دانشکده‌ی ریاضی

گروه ریاضی محض

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض- هندسه و توپولوژی

عنوان:

# مباحثی در فضاهای شبه متریک جزئی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا احمدی زند

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا هوشمنداصل

پژوهش‌گر:

مریم رضازاده

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

با بضاعت اندک، تقدیم به پیشگاه

امام زمان (عج)

عمریست که از حضور او جاماندیم
در غربت سرد خویش تنها ماندیم
او منتظرست تا که ما برگردیم
ماییم که در غیبت کبری ماندیم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمدرضا احمدی زند، تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

از جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را متقبل شدند کمال تشکر را دارم.

در پایان، بر دستان گرم پدر و مادر عزیزم که بهترین پشتیبانان من بودند، بوسه زده و از آنان سپاس و قدردانی می کنم.

# چکیده

در این پایان نامه فضاهای متریک، متریک جزئی، شبه‌متریک و شبه‌متریک جزئی مطالعه می‌شوند. سپس به مطالعه فضاهای متریک تعمیم یافته و متریک جزئی تعمیم یافته پرداخته و مثال‌ها و قضایایی را در این زمینه اثبات می‌کنیم. در آخر فضاهای شبه‌متریک تعمیم یافته و شبه‌متریک جزئی تعمیم یافته را معرفی کرده و مباحثی را در این زمینه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

# فهرست مطالب


۱.۰ پیش‌گفتار ........ پ

**۱ متریک و متریک جزئی ۱**

۱.۱ متریک ........ ۲

۲.۱ متریک جزئی ........ ۳

۳.۱ متریک وزن‌دار ........ ۸

۴.۱ متریک جزئی کامل ........ ۱۲

**۲ شبه‌متریک و شبه‌متریک جزئی ۱۷**

۱.۲ شبه‌متریک ........ ۱۸

۲.۲ شبه‌متریک جزئی ........ ۲۱

۳.۲ شبه‌متریک وزن‌دار ........ ۲۴

**۳ $BCK$- جبر ۴۳**

۱.۳ مفاهیم و مقدماتی درباره $BCK$- جبر ........ ۴۴

۲.۳ شبه‌متریک جزئی روی $BCK$-جبر ........ ۴۵

**۴ تعمیم فضاهای متریک و متریک جزئی ۴۹**

۱.۴ $G$- متریک ........ ۵۰

۲.۴ $GP$- متریک ........ ۵۹

**۵ تعمیم فضاهای شبه‌متریک و شبه‌متریک جزئی** **۶۷**

۱.۵ $GQ$- متریک . . . . . . . . . . ۶۸

۲.۵ $GPQ$- متریک . . . . . . . . . . ۷۰

۳.۵ فضای $GQ$- متریک با وزن . . . . . . . . . . ۷۷

**واژه‌نامه فارسی به انگلیسی** **۸۵**

**مراجع** **۸۷**

## ۱.۰ پیش‌گفتار

موضوع متریک جزئی مبحثی شناخته شده در ریاضیات و سایر علوم است. تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه انجام شده و یا در حال انجام است.

متریک‌های جزئی که توسط ماتیوس[۱] [۱۳] در سال ۱۹۹۲ معرفی شدند، تعمیمی از متریکی هستند که در آن خودفاصله‌ها لازم نیست صفر باشند. این نوع متریک برای مدل کردن اطلاعات تعریف شده که غالباً در علوم کامپیوتر ظاهر می‌شود، مفید هستند. متریک‌های جزئی با شبه‌متریک‌های وزن‌دار شده هم ارز هستند.

پس از ماتیوس و در سال ۱۹۹۴، کنزی[۲] و واجنر[۳] [۱۱] شرایطی کافی برای توپولوژی‌ها بیان کردند تا قابلیت متریک جزئی را داشته باشند، در سال ۱۹۹۶، نیل[۴] [۱۸] متریک‌های جزئی را برای پذیرفتن مقادیر منفی ایجاد کرد و بعد از او در سال ۱۹۹۹، هکمن[۵] [۷] با حذف شرط ۲ و ۳ در تعریف متریک جزئی، تعریفی از متریک جزئی ضعیف بدست آورد. وازکوایز[۶] [۲۹] در سال ۲۰۰۳ با حذف شرط ۴ در تعریف متریک جزئی، مفهوم متریک متقارن را تعریف کرد.

در سال ۲۰۰۶ [۱۲]، مفهومی از فضای شبه‌متریک جزئی معرفی شد و نشان داده شد نتایج زیادی از متریک‌های جزئی در تعمیم دسته بزرگتری از فضاها می‌توانند به ما کمک کنند.

ما در فصل اول این پایان نامه به مطالعه فضاهای متریک و متریک جزئی روی $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ پرداخته و روابط و ویژگی‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم. در فصل دوم به مطالعه فضاهای شبه‌متریک و شبه‌متریک جزئی روی $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ پرداخته و روابط و ویژگی‌های آن‌ها را با هم و با متریک و متریک جزئی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم به مطالعه مفاهیم و مقدماتی از $BCK$- جبر پرداخته و شبه‌نرم و شبه‌نرم جزئی را روی $BCK$- جبر مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل چهارم به مطالعه فضاهای متریک

---

[۱] $Matthews.S.G$

[۲] $Knzi.H.P.A.$

[۳] $Vajner.V.$

[۴] $ONeill.S.J.$

[۵] $Heckmann.R.$

[۶] $Waszkiewicz.P.$

تعمیم یافته و متریک جزئی تعمیم یافته روی $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ پرداخته و مثال‌ها و قضایایی را برای آن‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل پایانی این پایان نامه به معرفی فضاهای شبه‌متریک تعمیم یافته و شبه‌متریک جزئی تعمیم یافته روی $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ پرداخته و مباحثی از آن‌ها را مورد توجه قرار می‌دهیم.

# فصل ۱

# متریک و متریک جزئی

## مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و مباحثی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. قابل ذکر است در سراسر این متن نماد $\mathcal{R}$ معرف مجموعه $\mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ است که در آن $\mathbb{R}^+$ نمایش مجموعه تمام اعداد حقیقی مثبت می‌باشد.

## ۱.۱ متریک

**تعریف ۱.۱.۱** اگر $X$ یک مجموعه ناتهی دلخواه باشد، تابع $d : X \times X \to \mathcal{R}$ را یک متریک روی $X$ می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$، شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = ۰$؛

۲. $d(x, y) = d(y, x)$ ( خاصیت تقارنی)؛

۳. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ( خاصیت نامساوی مثلثی)؛

در این حالت $X$ را یک فضای متریک گفته و آن را با نماد $(X, d)$ نشان می‌دهیم.

**مثال ۲.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه ناتهی و تابع $d : X \times X \to \mathcal{R}$ برای هر $x, y \in X$، به‌صورت

$$d(x,y) = \begin{cases} ۰ & x = y \\ ۱ & x \neq y \end{cases}$$

تعریف شود. به‌وضوح $(X, d)$ یک فضای متریک است.

**تعریف ۳.۱.۱** ۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک $(X, d)$ را به نقطه $x \in X$ همگرا گوییم هرگاه

$$d(x,x) = lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m).$$

۲. دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک $(X,d)$ را کوشی گوییم اگر و تنها اگر

$$lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m).$$

وجود داشته باشد.

**تعریف ۴.۱.۱** فضای متریک $(X,d)$ را کامل گوییم، هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

**مثال ۵.۱.۱** مجموعه اعداد گویا $(Q)$، کامل نیست.

برای اثبات، کافی است نشان دهیم که دنباله‌ای وجود دارد که در $Q$ کوشی است اما همگرا نیست. فرض کنیم

$$a_1 = 2 \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}).$$

به‌وضوح این دنباله، نزولی و از پایین کران‌دار است. دراین‌صورت، دنباله فوق کوشی است، لذا همگراست. حال اگر حد این دنباله $a$ باشد، داریم:

$$a = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a}),$$

ازاین‌رو

$$a^2 = 2.$$

که جواب $a = \sqrt{2}$ قابل قبول است. از طرفی می‌دانیم که جمله‌های این دنباله اعداد گویا هستند اما $\sqrt{2} \notin Q$.

**یادآوری ۶.۱.۱** یک مجموعه ترتیب جزئی روی مجموعه $p$ یک رابطه دوتایی $\leq$ روی $p$ است هرگاه در شرایط انعکاسی، پادتقارنی و متعدی صدق کند. همچنین برای هر دو عنصر $x,y$ از مجموعه مرتب $p$، گوییم $x \geq y$ هرگاه $y \leq x$ باشد.

## ۲.۱ متریک جزئی

در این بخش به معرفی تابع فاصله‌ی متریک جزئی می‌پردازیم و ویژگی‌ها و قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم.

مفهوم متریک جزئی که در سال ۱۹۹۲ توسط ماتیوس [۱۱] معرفی شد، یک فضای متریکی است که در آن فاصله یک نقطه از خودش، لزوماً صفر نیست.

**تعریف ۱.۲.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه ناتهی دلخواه باشد. تابع $p : X \times X \to \mathcal{R}$ را که به ازای هر $x, y, z \in X$، در شرایط زیر صدق می‌کند، -یک متریک جزئی می‌نامیم:

۱. $x = y \quad \Leftrightarrow \quad p\,(x, x) = p\,(x, y) = p\,(y, y)$؛

۲. $p\,(x, x) \leq p\,(x, y)$؛

۳. $p\,(x, y) = p\,(y, x)$؛

۴. $p\,(x, z) \leq p\,(x, y) + p\,(y, z) - p\,(y, y)$؛

در این‌صورت $(X, p)$ را یک فضای متریک جزئی می‌نامیم.

با توجه به تعریف فوق مشخص است که هر فضای متریک یک متریک جزئی است ولی در مثال زیر نشان می‌دهیم که عکس آن لزوماً برقرار نیست.

**مثال ۲.۲.۱** فرض کنیم $X = \{[a, b] : \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b\}$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$p([a, b], [c, d]) = max\{b, d\} - min\{a, c\}.$$

بنابراین $(X, p)$ یک فضای متریک جزئی است. اما چون

$$p([۱, ۲], [۱, ۲]) = max\{۲, ۲\} - min\{۱, ۱\} = ۲ - ۱ = ۱.$$

لذا یک متریک نیست.

**مثال ۳.۲.۱** تابع $p : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ با ضابطه

$$p\,(x, y) = max\{x, y\}.$$

یک متریک جزئی است اما یک متریک نیست.

**تعریف ۴.۲.۱** اگر $p : X \times X \to \mathcal{R}$ یک متریک جزئی باشد، برای هر $\epsilon > 0$ و $x \in X$ مجموعه‌ای به شکل

$$B^p_\epsilon (x) = \{y \in X \mid p(x,y) < \epsilon\}.$$

یک گوی باز به مرکز $x$ و شعاع $\epsilon$ برای متریک جزئی نامیده می‌شود.

ممکن است که بعضی گوی‌های باز متریک جزئی تهی باشند، مثلاً اگر $p(x,x) > 0$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$B^p_{p(x,x)} (x) = \varnothing.$$

**قضیه ۵.۲.۱** مجموعه همه گوی‌های باز از متریک جزئی $p : X \times X \to \mathcal{R}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $X$ است که آن را با $\tau_p$ نشان می‌دهیم.

**اثبات.** برای اثبات کافی است شرایط پایه توپولوژی را بررسی کنیم:

اولا

$$X = \cup_{x \in X} B^p_{p(x,x)+1}(x).$$

ثانیا برای گوی‌های $B^p_\epsilon(x)$ و $B^p_\delta(y)$ داریم:

$$B^p_\epsilon(x) \cap B^p_\delta(y) = \cup\{B^p_\eta(z) \mid z \in B^p_\epsilon(x) \cap B^p_\delta(y)\}.$$

که در آن

$$\eta = p(x,x) + min\{\epsilon - p(x,z), \delta - p(y,z)\}.$$

لذا اثبات تمام است. $\square$

**تعریف ۶.۲.۱** برای هر متریک جزئی $p : X \times X \to \mathcal{R}$، $\leq_p \subseteq X \times X$ یک رابطه دوتایی است هرگاه به ازای هر $x, y \in X$، داشته باشیم:

$$p(x,x) = p(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad x \leq_p y$$

**قضیه ۷.۲.۱** برای هر متریک جزئی $p$، $\leq_p$ یک رابطه ترتیب جزئی است.

**اثبات.** برای اثبات خواص رابطه ترتیب جزئی را بررسی می کنیم.

۱. برای هر $x \in X$ داریم:

$$p\left(x,x\right) = p(x,x).$$

لذا خاصیت انعکاسی $\leq_p$ روی $X$ دارای خاصیت انعکاسی است.

۲. فرض کنیم برای $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$x \leq_p y \quad , \quad y \leq_p x.$$

درنتیجه

$$p\left(x,x\right) = p\left(x,y\right) = p\left(y,y\right).$$

و از شرط (۱) در تعریف متریک جزئی نتیجه می‌گیریم $x = y$، لذا $\leq_p$ خاصیت پادتقارنی دارد.

۳. فرض کنیم برای $x, y, z \in X$، داشته باشیم :

$$x \leq_p y \quad , \quad y \leq_p z$$

درنتیجه

$$p\left(x,x\right) = p\left(x,y\right) \quad , \quad p\left(y,y\right) = p\left(y,z\right).$$

بنا به شرط (۴) از متریک جزئی می‌توان گفت:

$$p\left(x,z\right) \leq p\left(x,y\right) + p\left(y,z\right) - p(y,y),$$

درنتیجه

$$p\left(x,x\right) = p\left(x,z\right).$$

بنابراین $\leq_p$، دارای خاصیت متعدی است. □

فرض کنیم $(X, p)$ یک فضای متریک جزئی و $f : X \to X$ یک نگاشت دلخواه باشد. برای هر $x \in X$، تعریف می‌کنیم:

$$p_f(x,y) = max\{p(x,y), p(x,f(x)), p(y,f(y)), \frac{۱}{۲}[p(x,f(y)) + p(y,f(x))]\}.$$

**لم ۸.۲.۱** فرض کنیم $(X,p)$ یک فضای متریک جزئی و $f : X \to X$ یک نگاشت دلخواه باشد. دراین‌صورت برای هر $x \in X$، داریم:

$$p_f(x, f(x)) = max\{p(x, f(x)), p(f(x), f^{۲}(x))\}.$$

**اثبات.** فرض کنیم $x \in X$ باشد. با توجه به تعریف $p_f(x,y)$ و شرط ۴ تعریف متریک جزئی داریم:

$$\begin{aligned} max\{p(x, f(x)), p(f(x), f^{۲}(x))\} &\leq p_f(x, f(x)) \\ &= max\{p(x, f(x)), p(f(x), f^{۲}(x)), \frac{۱}{۲}[p(x, f^{۲}(x)) + p(f(x), f(x))]\} \\ &\leq max\{p(x, f(x)), p(f(x), f^{۲}(x)), \frac{۱}{۲}[p(x, f(x)) + p(f(x), f^{۲}(x))]\} \\ &= max\{p(x, f(x)), p(f(x), f^{۲}(x))\}. \end{aligned}$$

لذا اثبات تمام است. □

همانند تعاریفی که برای همگرایی و کوشی در فضاهای متریک بیان کردیم، می‌توانیم تعاریف همگرایی و کوشی در فضاهای متریک جزئی را نیز بیان کنیم که برای پرهیز از تکرار آن تعاریف را بیان نمی‌کنیم.

**گزاره ۹.۲.۱** دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک جزئی$(X,p)$ کوشی است اگر و تنها اگر $\{x_n\}$ در فضای متریک $(X, d^s)$ کوشی باشد، که در آن $d^s : X \times X \to \mathcal{R}$ برای هر $x, y \in X$، به‌صورت

$$d^s(x, y) = ۲p(x, y) - p(x, x) - p(y, y).$$

تعریف می‌شود.

**اثبات.** با توجه به مطالب گفته شده، اثبات بدیهی است. □

**لم ۱۰.۲.۱** فرض کنیم $(X,p)$ یک فضای متریک جزئی باشد و دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله همگرا به نقطه $x \in X$ باشد، اگر $lim_{n\to\infty} x_n = x$ و $p(x,x) = ۰$ آن‌گاه برای هر $y \in X$ داریم:

$$lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = p(x, y).$$

**اثبات.** با توجه به شرط ۴ تعریف متریک جزئی داریم:

$$p(x_n, y) \leq p(x_n, x) + p(x, y) - p(x, x) = p(x_n, x) + p(x, y),$$

و از طرفی

$$p(x, y) \leq p(x, x_n) + p(x_n, y) - p(x_n, x_n) \leq p(x_n, x) + p(x_n, y),$$

بنابراین

$$\circ \leq \mid p(x_n, y) - p(x, y) \mid \leq p(x_n, x),$$

لذا

$$lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = p(x, y).$$

درنتیجه حکم برقرار است. $\square$

## ۳.۱ متریک وزن‌دار

**تعریف ۱.۳.۱** یک متریک وزن‌دار روی مجموعه $X$ یک زوج $(d, \omega)$ مشتمل بر متریک $d : X \times X \to \mathcal{R}$ و تابع وزن $\omega : X \to \mathcal{R}$ می‌باشد که این تابع وزن برای هر $x, y \in X$، در شرط زیر صدق می‌کند:

$$d\,(x, y) \geq \omega(x) - \omega(y).$$

**قضیه ۲.۳.۱** برای هر متریک وزن‌دار $(d, \omega)$ روی تابع $X$، تابع $p : X \times X \to \mathcal{R}$ که برای هر $x, y \in X$ به‌صورت

$$p(x, y) = \frac{(\omega(x) + \omega(y) + d(x, y))}{۲}.$$

تعریف می‌شود، یک متریک جزئی است و برای هر $x \in X$ داریم $\omega(x) = p(x, x)$.

**اثبات.**

۱. بنا به شرط اول متریک:

$$\begin{aligned} x = y \Leftrightarrow p(x,y) &= \frac{(\omega(x) + \omega(y) + d(x,y))}{۲} \\ \Leftrightarrow p(x,y) &= \frac{(p(x,x) + p(y,y) + d(x,y))}{۲} \\ \Leftrightarrow p(x,y) &= p(x,x) = p(y,y). \end{aligned}$$

۲. بنا به تعریف متریک وزن‌دار:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{(\omega(x) + \omega(y) + d(x,y))}{۲} \\ &\geq \frac{(\omega(x) + \omega(y) + \omega(x) - \omega(y))}{۲} \\ &= \frac{۲\omega(x)}{۲} \\ &= \omega(x) \\ &= p(x,x). \end{aligned}$$

۳. بنا به شرط دوم متریک:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{p(x,x) + p(y,y) + d(x,y))}{۲} \\ &= \frac{(p(y,y) + p(x,x) + d(y,x))}{۲} \\ &= p(y,x). \end{aligned}$$

۴. بنا به شرط اول و سوم متریک:

$$\begin{aligned} p(x,y) + p(y,z) - p(y,y) &= \frac{(p(x,x) + p(y,y) + d(x,y))}{۲} \\ &+ \frac{(p(y,y) + p(z,z) + d(y,z))}{۲} \\ &+ \frac{(-p(y,y) - p(y,y) - d(y,y))}{۲} \\ &= \frac{(p(x,x) + p(z,z) + d(x,y) + d(y,z))}{۲} \\ &\geq \frac{(p(x,x) + p(z,z) + d(x,z))}{۲} \\ &= p(x,z). \end{aligned}$$