بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

تابعکهای خطی ضربی روی جبرهای باناخ و توابع تام

نگارش:

گالیا رزم آرا

استاد راهنما:

دکتر فرشته سعدی

دی ۱۳۸۱

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیئت داوران نسخه نهایی پایان نا مه خانم **گالیا رزم آرا**تحت عنوان:**تابعکهای خطی روی جبرهای با ناخ وتوابع تام** را از نظر فرم محتوا بررسی نموده وآنرا برای اخذ درجه کارشناسی ارشد مورد تایید قرار دادند.

اعضای هیات داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکترفرشته سعدی	استادیار	
۲-استاد مشاور			
۳- استادناظر	دکترسید مسعود امینی	استادیار	
۴- استاد ناظر	دکتر حکیمه ماهیار	استادیار	
۵-نمایننده تحصیلات تکمیلی	دکترمجتبی منیری	استادیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی محض است که در سال ۱۳۸۱ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر نسیمی، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ــــــ و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ــــــ از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶ اینجانب گلاله یزدی کار دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام‌خانوادگی: گلاله یزدی کار

تاریخ و امضا:

۸۲/۲/۱۷

این ناچیز را تقدیم می کنم به
پدر و مادر فداکارم که تا ابد بنده محبتهایشان
هستم و همسر عزیزم که صبورانه یاریم کرد.

با سپاس از یکتای عالم که انجام این مهم بی اذن او ممکن نبود وبا تشکر از استاد صبورم سرکار خانم دکتر سعدی ،امیدهای زندگیم (پدر و مادر عزیزم) که در سایهٔ حمایت آنها رشد یافتم و همسر مهربانم که این موفقیت با وجود او شیرین شد.

چکیده

فرض کنیم A یک جبر باناخ مختلط یکدار با یکهٔ e باشد و T تابعک خطی (نه لزوماً پیوسته) روی A و F نیز تابعی تام باشد. در این پایان نامه تعمیمهایی از قضیه گلیسون - کاهان - زلاسکو ارائه می‌شود. بخصوص با در نظر گرفتن $T\ \ oF$ نشان داده می‌شود تحت شرایط خاصی T ضربی خواهد بود. مهمترین نتایج در این زمینه به شرح زیر می‌باشد.

الف) اگر φ تابع مختلط مقدار و پیوسته روی A و F یک تابع تام غیرخطی باشد به گونه ای که $ToF = Fo\varphi$ و $T(e) = 1$ آنگاه T ضربی است.

ب) اگر F غیرثابت، $T(e) = 1$ و $ToF: A\to ¢$ غیرپوشا باشد، آنگاه T ضربی است.

مطالب اصلی این پایان نامه براساس مقاله‌های زیر است:

i) Jarosz, K., Multiplicative functionals and entire functions, Studia Math. 119 (1996), 289-297.

ii) Jarosz, K., Multiplicative functionals and entire functions, II, Studia Math. 124 (1997), 193-198.

واژگان کلیدی: تابعکهای خطی ضربی ، قضیه گلیسون - کاهان - زلاسکو

فهرست مطالب

چکیده الف

مقدمه ج

فصل اول ـ مقدمات و مفاهیم مورد نیاز ۱

۱-۱ توابع تحلیلی و برخی از خواص آنها ۲

۱-۲ جبرهای باناخ ۱۱

۱-۳ جبرهای باناخ و توابع تحلیلی ۱۸

۱-٤ جبرهای یکنواخت ۲۱

فصل دوم ـ ضربی بودن تابعکهای خطی ۲٤

۲-۱ قضیه گلیسون ـ کاهان ـ زلاسکر و صورتهای معادل آن ۲٤

۲-۲ تعمیمهایی از قضیه گلیسون ـ کاهان ـ زلاسکو ۲۹

فصل سوم ـ تابعکهای خطی ضربی و توابع تام ٤٦

۳-۱ شناسایی تابعکهای خطی ضربی توسط توابع تام غیرخطی ٤۷

۳-۲ تابعکهای خطی که ترکیبشان با یک تابع تام غیرپوشاست ٦٤

منابع ۷٥

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۷

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۹

مقدمه

در سال ۱۹٦۷ گلیسون[1] [۸] و در سال ۱۹٦۸ کاهان[2] و زلاسکو[3] [۱۲] به طور مستقل ثابت کردند که اگر A یک جبر باناخ جابجایی و یکدار و M یک زیر فضای از هم بعد یک A باشد، آنگاه M یک ایده‌آل ماکسیمال A است اگر و تنها اگر شامل هیچ عضو وارون‌پذیری نباشد یا به طور معادل هر تابعک خطی مانند T روی A با شرایط $T(x) \neq 0$ برای هر عضو وارون پذیر x و $T(e) = 1$، ضربی است. سپس زلاسکو [۲۰] شرط جابجایی بودن را از قضیه فوق برداشت و نتیجه به حالت کلی‌تری تعمیم داده شد.

در واقع در این مقالات نتیجهٔ قویتری به شرح زیر ثابت شد: هرگاه T یک تابعک خطی روی جبر باناخ مختلط A با یکهٔ e باشد طوری که $T(e) = 1$ و $T(\exp x) \neq 0$ برای $x \in A$ و یا به طور معادل $T(\exp x) = \exp(\varphi(x))$ که φ تابعی است مختلط مقدار روی A، آنگاه T ضربی است.

در سال ۱۹۸۷ آرنز[4] [۱] این سئوال را مطرح کرد که آیا می‌توان به جای تابع نمایی در

---

۱. Gleason
۲. Kahane
۳. Zelazko
٤. Arens

قضیه فوق هر تابع تام دیگری مانند F را قرار داد؟ یعنی آیا اگر برای هر $x \in A$، $T(F(x))$ در برد F قرار داشته باشد یا به طور معادل $ToF=Fo\varphi$ که در آن φ تابعی است مختلط مقدار روی A، می توان نتیجه گرفت T ضربی است؟

خود وی با مثال سادهای نشان داد که جواب در حالت کلی که φ ممکن است ناپیوسته باشد منفی است. سپس حدس خود را تصحیح کرده و شرط پیوستگی φ را نیز اضافه کرد. آرنز در مقالهٔ خود نشان داد هرگاه F چندجمله ای با درجه بزرگتر از یک یا A یک جبر یکنواخت باشد، شرایط بالا ضربی بودن T را نتیجه می‌دهد. فصل اول پایان نامه اختصاص به مفاهیم و مقدمات مورد نیاز دارد و در فصل دوم به نتایج اشاره شده در بالا با جزئیات بیشتری خواهیم پرداخت.

پس از آن در سال ۱۹۹٦ یاروش[1] [۱۰] نتیجه بالا را به شکل زیر تعمیم داد:

اگر A یک جبر باناخ مختلط یکدار با یکهٔ e و T و φ تابعهای مختلط پیوسته روی A باشد به طوری که T خطی است و به علاوه F یک تابع تام غیرخطی باشد به گونه ای که $ToF = Fo\varphi$ و $T(e) = 1$، آنگاه T ضربی است.

در سال ۱۹۹۷، تعمیم دیگری از این قضیه بازهم توسط یاروش [۱۱] ارائه شد:

"اگر A یک جبر باناخ مختلط یکدار با یکهٔ e ، F یک تابع تام غیرثابت و T تابعک خطی با شرط $T(e) =1$ به گونه ای باشد که $ToF: A \to \mathbb{C}$، غیرپوشا است ،آنگاه T ضربی است."

در فصل سوم به این دو مقاله خواهیم پرداخت.

---

1. Jarosz

فصل اول

مقدمات و مفاهیم مورد نیاز

۱-۱ توابع تحلیلی و برخی از خواص آنها

در این بند علاوه بر معرفی توابع تحلیلی و تام به برخی از خواص آنها و چند قضیـــه در این زمینه که در فصول بعد نیاز خواهیم داشت، اشاره می‌کنیم.

۱-۱-۱- **تعریف**. فرض کنیم f یک تابع مختلط مقدار باشد که روی زیر مجموعـهٔ بـاز Ω از $\mathbb{C}$ تعریف شده است. اگر $z_0 \in \Omega$ و

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

موجود باشد این حـد را بـا $f'(z_0)$ نمـایش می‌دهیـم و آن را مشـتق f در z_0 می‌نـامیم. اگر $f'(z_0)$ برای هر $z_0 \in \Omega$ وجـود داشـته باشـد آنـگاه f روی Ω تحلیلـی نـامیده می‌شـود. مجموعهٔ همهٔ توابع تحلیلی روی Ω با $H(\Omega)$ نمایش داده می‌شود که با عمل جمع و ضـــرب معمولی توابع تشکیل یک جبر می‌دهد.

توابعی که روی $\mathbb{C}$ تحلیلی باشند تام نامیده می‌شوند. به عنوان مثال چند جملـه ایـهاروی $\mathbb{C}$ تام‌اند.

۱-۱-۲- **قضیه**.[قضیه ۱۰.۱۶ ، ۱۷] برای هر زیر مجموعهٔ باز Ω در $\mathbb{C}$، هر $f \in H(\Omega)$ در Ω دارای نمایش سری توانی است.

۱-۱-۳- **نتیجه**. [صفحه ۲۰۸، ۱۷] برای هر زیر مجموعهٔ باز Ω در $\mathbb{C}$ ، اگر $f \in H(\Omega)$ آنگاه $f' \in H(\Omega)$.

۱-۱-۴- **تعریف**. هرگاه G زیر مجموعهٔ همبند $\mathbb{C}$ باشد و $\gamma_1 : [0, 1] \to G$ و γ_0 دو منحنی با طول متناهی باشند به طوری که $\gamma_1(0) = \gamma_0(0) = a$ و $\gamma_1(1) = \gamma_0(1) = b$ گوییم γ_0 و γ_1 باهم هموتوپ هستند هرگاه نگاشت پیوسته‌ای مانند $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \to G$ وجود داشته باشد که

$$\Gamma(s, 0) = \gamma_0(s) \qquad \Gamma(s, 1) = \gamma_1(s)$$
$$\Gamma(0, t) = a \qquad \Gamma(1, t) = b$$

برای $0 \le s\,,\ t \le 1$.

۱-۱-۵- **تعریف**. زیر مجموعهٔ همبند G از $\mathbb{C}$ همبند ساده نامیده می‌شود هرگاه هر منحنی بسته در G با صفر هموتوپ باشد. به عنوان مثال هر ناحیه (مجموعه باز و همبند) محدب G در $\mathbb{C}$ همبند ساده است. زیرا هرگاه γ_0 یک منحنی بسته در G باشد و $z_1 \in G$ کافی است تعریف کنیم $\Gamma(s, t) = (1 - t)\gamma_0(s) + tz_1 \ ,\ 0 \le s,t \le 1$.

۱-۱-۶- **قضیه** (فرمول انتگرال کشی) . هرگاه f بر ناحیهٔ Ω تحلیلی و $\overline{B}(a, r) \subseteq \Omega$ و $z_0 \in B(a, r)$ آنگاه

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad (n\in \mathbb{N})$$

منظور از ناحیه، مجموعهٔ باز و همبند می‌باشد.

۱-۱-۷- **قضیه**. [قضیه ۱۰.۱٤ ، ۱۷] فرض کنیم Ω ناحیه‌ای در $\mathbb{C}$ باشد و $f\in H(\Omega)$ و $\overline{B}(a,r)\subseteq \Omega$. آنگاه

$$|f(a)|\leq \max_{\theta}|f(a+re^{i\theta})|.$$

تساوی در رابطه بالا اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر f روی Ω ثابت باشد.

بنابراین $|f|$ در هیچ نقطه از Ω ماکزیمم موضعی ندارد مگر اینکه f ثابت باشد.

۱-۱-۸- **قضیه لیوویل**[1]. [قضیه ۱۰.۲۳ ، ۱۷] اگر f تابع تام کراندار باشد آنگاه f ثابت است.

۱-۱-۹- **تذکر**. [صفحه ۲۱٤ ، ۱۷] اگر Ω ناحیه‌ای در $\mathbb{C}$ باشد و $f\in H(\Omega)$ آنگاه $f(\Omega)$ یا یک ناحیه است یا یک نقطه.

۱-۱-۱۰- **قضیه**. [قضیه ۱۰.۳۰ ، ۱۷] فرض کنیم Ω ناحیه‌ای در $\mathbb{C}$ و $\varphi\in H(\Omega)$ و $z_0\in\Omega$ به طوری که $\varphi'(z_0)\neq 0$ آنگاه Ω شامل همسایگی V از z_0 است به طوری که

الف) φ روی V یک به یک است.

ب) $W=\varphi(V)$ مجموعه‌ای باز است.

ج) اگر $\psi: W\to V$ به این صورت تعریف شود $\psi(\varphi(z))=z$ آنگاه $\psi\in H(W)$.

1. Liouville

بنابراین $\varphi: V\to W$ وارون تحلیلی دارد.

۱-۱-۱۱- **قضیه**. [قضیه ۱۰.۳۳ ، ۱۷] فرض کنیم Ω ناحیه‌ای در $\mathbb{C}$ و $f\in H(\Omega)$ و f روی Ω یک به یک باشد. آنگاه $f'(z)\neq 0$ برای هر $z\in\Omega$ و وارون f تحلیلی است.

۱-۱-۱۲- **تعریف**. تابع تحلیلی f روی زیر مجموعهٔ باز U از $\mathbb{C}$ یک یکریختی تحلیلی نامیده می‌شود اگر $f(U)=V$ باز باشد و تابع تحلیلی $g:V\to U$ وجود داشته باشد به طوری که f و g وارون یکدیگر باشند.

۱-۱-۱۳- **تعریف**. هر گاه f تابعی تام باشد با بسط سری توانی $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ و $R>0$ آنگاه $M_f(R)$ و $\mu_f(R)$ به این صورت تعریف می‌شوند:

$$M_f(R)=\max\{|f(z)|: |z|=R\}$$
$$\mu_f(R)=\max\{|a_n|R^n : n=1, 2, \ldots\}$$

با توجه به قضیه ۱-۱-۷ واضح است که برای هر $z\in\mathbb{C}$ که $|z|\leq R$ داریم:

$$|f(z)|\leq M_f(R)$$

۱-۱-۱۴- **قضیه**. [قضیه ۳.۱۳ ، ٤] فرض کنیم $0<R_1<R_2<\infty$ و f تابع تحلیلی روی $\{z\in\mathbb{C} : R_1<|z|<R_2\}$ باشد. اگر $R_1<r<R_2$ آنگاه برای $R_1<r_1\leq r\leq r_2<R_2$ داریم:

$$\log M(r)\leq\frac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_1)+\frac{\log r-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_2)$$

به عبارت دیگر $\log M(r)$ یک تابع محدب از $\log r$ است.