فهرست مندرجات

پیشگفتار

بحث نگاشت های نگه دارنده از جمله مباحثی در ریاضیات است که تحقیقات زیادی پیرامون آن انجام گرفته است و هم اکنون نیز دانشمندان زیادی در شاخه های مختلفی از این مبحث تحقیق می کنند.

نگاشت های نگه دارنده، نگاشت هایی هستند که خواص خاصی مانند طیف، وارون پذیری، جابجایی و ... را حفظ می کنند. از جمله دانشمندانی که در این زمینه تحقیق می کنند می توان به اُپتیت (Aupetit)، شمرل (Semrl)، مولنار (Molnar)، برشر (Bresar)، رجوی (Radjavi) و مختا (Mbekhta) و ... اشاره کرد.

نگاشت های نگه دارنده اولین بار توسط فروبنیوس (Frobenius) مورد مطالعه قرار گرفت. او ثابت کرد نگاشت خطی حافظ طیف ϕ از $M_n(C)$ بروی $M_n(C)$ به یکی از فرمهای $\phi(x) = axa^{-۱}$ یا $\phi(x) = ax^ta^{-۱}$ برای عنصر وارون پذیر مانند a می باشد.

این مسئله توسط دیودن (Dieudonne) با فرض پوشا بودن و $\sigma(\phi(x)) \subseteq \sigma(x)$ برای هر ماتریس $n \times n$ مانند x توسیع داده شد. نتایج مختلفی که از ناگاساوا (Nagasawa)، باناخ (Banach)، استون (Stone)، کادیسون (Kadison)، گلیسون (Gleason)، کاهان (Kahane)، زلاسکو (Zelazko) بدست آمد منجر به مسئله کاپلانسکی (Kaplansky) شد (اگر ϕ یک

نگاشت خطی از جبر باناخ نیم ساده A بروی جبر باناخ نیم ساده B باشد به طوریکه $\phi(۱) = ۱$ و برای هر $x \in A$، $\sigma(\phi(x)) = \sigma(x)$. آیا این درست است که ϕ یکریختی جردن است[2].). با وجود اینکه نتایج زیادی با اضافه کردن شرط هایی به مسئله کاپلانسکی بدست آمده ولی هنوز این مسئله حل نشده باقی مانده است.

چکیده

در این پایان نامه نگاشت های خطی پوشا روی $B(H)$ که حافظ وارون پذیری تعمیم یافته هستند و نیز نگاشت های خطی پوشا حافظ عملگرهای فردهلم (نیمه فردهلم) را بررسی می کنیم به ویژه جوابی برای سوال مختا [۳٦] می یابیم و نشان می دهیم یک فضای باناخ X و یک نگاشت خطی یکانی دو سویی ϕ روی $B(X)$ حافظ وارون پذیری تعمیم یافته در دو سو وجود دارد به طوری که ایده آل همه عملگرهای فشرده روی X تحت ϕ پایا نیست.بعلاوه نشان می دهیم که همریختی های جردن پیوسته تنها نگاشت های خطی یکانی بین دو جبر باناخ یکدار هستند که وارون پذیری تعمیم یافته را اکیداً حفظ می کنند.

واژه‌های کلیدی : فضای هیلبرت ، وارون تعمیم یافته ، عملگر فردهلم (نیمه فردهلم)، همریختی جردن

فصل ۱

مروری بر جبر عملگر ها

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بررسی جبرهای باناخ می‌پردازیم و برخی از تعاریف مقدماتی و قضایا که در فصل های بعدی نیاز داریم را بیان می‌کنیم.

۲.۱ فضای نرمدار

۱.۲.۱ تعریف

فرض کنید X فضای برداری حقیقی (یا مختلط) باشد تابع

$$\| \,.\, \| : X \longrightarrow R^{+} \cup \{\circ\},$$

را یک نرم روی X نامیم هرگاه

الف. $\|x\| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$.

ب. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ به ازای هر $\alpha \in C$ و هر $x \in X$.

ج. $\|x + y\| \le \| x \| + \| y \|$ به ازای هر $x, y \in X$ (نامساوی مثلث).

اگر روی X یک نرم وجود داشته باشد، آنگاه X را یک فضای نرمدار نامیم.

۲.۲.۱ تعریف

فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. گوییم X یک فضای باناخ است هرگاه X نسبت به متر تولید شده بوسیله نرم یعنی برای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = \|x - y\|$ کامل باشد، به عبارت دیگر هر دنباله کشی $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نسبت به متر تولید شده بوسیله نرم همگرا به یک $x \in X$ باشد.

۳.۲.۱ تعریف

فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه و $۱ \le p < \infty$، قرار می‌دهیم

$$L^p(\mu) = \{f : \int_X |f|^p d\mu < \infty \text{ ، اندازه پذیر } f\},$$

اگر $1 \leq p < \infty$، $L^p(\mu)$ با نرم $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$، به ازای هر $f \in L^p(\mu)$ یک فضای باناخ است.

۴.۲.۱ تعریف

تابع اندازه پذیر $f : X \longrightarrow R$ را اساساً کراندار نامیم. هر گاه $M > 0$ وجود داشته باشد بقسمی که تقریباً همه جا $\|f(x)\| \leq M$.

$L^\infty(\mu)$ را گردایه تمام تابع های اندازه پذیر اساساً کراندار می‌گیریم.

۵.۲.۱ تعریف

فرض کنید A یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط C باشد. عمل ضرب روی A را چنین تعریف می کنیم

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(x, y) \longrightarrow xy$$

در این صورت A را یک جبر مختلط می نامیم هرگاه خواص زیر به ازای هر $x, y, z \in A$ و $\lambda \in C$ برقرار باشد.

الف. $x(yz) = (xy)z$.

ب. $x(y+z) = xy + xz$.

ج. $(y+z)x = yx + zx$.

د. $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

هر گاه B زیر فضایی از فضای برداری A باشد بطوریکه $a,b \in B \Longrightarrow ab \in B$
آنگاه B زیر جبری از A است.

۶.۲.۱ قضیه‌استون وایرشتراس [۵۰]

فرض کنید A زیر جبر بسته (نسبت به توپولوژی حاصل از نرم سوپریمم بر $C(X)$) از $C(X)$ باشد به طوری که شامل توابع ثابت بوده و نقاط X را جدا کند. (یعنی برای هر $x,y \in X$ بطوریکه $x \neq y$ $f \in A$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(x) \neq f(y)$) و A خود الحاق باشد، (یعنی اگر $f \in A$ آنگاه $\bar{f}$ یعنی مزدوج f نیز متعلق به A باشد.) آنگاه A در $C(X)$ چگال است یعنی $\bar{A} = C(X)$، در حالت خاص اگر A بسته باشد، آنگاه $A = C(X)$.

۷.۲.۱ قضیه [۴۱]

فرض کنید X یک فضای نرمدار با بعد متناهی روی میدان F از بعد n باشد آنگاه X و F^n یکریخت توپولوژیک هستند.

۸.۲.۱ نتیجه [۴۱]

الف. اگر X یک فضای برداری متناهی البعد باشد آنگاه هر دو نرم روی X معادلند.

ب. هر فضای نرمدار متناهی البعد یک فضای باناخ است.

ج. اگر X یک فضای نرمدار باشد آنگاه هر زیر فضای برداری با بعد متناهی از X بسته است.

د. اگر X یک فضای نرمدار با بعد متناهی باشد آنگاه هر زیر مجموعه بسته و کراندار

X فشرده است.

۹.۲.۱ نتیجه [۴۱]

فرض کنید X یک فضای نرمدار با بعد متناهی باشد و Y یک فضای نرمدار باشد اگر $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد آنگاه T پیوسته است.

۳.۱ عملگرهای خطی

در قضیه زیر مشخصه‌ای برای پیوستگی یک عملگر خطی از فضای نرمدار X به فضای نرمدار Y ارائه می‌کنیم.

۱.۳.۱ قضیه [۵۰]

فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار و $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند.

الف. T پیوسته است.

ب. T در یک نقطه پیوسته است.

ج. T در صفر پیوسته است. یعنی اگر $x_n \longrightarrow ۰$ آنگاه $Tx_n \longrightarrow ۰$.

د. $\overline{T(B_۱)}$ در Y کراندار است.

ه. عدد حقیقی K وجود دارد بقسمی که به ازای هر $x \in X$, $\|Tx\| \leq K \|x\|$.

۲.۳.۱ تعریف

فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد. T را کراندار گوییم، اگر عدد $K > ۰$ وجود داشته باشد ، بقسمی که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم، $\|Tx\| \leq K \|x\|$ در این صورت K یک کران، برای T محسوب می‌شود.

۳.۳.۱ نتیجه [۵۰]

اگر X و Y دو فضای نرمدار $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد. آنگاه T کراندار است، اگر و تنها اگر T پیوسته باشد.

۴.۳.۱ قضیه [۵۰]

مجموعه $B(X, Y)$ متشکل از تمام عملگرهای خطی کراندار از فضای نرمدار X به فضای نرمدار Y با جمع و ضرب اسکالر نقطه وار و نرم

$$\|T\| := sup\{\, \|Tx\| : \quad \|x\| \leq ۱\},$$

یک فضای نرمدار است. بعلاوه، اگر Y یک فضای باناخ باشد آنگاه $B(X, Y)$ با نرم مذکور یک فضای باناخ است و بالاخره به ازای هر $x \in X$ ، $\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|$.

۵.۳.۱ قضیه گراف بسته [۵۰]

اگر X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی با نمودار بسته باشد. آنگاه T پیوسته است.

۶.۳.۱ قضیه نگاشت وارون [۵۰]

اگر X و Y دو فضای باناخ و $T \in B(X,Y)$ باشد. اگر T یک به یک و پوشا نیز باشد، آنگاه T^{-1} نیز کراندار و در نتیجه T همانسانی است.

۷.۳.۱ قضیه نگاشت باز [۴۹]

فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی، پوشا و پیوسته باشد. اگر O زیر مجموعه‌ای باز در X باشد، آنگاه $T(O)$ در Y باز است. بعلاوه اگر T یک به یک باشد آنگاه T یک همانسانی است (قضیه نگاشت وارون)، لذا T مجموعه‌های باز X را به مجموعه‌های باز Y می‌برد.

۸.۳.۱ تعریف

فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند و u گوی یکه باز در X باشد نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ فشرده است اگر بست $\overline{T(u)}$ در Y فشرده باشد.

۹.۳.۱ قضیه [۱]

اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و $K \in B(X,Y)$ یک عملگر فشرده‌با برد بسته باشد آنگاه K رتبه متناهی است.

۴.۱ جبر باناخ

۱.۴.۱ تعریف

یک جبر باناخ مختلط عبارت است از یک جبر A روی C بقسمی که :

الف. A یک فضای باناخ باشد.

ب. به ازای هر $x, y \in X$ ، $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$،

ج. جبر باناخ A را یکدار نامیم اگر A شامل عنصر همانی e باشد،

بقسمی که $\| e \| = ۱$ و $ex = xe = x$ برای هر $x \in A$.

همچنین جبر باناخ A را جابجایی گوییم، هر گاه $xy = yx$ برای هر $x, y \in A$.

۲.۴.۱ تعریف

جبرهای باناخ بدون یکه را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه تمام زوج های مرتب (x, a) باشد که $x \in A$ و $a \in C$.

$\tilde{A}$ با اعمال خطی که به طور مولفه‌ای تعریف شده‌اند یک فضای برداری است.

عمل ضرب را در $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$(x, a)(y, b) = (xy + ay + bx, ab)$ و نرم روی $\tilde{A}$ به این صورت تعریف می‌کنیم.

$||(x, a)|| = ||x|| + |a|$. $\tilde{A}$ یک جبر باناخ با یکه $(۰, ۱) = ۱$ می‌باشد. نگاشت $x \longrightarrow (x, ۰)$ یک یکریختی ایزومتریک از A بروی زیر فضای بسته (در حقیقت یک ایده‌آل دو طرفه بسته) $\tilde{A}$ است. $\tilde{A}$ را یکدار شده A نامیم.

۳.۴.۱ مثال

$C(X)$ مجموعه همه توابع پیوسته روی فضای هاسدورف وفشرده X با نرم سوپریمم یک جبر باناخ جابجایی یکدار است.

۴.۴.۱ مثال

فرض کنید X یک فضای باناخ مختلط باشد و در $B(X)$ ضرب دو عضو را ترکیب آنها تعریف کنیم. به آسانی می‌توان دید که $B(X)$ یک جبر باناخ است و عملگر همانی I یکه ضربی است.

۵.۴.۱ قضیه [۴۹]

عمل ضرب در هر جبر باناخ A تابعی تواماً پیوسته از $A \times A$ به A است. به عبارت دیگر هر گاه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ دو دنباله در A باشند به قسمی که $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$، آنگاه $x_n y_n \longrightarrow xy$.

۶.۴.۱ تعریف

فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط باشد. $x \in A$ را وارون پذیر گوییم، اگر $y \in A$ وجود داشته باشد، بقسمی که $xy = yx = e$ و y را با x^{-1} نشان می‌دهیم و آن را وارون x می‌نامیم.

مجموعه ی تمام عناصر معکوس پذیر A را با $G(A)$ یا A_{inv} نشان می دهیم. اگر

$x,y \in G(A)$ آنگاه $y^{-1}x$ وارون $x^{-1}y$ است. بنابراین $G(A)$ یک گروه ضربی است.

۷.۴.۱ قضیه [۵]

فرض کنید A جبر باناخ مختلط باشد، $x \in A$ و $\|x\| < 1$. در این صورت $(1-x) \in A_{inv}$ و

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ .$$

۸.۴.۱ قضیه [۵]

فرض کنید A جبر باناخ مختلط باشد و a معکوس پذیر باشد . اگر $\|x-a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$، آنگاه $x \in A$ معکوس پذیر است و بعلاوه نگاشت $x \to x^{-1}$ یک همانریختی از A_{inv} بروی A_{inv} است.

۹.۴.۱ قضیه [۵]

هرگاه A یک جبر باناخ مختلط باشد، آنگاه A_{inv} یک زیر مجموعه ی باز از A است.

۵.۱ همریختی های مختلط

از جمله نگاشت های مهم از یک جبر باناخ به توی دیگری همریختی ها می باشند. این ها نگاشت های خطی h اند که ضربی نیز هستند:

$$h(xy) = h(x)h(y),$$

حالتی که در آن برد ساده ترین جبر باناخ یعنی خود C است، اهمیت خاصی دارد.

۱.۵.۱ تعریف

فرض کنیم A یک جبر مختلط و ϕ یک تابعی خطی بر A باشد که متحد صفر نیست. هرگاه به ازای هر $x, y \in A$،

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y),$$

آنگاه ϕ یک همریختی مختلط بر A نام دارد.

۲.۵.۱ لم [۴۹]

هرگاه ϕ یک همریختی مختلط بر جبر مختلط A با یکه ی ۱ باشد آنگاه $\phi(1) = 1$ و به ازای هر $x \in A$ معکوس پذیر، $\phi(x) \neq 0$.

۳.۵.۱ قضیه (گلیسون (Gleason) — کاهان (Kahane) — زلاسکو (Zelazko)) [۳۲]

هرگاه ϕ یک تابعی خطی بر جبر باناخ A باشد به طوریکه $\phi(1) = 1$ و به ازای هر $x \in A$ معکوس پذیر $\phi(x) \neq 0$، آنگاه

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad (x, y \in A).$$

۴.۵.۱ قضیه [۴۱]

هرگاه ϕ یک تابعی خطی ضربی روی جبر باناخ A باشد، آنگاه $\|\phi\| = ۱$.

۶.۱ طیف و شعاع طیفی

۱.۶.۱ تعریف

فرض کنید A جبر باناخ و $x \in A$ باشد. طیف x را با $\sigma(x)$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sigma(x) := \{\lambda \in C : \quad \lambda ۱ - x \notin A_{inv}\}$$

به عبارت دیگر $\sigma(x)$ مجموعه تمام اعداد مختلط λ است بقسمی که $\lambda ۱ - x$ معکوس پذیر نباشد. متمم $\sigma(x)$ رابا $\rho(x)$ نشان می دهیم و آنرا مجموعه حلال x نامیم. (تا پایان این مجموعه σ، نشان طیف است.)

۲.۶.۱ مثال

اگر $A = C(X)$ که X فضای هاسدورف فشرده است آنگاه $\sigma(f) = f(X)$ برای هر f متعلق به A.

۳.۶.۱ مثال

اگر X فضای باناخ مختلط و $T \in B(X)$ باشد آنگاه

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C : Ker(T - \lambda I) \neq \{0\} \quad or \quad R(T - \lambda I) \neq X\}$$

بنابراین

$$\rho(T) = C - \sigma(T) = \{\lambda \in C : \text{دوسویی } (T - \lambda I)\},$$

زیرا اگر $\lambda \in \rho(T)$، Sای متعلق به $B(X)$ وجود دارد بقسمی که

$$S(T - \lambda I) = (T - \lambda I)S = I,$$

و لذا $T - \lambda I$ دو سویی است. از طرف دیگر اگر $T - \lambda I$ دو سویی باشد آنگاه $(T - \lambda I)^{-1} \in B(X)$ (قضیه نگاشت وارون).

۴.۶.۱ مثال

اگر $A = M_n(C)$ ، دراین صورت به ازای هر $T \in A$ ، $\sigma(T)$ همان مجموعه مقادیر ویژه ماتریس T است.

۵.۶.۱ قضیه [۳۷]

فرض کنید a عضوی از جبر یکدار A باشد و $p \in C[z]$ ($C[z]$ ، مجموعه تمام چند جمله‌ایها با متغیر z و ضریب مختلط) آنگاه $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

۶.۶.۱ تعریف

اگر A یک جبر باناخ و $x \in A$ باشد، آنگاه شعاع طیفی x را با $r(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$r(x) := sup\{\,|\lambda| \;:\; \lambda \in \sigma(x)\},$$

در حقیقت $r(x)$ شعاع کوچکترین قرص بسته به مرکز صفر در C است که شامل $\sigma(x)$ است. (تا پایان این مجموعه r نشان دهنده ی شعاع طیفی است.)

۷.۶.۱ قضیه[۳۹]

اگر x عضوی از جبر باناخ A باشد، آنگاه

الف. طیف $\sigma(x)$ از x فشرده و ناتهی است، و

ب. شعاع طیفی $r(x)$ از x در

$$r(x) = inf_{n\in N}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

صدق می کند.

این قضیه برای حالت حقیقی برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید.

۸.۶.۱ مثال

اگر $A = M_{۲\times۲}(R)$ (جبر حقیقی ماتریسها(۲ × ۲) با درایه های حقیقی) $T = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \in A$ آنگاه $\sigma(T) = \phi$. در حقیقت شرایط لازم و کافی برای آنکه