فصل اول

مقدمه

تعریف ۱. ۱. ۱ :

یک مجموعه غیر تهی همراه با دو عملگر $\vee$, $\wedge$ روی L را یک مشبکه نامند اگر در شرایط زیر صدق کنند :

خاصیت جابجایی

L_1) $x \vee y = y \vee x$

L_1') $x \wedge y = y \wedge x$

خاصیت شرکت پذیری :

L_2) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

L_2') $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

خاصیت جذب :

L_3) $x \wedge (x \vee y) = x$

L_3') $x \vee (x \wedge y) = x$

خاصیت خود توانی :

L_4) $x \vee x = x$

L_4') $x \wedge x = x$

تعریف ۲ . ۱ . ۱ :

یک رابطه دوتایی $\leq$ تعریف شده روی یک مجموعه A را یک رابطه ترتیب جزیی روی مجموعه A گویند هر گاه در شرایط زیر صدق کند :

خاصیت انعکاسی $1 . a \leq a$

خاصیت پاد متقارن $2 . a \leq b \;,\; b \leq a \;\Rightarrow\; a = b$

خاصیت تعدی $3 . a \leq b \;,\; b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$

و اگر شرط ۴ برای هر $a , b \in A$ برقرار باشد یعنی :

خاصیت تقارنی $4 . a \leq b \;\; or \;\; b \leq a$

سپس می گوییم $\leq$ یک رابطه ترتیب کلی روی A می باشد .

در حالت کلی اگر رابطه ترتیب جزیی روی یک مجموعه غیر تهی برقرار باشد به ان یک مجموعه ترتیب جزیی یا به طور خلاصه یک $poset$ می گویند.

باز اگر رابطه ترتیب کلی روی یک مجموعه غیر تهی برقرار باشد به ان یک مجموعه ترتیب کلی یا یک مجموعه ترتیب خطی یا یک زنجیر گویند .

تذکر :

در یک $poset$ عبارت $\mathrm{a} < \mathrm{b}$ به این معنیست که $a \leq b$ اما $a \neq b$.

تعریف ۳ . ۱ . ۱ :

فرض کنید A یک زیر مجموعه از یک $poset$ باشد . یک عنصر $p \in P$ را یک کران بالا برای A نامند اگر $a \leq p$, برای هر $a \in A$.

و یک عنصر $p \in P$ را کوچکترین کران بالا از A یا $\sup remum$ از A گویند اگر :

۱. p یک کران بالا از A باشد .

۲. $p \le b$ برای هر کران بالای b از A .

و به طور مشابه یک عنصر $p \in P$ را بزرگترین کران بایین یا $\inf imum$ از A تعریف می کنیم .

تعریف ۴ . ۱ . ۱ :

یک $poset$ $(L, \le)$, یک مشبکه است اگر و فقط اگر برای هر $a, b \in L$ هر دو $\sup\{a, b\}$ و $\inf\{a, b\}$ در L وجود داشته باشد .

اکنون ساختار رابطه ترتیب را تعریف می کنیم :

A) اگر L یک مشبکه با تعریف ۱ . ۱ . ۱ باشد , سپس رابطه $\le$ را روی L به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$a \le b \quad \text{if and only if} \quad a = a \wedge b$$

B) اگر L یک مشبکه با تعریف ۴ . ۱ . ۱ باشد , سپس عملگرهای $\vee$, $\wedge$ را روی L به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$a \wedge b = \inf\{a, b\} \quad \text{و} \quad a \vee b = \sup\{a, b\}$$

لم ۵ . ۱ . ۱ :

یک مشبکه L , صدق می کند در D_1 اگر و فقط اگر ان صدق کند در D_2 :

$$D_1)\ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$D_2)\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

اثبات :

فرض کنیم D_1 برقرار باشد , سپس :

$$
\begin{aligned}
a \vee (b \wedge c) &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) && (by\ L_3') \\
&= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) && (by\ L_2) \\
&= a \vee ((c \wedge a) \vee (c \wedge b)) && (by\ L_1') \\
&= a \vee (c \wedge (a \vee b)) && (by\ D_1) \\
&= a \vee ((a \vee b) \wedge c)) && (by\ L_1') \\
&= (a \wedge (a \vee b)) \vee ((a \vee b) \wedge c) && (by\ L_3) \\
&= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) && (by\ L_1') \\
&= (a \vee b) \wedge (a \vee c) . && (by\ D_1)
\end{aligned}
$$

بنابراین D_2 نیز برقرار است .

به طور مشابه اگر D_2 برقرار باشد حتما D_1 نیز برقرار است .

تعریف ۶ . ۱ . ۱ :

یک مشبکه پخش پذیر است اگر در شرایط D_1 و D_2 در لم ۵ . ۱ . ۱ صدق کند .

تعریف ۱.۲.۱ :

یک جبر تشکیل شده از هر جفت $\beta = \left(B , \left(O_{\xi} \right)_{\xi \in \psi} \right)$ که B یک مجموعه غیر تهی و برای هر $\xi \in \psi \neq \varnothing$, که O_{ξ} یک عملگر n- تایی روی B است .

برای هر نگاشت از B^{m} به داخل B برای بعضی $m = 0 , 1 , 2 , \ldots$.

به خصوص اگر $m = 0$ با تعریفی که از عملگرهای n- تایی کردیم :

به این معنی است که یک عنصر ثابت $O_{\xi} \in A$.

در حالت کلی که $\psi = \left\{ 1 , 2 , \ldots , m \right\}$, جبر را به صورت زیر ملاحظه می کنیم :

$$B = \left(\beta , O_1 , O_2 , \ldots O_m \right) .$$

فصل دوم

جبر استلزامی مشبکه ای

تعریف ۱.۲ :

یک مشبکه کراندار $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$, همراه با ترتیب معکوس روی عملگر $''\ '\ ''$ و عملگر دو تایی $''\to''$ که در اصول زیر صدق می کند :

C_1) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$

C_2) $x \to x = 1$

C_3) $x \to y = 1 = y \to x \Leftrightarrow x = y$

C_4) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$

C_5) $x \to y = y' \to x'$

$C6$) $(x \wedge y) \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$

C_7) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$

برای همه $x, y, z \in L$.

تعریف ۲.۲ :

جبر استلزامی مشبکه ای را یک جبر H- استلزامی مشبکه ای گویند اگر در رابطه زیر صدق کند

$x \vee y \vee ((x \wedge y) \to z) = 1$.

برای هر $x, y, z \in L$.

تعریف ۲.۳ :

رابطه $''\leq''$ به وضوح یک ترتیب روی جبر استلزامی مشبکه ای می باشد .که به صورت زیر تعریف شده است :

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; x \to y = 1$$

قضیه ۲.۴ :

در یک جبر استلزامی مشبکه ای L با رابطه ترتیب $''\leq''$, گزاره های زیر برقرارند :

1 . $0 \to x = 1$, $1 \to x = x$, $x \to 1 = 1$

2 . $x' = x \to 0$

3 . $x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z)$

4 . $x \vee y = (x \to y) \to y$

5 . $\left((y \to x) \to y'\right)' = x \wedge y = \left((x \to y) \to x'\right)'$

6 . $x \leq y \;\Rightarrow\; (y \to z) \leq (x \to z)$

$,(z \to x) \leq (z \to y)$

7 . $x \leq (x \to y) \to y$.

8 . $(x')' = x$

9 . $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

10 . $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

در یک جبر H – استلزامی مشبکه ای شرط های زیر برقرارند :

$$11.\ x \to (x \to y) = x \to y$$

$$12.\ x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)\ .$$

اثبات :

۱. چون $x \le 0$ بنا به تعریف ترتیب داریم : $0 \to x = 1$

ثابت می کنیم : $x \to 1 \overset{?}{=} 1$

چون $x \le 1$ بنا به تعریف ترتیب داریم : $x \to 1 = 1$

۲. ثابت می کنیم که : $x' \overset{?}{=} x \to 0$. اما طبق رابطه ۱ داریم : $1 \to x = x$ پس

$$x \to 0 \overset{c_5}{=} 0' \to x' = 1 \to x' = x' \ \Rightarrow\ x \to 0 = x'\ .$$

۳. باید رابطه زیر را ثابت کنیم :

$$x \to y \overset{?}{\le} (y \to z) \to (x \to z)$$

طبق تعریف اتخاذ شده روی رابطه ترتیب "$\le$" داشتیم : $x \le y \ \Leftrightarrow\ x \to y = 1$

باید ثابت شود :

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \overset{?}{=} 1$$

برای اثبات گزاره بالا ابتدا رابطه زیر را ثابت می کنیم :

$$(x \to z) \to (x \to y) \overset{?}{=} (z \to x) \to (z \to y)$$

اثبات :

$$(x \to z) \to (x \to y) = x \to ((x \to z) \to y)$$

$$\overset{c_5}{=} x \to (y' \to (x \to z)')$$

$$\overset{c_1}{=} y' \to (x \to (x \to z)').$$

$$\overset{c_5}{=} y' \to ((z' \to x') \to x')$$

$$\overset{c_4}{=} y' \to ((x' \to z') \to z')$$

$$\overset{c_1}{=} (x' \to z') \to (y' \to z')$$

$$\overset{c_5}{=} (z \to x) \to (z \to y)$$

$$\Rightarrow (x \to z) \to (x \to y) = (z \to x) \to (z \to y) \quad (I)$$

حال با استفاده از رابطه بالا شرط ۳ را ثابت می کنیم :

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \overset{?}{=} 1$$

$$(y \to z) \to (x \to z) = (z' \to y') \to (z' \to x')$$

$$\overset{(I)}{=} (y' \to z') \to (y' \to x')$$

$$= (z \to y) \to (x \to y)$$

$$(y \to z) \to (x \to z) = (z \to y) \to (x \to y) \quad (II)$$

پس می توان نوشت :

$$(x \to y) \to ((z \to y) \to (x \to y))$$

$$\overset{c_1}{=} ((z \to y) \to ((x \to y) \to (x \to y))$$

$$= (z \to y) \to 1$$

$$= 1$$

نتیجه می گیریم که :

$$x \to y \le (z \to y) \to (x \to y) \overset{(II)}{=} (y \to z) \to (x \to z)$$

$$\Rightarrow \; x \to y \le (y \to z) \to (x \to z)$$

قسمت ۴ و ۵ این قضیه به [6] ارجاع داده می شود ..

.۶

$$x \le y \;\Rightarrow\; (y \to z) \le (x \to z)$$

$$,(z \to x) \le (z \to y)$$

فرض کنید $x \le y$, باید ثابت شود : $(y \to z) \to (x \to z) \overset{?}{=} 1$

داریم :

می توان نوشت :

$$(y \to z) \to (x \to z) =$$

$$= (z' \to y') \to (z' \to x')$$

$$\overset{(I)}{=} (y' \to z') \to (y' \to x')$$

$$= (z \to y) \to (x \to y)$$

$$= (z \to y) \to 1$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \quad (y \to z) \le (x \to z).$$

برای اثبات نا مساوی $(z \to x) \le (z \to y)$ ثابت می کنیم که :

$$(z \to x) \to (z \to y) \overset{?}{=} 1$$

$$(z \to x) \to (z \to y) \overset{(I)}{=} (x \to z) \to (x \to y)$$

$$= (x \to z) \to 1$$
$$= 1$$

۷. برای اثبات نامساوی روبه رو $x \overset{?}{\le} (x \to y) \to y$, کافیست تساوی زیر ثابت شود :

$$x \to ((x \to y) \to y) \overset{?}{=} 1$$

می توان نوشت :

$$x \to ((x \to y) \to y) \overset{c_4}{=} x \to ((y \to x) \to x)$$

$$\overset{c_1}{=} (y \to x) \to (x \to x)$$

$$= (y \to x) \to 1$$

$$= 1$$

.۸

$$x' = x \to 0 \;\Rightarrow\; (x')' = (x \to 0) \to 0 \overset{c_4}{=} (0 \to x) \to x = 1 \to x = x$$

$$\Rightarrow\; (x')' = x$$

.۹

با استفاده از تعریف ۱ . ۲ قسمت c_5 و قسمت ۴ و ۸ همین قضیه داریم :

$$(x \vee y)' = (((x \to y) \to y))' = ((y' \to x') \to y)'$$

.

$$= y' \wedge x' = x' \wedge y'$$

.۱۰

با استفاده از تعریف ۱ . ۲ قسمت c_5 و قسمت ۵ و ۸ همین قضیه داریم :

$$(x \wedge y)' = \left(((y \to x) \to y')' \right)' = ((y \to x) \to y')$$

$$= ((x' \to y') \to y') = x' \vee y'$$

قسمت ۱۱ و ۱۲ این قضیه به [7] ارجاع داده می شود .

لم ۲.۵ :

در یک جبر استلزامی مشبکه ای گزاره های C_6 و C_7 با شروط زیر معادلند :

L_1) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$

L_2) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$

اثبات :

ابتدا فرض کنیم گزاره های C_6 و C_7 برقرارند ثابت می کنیم :

L_1) $x \to (y \wedge z) = (y \wedge z)' \to x'$

بنا به قضیه ۲.۴ قسمت ۱۰ ام داریم :

$$= (y' \vee z') \to x'$$

$$\overset{c_7}{=} (y' \to x') \wedge (z' \to x')$$

$$\overset{c_5}{=} (x \to y) \wedge (x \to z).$$

L_2) $x \to (y \vee z) = (y \vee z)' \to x'$

بنا به قضیه ۲.۴ قسمت ۹ ام داریم :

$$= (y' \wedge z') \to x'$$

$$\overset{c_6}{=} (y' \to x') \vee (z' \to x')$$

$$\overset{c_5}{=} (x \to y) \vee (x \to z) .$$

حال فرض می کنیم L_1 , L_2 برقرارند ثابت می کنیم :

$$C_7)\ (x \vee y) \to z \overset{?}{=} (x \to z) \wedge (y \to z)$$

داریم :

$$C_7)\ (x \vee y) \to z = z' \to (x \vee y)'$$

$$= z' \to (x' \wedge y')$$

$$\overset{L_1}{=} (z' \to x') \wedge (z' \to y')$$

$$\overset{C_5}{=} (x \to z) \wedge (y \to z)\ .$$

و

$$C_6)\ (x \wedge y) \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$$

$$C_6)\ (x \wedge y) \to z = z' \to (x \wedge y)'$$

$$= z' \to (x' \vee y')$$

$$\overset{L_2}{=} (z' \to x') \vee (z' \to y')$$

$$\overset{c_5}{=} (x \to z) \vee (y \to z)\ .$$

فصل سوم

ایده آل های Li (L i - ideals)

ابتدا قبل ازتعریف ایده آل Li , به اثبات گزاره زیر می پردازیم .

گزاره ۳.۱ :

در یک جبر استلزامی مشبکه ای   شرط زیر نیز صدق می کند :

$$(((x \to y) \to y) \to y) = x \to y$$

اثبات:

طبق قضیه ۲.۴ قسمت ۷ کافیست به جای x , y $x \to y$ را قرار می دهیم پس داریم :

$$x \to y \leq ((x \to y) \to y) \to y \quad (I)$$

برعکس :

با استفاده از قضیه ۲.۴ قسمت ۳ داریم :

$$x \to ((x \to y) \to y) \leq (((x \to y) \to y) \to y) \to (x \to y)$$

بازبر طبق تعریف ۲.۱ قسمت C_1 داریم :

$$\Rightarrow\ (x \to y) \to (x \to y) \leq (((x \to y) \to y) \to y) \to (x \to y)$$

$$\Rightarrow\ 1 \leq\ ((x \to y) \to y) \to (x \to y)$$

حال با توجه به اینکه L یک مشبکه کراندار با کران بالای۱ است   بنابراین باید :

$$((x \to y) \to y) \to y) \to (x \to y) = 1$$

پس داریم :

$$((x \to y) \to y) \to y) \leq (x \to y) \quad \left(II \right)$$

در نتیجه با استفاده از دو رابطه (I) و $\left(II \right)$ می توان گرفت :

$$\overset{I,II}{\Rightarrow} \quad ((x \to y) \to y) \to y) = (x \to y)$$

تعریف ۲ . ۳ :

فرض می کنیم L یک جبراستلزامی مشبکه ای باشد یک زیرمجموعه غیر تهی A

از L را یک ایده ال Li نامند اگر :

L_1) $0 \in A$

L_2) $(x \to y)' \in A \; , \; y \in A \; \Rightarrow \; x \in A$

برای هر $x \, , \, y \in L$.

تحت تعریف ایده ال Li $\{0\}$ و L مثال هایی بدیهی از ایده ال Li از L می باشند .

حال در مثال زیر ایده ال Li سره ای از L را تشریح می کنیم :

مثال ۳ . ۳ :

فرض می کنیم که $L = \left\{ 0 \, , \, a \, , \, b \, , \, c \, , \, d \right\}$ یک مجموعه با شکل شماره ۱ همراه با

رابطه ترتیب "$\leq$" باشد عملگرهای صفرتایی " ' " و دوتایی " $\to$ " را در جدول های

زیر به صورت زیر تعریف می کنیم :

x	x′
0	1
a	c
b	d
c	a
d	b
١	0

(جدول شماره ۱)

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	c	1	b	c	b	1
b	d	a	1	b	a	1
c	a	a	1	1	a	1
d	b	1	1	b	1	1
1	0	a	b	c	d	1

(جدول شماره ۲)

وعملگرهای $\vee$ و $\wedge$ را روی L به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

و

$$x \wedge y = ((x \rightarrow y) \rightarrow x')'$$

برای هر $x , y \in L$.

به راحتی می توان اثبات کرد که L در شرایط یک جبر استلزامی مشبکه ای صدق می کند و

A={0,c} یک ایده ال Li از L می باشد .

L_1) $0 \in A$

L_2) $(x \to y)' \in A \ , \ y \in A \ \Rightarrow \ x \in A$

زیرا برای هر دو عنصر در جدول , دو شرط بالا برقرار است :

$(0 \to c)' = 1' = 0 \in A \ , \ c \in A \ \Rightarrow \ 0 \in A$

$(c \to 0)' = (a)' = c \in A \ , \ 0 \in A \ \Rightarrow \ c \in A$

$(c \to c)' = (1)' = 0 \in A \ , \ c \in A \ \Rightarrow \ c \in A$

$(0 \to 0)' = (1)' = 0 \in A \ , \ 0 \in A \ \Rightarrow \ 0 \in A$

بنابراین A={0,c} یک ایده ال Li از L می باشد .

تعریف ۳.۴ :

فرض کنیم L یک مشبکه باشد . یک ایده آل I از L یک زیرمجموعه غیر تهی از L است

اگر در روابط زیر صدق کند :

L_3) $x \in I \ , \ y \in L \ , \ y \le x \ \Rightarrow \ y \in I$

L_4) $x , y \in I \ \Rightarrow \ x \vee y \in I$

به I یک ایده آل مشبکه ای گویند .

لم ۳.۵ :

فرض می کنیم A یک ایده ال Li از یک جبر استلزامی مشبکه ای L باشد و $x \in A$. اگر $y \le x$ (یا به طور هم ارزی $x' \le y'$) انگاه $y \in A$ برای هر $y \in L$.

اثبات :

فرض کنید $x \in A$ و $y \le x$ پس طبق تعریف ترتیب $y \to x = 1$, لذا :

$0 = (1)' = (y \to x)'$, از طرفی $x \in A$ و چون A یک ایده ال Li است پس

$0 \in A$ بنابراین نتیجه می گیریم که : $y \in A$.

لم ۳.۶ :

در یک جبر H – استلزامی مشبکه ای , هر ایده ال Li و ایده ال مشبکه ای یکسان اند .

اثبات :

فرض کنیم A یک ایده ال مشبکه ای باشد , به وضوح $0 \in A$ زیرا :

چون $A \neq \varnothing$ پس $x \in A$ وجود دارد . اما چون همواره $0 \le x$ و $x \in A$, با تعریف

ایده ال مشبکه ای باید : $0 \in A$

برای اثبات ایده ال Li بودن A روابط زیر را طبق تعریف ۳.۲ داشتیم :

$$(x \to y)' \in A \ , \ y \in A$$

در ابتدا از قضیه ۲.۴ قسمت ۴ استفاده می کنیم :

$$y \vee (x \to y)' = (y \to (x \to y)') \to (x \to y)'$$

$$\overset{c_5}{=} ((x \to y) \to y') \to (x \to y)'$$

$$\overset{c_5}{=} (x \to y) \to ((x \to y) \to y')'$$

$$= (x \to y) \to (y \to (x \to y)')'$$

$$= (x \to y) \to (y \to ((x \to y) \to 0))'$$

با استفاده از قضیه ۴ . ۲ قسمت ۱۱ داریم :

$$= (x \to y) \to ((y \to (x \to y)) \to (y \to 0)))'$$

$$\overset{c_1}{=} (x \to y) \to ((x \to (y \to y)) \to (y \to 0)))'$$

$$\overset{c_2}{=} (x \to y) \to ((x \to 1) \to (y \to 0))'$$

$$= (x \to y) \to (1 \to (y \to 0))'$$

$$= (x \to y) \to (1 \to y')'$$

با استفاده از قضیه ۴ . ۲ قسمت ۱ و ۸ داریم :

$$\overset{8}{=} (x \to y) \to (y')'$$

$$= (x \to y) \to y$$

$$\overset{4}{=} x \vee y$$

حال چون $(x \to y)' \in A$ و $y \in A$ بنا به تعریف ۴ . ۳ قسمت L_4 داریم :

$y \vee (x \to y)' \in A$. از طرفی ثابت شد $y \vee (x \to y)' = x \vee y$ پس

$x \vee y \in A$. اما چون $x \le x \vee y$ و $x \vee y \in A$ و اینکه A یک ایده ال مشبکه ای

است . بنابراین $x \in A$. در نتیجه می توان گفت A یک ایده ال Li از جبر L می باشد .