون $\mathbb{Z}_p$ و $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ متناهی هستند و f یک به یک است و $|\mathbb{Z}_p| = |\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n|$ لذا f پوشاست.$\blacksquare$

۱۷.۱.۱. مثال: (۱) یک مدول آزاد همیشه تصویری است امّا عکس این برقرار نیست.

(۲) هر حلقه به عنوان یک مدول روی خودش آزاد است(در این حالت واحد حلقه پایه‌ی آن است) و لذا تصویری می‌باشد.

۱.۱.۱۸. مثال: حلقه‌ی $\mathbb{Z}_6$ یک $\mathbb{Z}_6$-مدول آزاد است و بنابر لم ۱.۱.۱۵، $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$، $\mathbb{Z}_6$-مدول هستند و طبق لم ۱.۱.۱۶ داریم: $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ که یکریختیِ $\mathbb{Z}_6$-مدول‌هاست. لذا $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ به عنوان $\mathbb{Z}_6$-مدول، تصویری هستند ولی این $\mathbb{Z}_6$-مدول‌ها آزاد نیستند، یعنی پایه ندارند، زیرا:

در مورد $\mathbb{Z}_2$ ، فقط عنصرِ 1_2 می‌تواند عضو پایه باشد ولی $1_2.2_6 = 1_2.2 = 2_2 = 0_2$ و $0_6 \neq 2_6$، بنابراین $\mathbb{Z}_2$ پایه ندارد. در مورد $\mathbb{Z}_3$ نیز فقط 1_3 و 2_3 می‌توانند در پایه‌ی $\mathbb{Z}_3$ باشند، امّا چنین نیست زیرا داریم: $1_3.3_6 = 1_3.3 = 3_3 = 0_3$ و $2_3.3_6 = 2_3.3 = 6_3 = 0_3$ در حالی که $0_6 \neq 3_6$، پس $\mathbb{Z}_3$ پایه ندارد. بنابراین هر مدول تصویری، آزاد نیست.■

۱.۱.۱۹. تعریف: حلقه‌ی R را **دامنه‌ی صحیح** نامیم در صورتی که حاصلضرب اعضای غیرصفر، همیشه غیرصفر باشد، یعنی برای هر $r, s \in R$، $rs = 0$ نتیجه دهد $r = 0$ یا $s = 0$.

۱.۱.۲۰. تعریف: دامنه‌ی صحیح R را یک **دامنه‌ی ایدآل اصلی** نامیم در صورتی که هر ایدآل آن اصلی باشد.

۱.۱.۲۱. قضیه: اگر R یک دامنه‌ی ایدآل اصلی تعویضپذیر باشد، آنگاه هر زیرمدول H از یک R-مدولِ آزاد F، آزاد است و rank(H)≤rank(F).

اثبات: به قضیه‌ی ۱.۶ صفحه‌ی ۳۴۰ از [۶۸] رجوع کنید.■

۱.۱.۲۲. نتیجه: هر مدول تصویری روی دامنه‌ی ایدآل اصلی تعویضپذیر، آزاد است.

اثبات: با توجّه به تعریف مدول تصویری و قضیه‌ی قبل، بدیهی است.■

۱.۱.۲۳. مثال: هر مدول، تصویری نیست. به عنوان مثال برای هر $n \geq 2$، $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}_n$ شامل هیچ زیر مجموعه‌ی مستقل خطّی‌ای نیست و لذا آزاد نمی‌باشد. پس با توجّه به نتیجه‌ی قبل تصویری نیست.

۱.۱.۲۴. قضیه: جمع مستقیم $\sum_{i \in I} \oplus P_i$ از R-مدول‌های راست، تصویری است اگر و فقط اگر هر جمعوند P_i تصویری باشد.

اثبات: به حکم ۵.۳ صفحه‌ی ۳۰۱ از [۶۸] رجوع کنید.■

۱.۱.۲۵. تبصره: قضیه‌ی فوق برای حاصلضرب مستقیم برقرار نیست. به عنوان مثال: $\mathbb{Z}$-مدول $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_i$ که هر $\mathbb{Z}_i$ یک نسخه از $\mathbb{Z}$ است، تصویری نیست(چون آزاد نیست) امّا هر $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}_i$ تصویری است.■

۲۶.۱.۱. مثال: نشان می‌دهیم که $\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول، تصویری نیست. چون $\mathbb{Z}$ یک دامنه‌ی ایدآل اصلی تعویضپذیر است پس با توجّه به نتیجه‌ی ۲۲.۱.۱، کافی است ثابت کنیم که $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ آزاد نیست. فرض کنیم آزاد باشد پس پایه‌ای دارد. این پایه نمی‌تواند یک عضو داشته باشد چون در غیر این صورت، اگر $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ پایه باشد، آنگاه

حالت اول: اگر $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ آنگاه مثلاً عدد کسریِ $\frac{1}{5}$ را تولید نمی‌کند.

حالت دوم: اگر $(p,q) = 1$ آنگاه مثلاً $\frac{p}{q^2}$ را تولید نمی‌کند(زیرا اگر برای $k \in \mathbb{Z}$ای داشته باشیم $\frac{p}{q^2} = k\frac{p}{q}$ آنگاه $\frac{p}{q}\left(\frac{1}{q} - k\right) = 0$ و چون $\frac{p}{q} \neq 0$ پس $\frac{1}{q} - k = 0$، یعنی $k = \frac{1}{q}$، که این با $k \in \mathbb{Z}$ متناقض است).

لذا فرض کنیم S پایه‌ای با بیش از یک عضو، برای $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ باشد. داریم:

$$\exists 0 \neq \frac{\mathrm{p}_1}{\mathrm{q}_1}\ ,\ 0 \neq \frac{\mathrm{p}_2}{\mathrm{q}_2} \in \mathrm{S} \implies p_1, p_2, q_1, q_2 \neq 0 \implies -p_1q_2 \neq 0\ ,\ p_2q_1 \neq 0$$

ولی داریم: $(p_2q_1)\frac{p_1}{q_1} + (-p_1q_2)\frac{p_2}{q_2} = p_2p_1 - p_1p_2 = 0$ و این یعنی زیرمجموعه‌ی $\left\{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right\}$ از S مستقل خطی نیست، پس S مستقل خطی نیست که این با پایه بودن S در تناقض است، از اینجا نتیجه می‌شود $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ پایه ندارد و لذا آزاد نیست.■

۲۷.۱.۱. لم ایلنبرگ: اگر P_R تصویری باشد، آنگاه یک مدول آزاد F_R وجود دارد به طوری که $P \oplus F \cong F$.

اثبات: اگر P_R تصویری باشد، آنگاه R-مدول آزاد F_R وجود دارد به طوری که P⊕Q=F. می‌توان F را با پایه‌ی نامتناهی درنظر گرفت. بنابراین داریم:

$$F \cong R^{(X)} \text{ که } X \text{ مجموعه ی نامتناهی وجود دارد} \implies F^{(\mathbb{N})} \cong \underbrace{F \oplus F \oplus \cdots}_{\aleph_0 \text{بار}} \cong$$

$$\cong \underbrace{R^{(X)} \oplus R^{(X)} \oplus \cdots}_{\aleph_0 \text{بار}} \xrightarrow{\aleph_0 . card(X) = card(X)} F^{(\mathbb{N})} \cong R^{(X)} \cong F \implies F^{(\mathbb{N})} \cong F$$

و لذا از این یکریختی و تساوی P⊕Q=F، نتیجه می‌شود که:

$$F \cong F^{(\mathbb{N})} = (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus \cdots \cong P \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \oplus P) \oplus \cdots \cong$$

$$\cong P \oplus F \oplus F \oplus \cdots \cong P \oplus F^{(\mathbb{N})} \cong P \oplus F \implies \boxed{F \cong P \oplus F}. \blacksquare$$

۲۸.۱.۱. قضیه‌ی کاپلانسکی: فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد که جمع مستقیمی از(هر تعداد از) R-مدول‌های شمارا تولید شده است، آنگاه هر جمعوند مستقیم از M نیز جمع مستقیمی از R-مدول های شمارا تولید شده است.

اثبات: به قضیه‌ی ۱ از [۳۳] رجوع کنید.■

۲۹.۱.۱. نتیجه: هر مدول تصویری، جمع مستقیمی از مدول‌های(تصویری) شمارا تولید شده است.

اثبات: با توجّه تعریف مدول تصویری و قضیه‌ی قبل، بدیهی است.■

۳۰.۱.۱. تبصره: عکس نتیجه‌ی فوق برقرار نیست. به عنوان مثال:

(۱) $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ جمع مستقیمی از مدول‌های شماراتولید شده است($\mathbb{Q}=\mathbb{Q}\oplus 0$) ولی با توجّه به مثال ۲۶.۱.۱، تصویری نیست.

(۲) برای هر عدد اول p، $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$، شمارا(ی نامتناهی) تولید شده است امّا تصویری نیست(به تمرین ۴.۳.۴ صفحه‌ی ۳۰۸ از [۶۸] رجوع کنید).

۳۱.۱.۱. تعریف: فرض کنیم P یک R-مدول باشد. **اثر P**،که با **Tr(P)** نمایش داده می‌شود، مجموع همه‌ی تصاویر R-همریختی‌های $P \longrightarrow R_R$ می‌باشد. یعنی،

$$Tr(P) = \sum_{f \in Hom_R(P,R)} f(P) \quad .$$

۳۲.۱.۱. مثال: (۱) توجّه کنید که $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}\,,\mathbb{Z}) = 0$، زیرا اگر $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}\,,\mathbb{Z})$، آنگاه چون $\mathbb{Q}$ بخش پذیر است پس $f(\mathbb{Q}) \leq \mathbb{Z}$ نیز بخش پذیر است و چون $\mathbb{Z}$، زیرمدول بخش پذیر غیرصفر ندارد پس $f(\mathbb{Q}) = 0$ و لذا $f = 0$. بنابراین $\mathrm{Tr}(\mathbb{Q}) = 0$(بیاد آورید که گروه آبلی($\mathbb{Z}$-مدول) D **بخش پذیر** نامیده می شود در صورتی که به ازای هر $y \in D$ و $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ ، $x \in D$ای وجود داشته باشد به طوری که $nx = y$).

(۲) اگر R-مدول R را در نظر بگیریم، آنگاه چون $\begin{cases} Id_R\colon R \longrightarrow R \\ Id_R(r) = r \end{cases}$ یکریختی R-مدول‌هاست، بنابراین

$$Tr(R) = \sum_{f \in Hom_R(R,R)} f(R) = R\,.$$