

1969

1969



دانشگاه تربیت مدرس

T.M.U

# دانشگاه تربیت مدرس دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

## مربع سرشتهای با اجزاء محدود تحویل ناپذیر

نگارش:

عزیز علی نژاد

استاد راهنما:

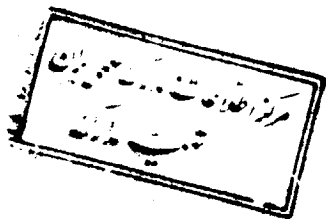
دکتر علی ایرانمنش

تابستان ۱۳۷۸

۳۸۲۹,۲

۲۵۹۷۶

۱۳۷۸ / ۴ / ۸

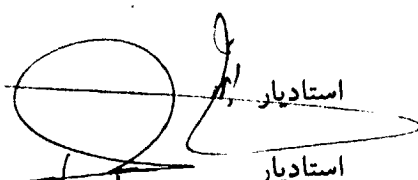
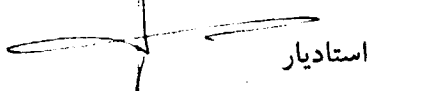
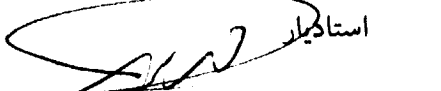
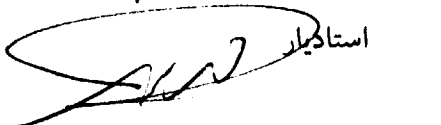


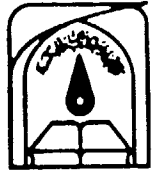
## تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیئت داوران نسخه نهایی پایان نامه خانم / آقای عزیز علی نژاد

تحت عنوان: مربع سرشتهای با اجزاء محدود تحویل ناپذیر

را از نظر فرم و محتوی بررسی نموده و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه کارشناسی ارشد پیشنهاد می کنند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علی ایرانمنش	استادیار	
۲- استاد ناظر	آقای دکتر علیرضا اشرفی	استادیار	
۳- استاد ناظر	آقای دکتر سید احمد موسوی	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر مجتبی منیری	استادیار	



تاریخ: .....

شماره: .....

پیوست: .....

## آیین نامه چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظریه اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله) های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس میبایست بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می شوند:

ماده ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله) ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به مرکز نشر دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲ در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:  
«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد / رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۷۸ در دانشکده علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم / جناب آقای دکتر علی ابراهیمش و مشاوره سرکار خانم / جناب آقای دکتر — از آن دفاع شده است.»

ماده ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه های نشریات دانشگاه تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به مرکز نشر دانشگاه اهدا کند دانشگاه می تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

ماده ۴ در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس تأدیه کند.

ماده ۵ دانشجوی تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

ماده ۶ اینجانب عزیز علی نزار دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

## هوالمعلیم

ای حضرت صاحب زمان ای پادشاه انس و جان      لطفی نمابر شیعیان تائید کن دین مبین  
توفیق تحصیلم عطا فرما و زهد بی‌ریا      تا گردم از لطف خدا از عالمین عاملین

تقدیم به پیشگاه مقدس یگانه منجی عالم بشریت

تقدیم به روح پرفروش شهیدان و امام شهدای انقلاب اسلامی

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که وجودشان را در جهت اعتلای فرزندان‌شان صرف کرده‌اند.

تقدیم به همسرگرامیم و محمدامین نازنینم که انجام این تحقیق بدون دلگرمی و یاری و صبوری ایشان امکان  
نداشت و تقدیم به تمام معلمان و اساتیدی که صادقانه شمع راه تعلیم و تربیت هستند.

عمری گذشت و راه نبردم به‌کوی دوست      مجلس تمام گشت و ندیدم روی دوست

گوش من و تو وصف رخ یار نشنود      ورنه جهان ندارد جز گفتگوی دوست

## «چکیده»

فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $\psi, \chi$  سرشتهای تحویل‌ناپذیر از  $G$  باشند. اگر  $\chi$  باوفا باشند و در رابطه  $\chi^2 = a\psi + b\bar{\psi}$  که در آن  $a, b$  اعداد صحیح نامنفی  $\bar{\psi}$  مزدوج مختلط  $\psi$  می‌باشد، صدق کند آنگاه می‌توان اطلاعاتی در مورد ساختمان گروه  $G$  بدست آورد.

در این پایان‌نامه ساختار گروه  $G$  را از روی معادله فوق در سه حالت خاص مورد بررسی

قرار داده‌ایم:

۱. اگر  $\chi^2 = a\psi$  آنگاه ساختمان  $G$  در قضیه ۲.۲.۳ مورد بررسی قرار گرفته است.
۲. اگر  $\chi^2 = a\chi + b\bar{\chi}$  آنگاه مرتبه  $G$  فرد خواهد بود و برای مرتبه  $G$  فرمولی در ارتباط با  $a, b$  ارائه می‌شود.

۳. اگر  $\chi^2 = a\psi + b\bar{\psi}$  آنگاه ساختمان  $G$ ، در قضیه ۱.۵.۴ بیان شده است.

## «مقدمه»

تاکنون صد سال از پیدایش نظریه نمایش گروهها می‌گذرد. اولین گامها در این نظریه توسط فروبنیوس<sup>۱</sup>، برونساید<sup>۲</sup> و شر<sup>۳</sup> برداشته شد و بعدها مطالعه در این موضوع بوسیله براور<sup>۴</sup> و دیگران ادامه یافت. فروبنیوس و برونساید به اهمیت نظریه نمایش در تجزیه و تحلیل ساختمان گروههای متناهی پی برده بودند و این نظریه را پایه‌گذاری کردند.

در این پایان‌نامه کار اصلی در راستای همین هدف بوده است. مطالب این نوشته مشتمل بر چهار فصل است از آنجایی که در مقاله با مفاهیم گوناگون در نظریه گروهها و همچنین با بعضی گروههای خاص برخورد می‌کنیم لذا لازم دانستیم که فصل اول پایان‌نامه را که از دو بخش تشکیل شده به این امر اختصاص دهیم. در بخش اول از همین فصل به تعریف  $p$ -گروهها و بیان چند قضیه در ارتباط با آنها پرداخته‌ایم و در بخش دوم بعضی گروههای متناهی خاص را مورد توجه قرار داده‌ایم در این فصل از مراجع [۱]، [۱۱] و [۱۲] استفاده شده است.

فصل دوم اختصاص به مفاهیم اساسی در زمینه نظریه نمایش گروهها و سرشت گروههای متناهی دارد. بخش اول شامل تعریف نمایش گروهها، نمایش بدیهی،  $R$ -مدول آزاد، نمایشهای جایگشتی و نمایش تحویل‌ناپذیر است. در بخش دوم تعریف سرشت یک گروه، مفهوم سرشت تحویل‌ناپذیر و چند قضیه در ارتباط با این موضوع بیان شده است. بخشهای سوم، چهارم، پنجم و ششم را به ترتیب به سرشتهای تحدید شده و القاء شده، سرشتهای جایگشتی، قضیه کلیفورد و در نهایت مفهوم اتومورفیسم بدون نقطه ثابت اختصاص داده‌ایم و در هر بخش بعضی قضایای مهم و مرتبط با آن بخش بیان شده است. در این فصل از مراجع [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، [۷] و [۹] استفاده شده است. فصل سوم و چهارم پایان‌نامه باز شده مقاله مرجع [۸] است که در این دو فصل از مراجع ذکر شده برای فصل دوم و همچنین از مرجع [۶] استفاده شده است.

---

1) Frobenius   2) Burnside   3) Schur   4) Brauer

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱.....	فصل اول: معرفی بعضی از گروههای متناهی مهم
۱.....	۱-۱. تعاریف و قضایای مربوط به $\mathbb{Z}$ گروهها
۳.....	۲-۱. معرفی بعضی گروههای خاص
.....	فصل دوم: نمایش و سرشت گروهها
۷.....	۱-۲. نمایش گروهها
۱۰.....	۲-۲. سرشت گروهها
۱۳.....	۳-۲. سرشتهای تحدید شده و القاء شده
۱۴.....	۴-۲. سرشتهای جایگشتی
۱۵.....	۵-۲. قضیه کلیفورد
۱۸.....	۶-۲. مفهوم اتومورفیسیم بدون نقطه ثابت
.....	فصل سوم: تعیین ساختار گروه متناهی $G$ زمانی که $\chi^2 = a\psi$
۲۲.....	۱-۳. قضایا و تعاریف
۲۵.....	۲-۳. قضیه اصلی
.....	فصل چهارم: تعیین ساختار گروه متناهی $G$ زمانی که $\chi^2 = a\psi + b\bar{\psi}$
۲۹.....	۱-۴. حالت $\chi = \psi$
۳۰.....	۲-۴. نتایج فرعی و قضیه اصلی



۳۶	.....	۳-۴. لم اساسی
۳۸	.....	۴-۴. اثبات قضیه اصلی
۴۰	.....	۵-۴. حالت $\psi \neq \lambda$
۴۴	.....	فهرست منابع

## فصل اول

**معرفی بعضی از گروه‌های متناهی مهم**

## فصل اول

### تعاریف و قضایای مربوط به $p$ -گروهها

در این فصل بعضی از گروههای متناهی و هم‌چنین قضایای مربوط به  $p$ -گروهها که در پایان‌نامه مورد نیاز است معرفی شده و در فصول سه و چهار در اثبات قضایای اینها استفاده می‌شود.

#### ۱-۱. تعاریف و قضایای مربوط به $p$ -گروهها

در بحث آینده  $p$  همواره عددی اول خواهد بود.

تعریف ۱-۱-۱. گروه متناهی  $G$  را  $p$ -گروه نامیم هرگاه هر عضو  $G$  از مرتبه توانی از  $p$  باشد. زیرگروه  $H$  از  $G$  را  $p$ -زیرگروه  $G$  می‌نامیم هرگاه خودش یک  $p$ -گروه باشد. یک سیلو  $p$ -زیرگروه  $M$  از گروه

$G$  عبارت است از  $p$ -زیرگروه ماکسیمال  $G$ ، یعنی  $p$ -زیرگروهی که زیرمجموعه هیچ  $p$ -زیرگروه دیگری نباشد.

تعریف ۱-۱-۲. گروه متناهی  $G$  را  $p$ -گروه آبلی مقدماتی گوئیم هرگاه با  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$  ایزومورف باشد.

تعریف ۱-۱-۳. یک سری نرمال از گروه  $G$  دنباله‌ای است از زیرگروههای  $G$  مانند:

$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n = 1$  به طوری که برای هر  $i$ ،  $G_{i+1} \triangleleft G_i$ . برای هر  $i = 0, 1, \dots, n-1$  گروههای  $G_i/G_{i+1}$  را گروههای عامل این سری نرمال می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۴. گروه متناهی  $G$  حلپذیر است هرگاه  $G$  دارای سری نرمال باشد به طوری که گروههای عامل آن دوری باشند.

قضیه ۱-۱-۵. هر  $p$ -گروه متناهی حلپذیر است.

اثبات: به [11] مراجعه شود.

تعریف ۱-۱-۶. عضو  $g \in G$  را  $p$ -عنصر گوئیم هرگاه زیرگروه دوری تولید شده توسط  $g$  یک  $p$ -گروه باشد.

تعریف ۱-۱-۷. زیرگروه  $H$  از گروه  $G$  را زیرگروه نرمال می‌نیمال گوئیم اگر  $H \neq 1$  و زیرگروه نرمالی مانند  $K$  موجود نباشد به طوری که  $1 < K < H$ . زیرگروههای نرمال می‌نیمال همیشه در گروههای متناهی غیر بدیهی وجود دارند.

قضیه ۱-۱-۸. اگر  $G$  گروه حلپذیر باشد آنگاه هر زیرگروه نرمال می‌نیمال آن آبلی مقدماتی است.

اثبات: به [11] مراجعه شود.

قضیه ۱-۱-۹. هر گروه از مرتبه فرد حلپذیر است.

اثبات: به [11] مراجعه شود.

## ۲-۱. معرفی بعضی گروههای خاص

تعریف ۱-۲-۱. گروهی را که به صورت زیر تعریف می شود گروه کوآترنیونهای تعمیم یافته می گوئیم و آن را با  $Q(2^n)$  نشان می دهیم.

$$Q(2^n) = \langle x, y | x^{2^{n-1}} = 1, x^2 = y^{2^{n-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

که در آن  $n$  یک عدد طبیعی بزرگتر از دو و مرتبه گروه  $2^n$  است. هم چنین این گروه تنها یک عضو مانند  $z$  از مرتبه دو دارد و  $Z(Q(2^n)) = \langle z \rangle$ .

قضیه ۲-۲-۱. یک  $2$ -گروه متناهی  $G$  که تنها یک عضو از مرتبه دو دارد یا دوری است و یا کوآترنیون تعمیم یافته است.

اثبات: به [4] مراجعه شود

تعریف ۳-۲-۱. فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی باشد، گروه فراتینی  $G$  که با  $\phi(G)$  نمایش می دهیم عبارت است از اشتراک تمام زیر گروههای ماکسیمال  $G$ . واضح است که  $\phi(G) \triangleleft G$ .

تعریف ۴-۲-۱.  $p$ -گروه متناهی  $G$  را ویژه نامیم هرگاه  $Z(G)$  دوری باشد و  $\phi(G) = Z(G) = G'$  که در آن  $G'$  گروه جابه جاگر  $G$  است.

قضیه ۵-۲-۱. اگر  $G$  یک گروه ویژه باشد در این صورت  $G/Z(G)$  آبلی مقدماتی است.

اثبات: به [11] مراجعه شود.

تعریف ۶-۲-۱. زیر گروه  $H$  از گروه متناهی  $G$  را یک زیرگروه هال می نامیم هرگاه داشته باشیم  $(|H|, |G:H|) = 1$ .

تعریف ۷-۲-۱. فرض کنید  $N$  یک زیرگروه  $G$  باشد، می گوئیم  $N$   $p$ -مکمل نرمال  $G$  است هرگاه  $G = NP, N \triangleleft G$  و  $N \cap P = \{1\}$  که  $P$  سیلو  $p$ -زیرگروه  $G$  است.

قضیه ۱-۲-۸. اگر گروه  $G$  دارای سیلو ۲-زیرگروه دوری باشد در این صورت  $G$  دارای یک ۲-مکمل نرمال است.

اثبات: به [4] مراجعه شود.

تعریف ۱-۲-۹. فرض کنید  $G$  یک گروه،  $H$  و  $K$  زیرگروههای آن باشند به طوری که  $H \triangleleft G$ ،  $H \cap K = \{1\}$  و  $G = HK$  در این صورت  $G$  را حاصلضرب نیم مستقیم  $H$  توسط  $K$  می نامند.

تعریف ۱-۲-۱۰. گروه  $G$  را بوجتوان از رتبه ۲ گویند هرگاه  $G' \leq Z(G)$ .

تعریف ۱-۲-۱۱. فرض کنید  $G$  یک گروه و  $K$  و  $H$  زیرگروههای آن می باشند. در این صورت  $G$  را حاصلضرب مرکزی  $H$  و  $K$  می نامیم اگر داشته باشیم

$$G = HK \text{ (الف)}$$

$$hk = kh \text{ برای تمام } h \in H \text{ و } k \in K \text{ (ب)}$$

قضیه ۱-۲-۱۲. فرض کنید  $G$  حاصلضرب مرکزی زیرگروههای  $H$  و  $K$  است. در این صورت

$$H \triangleleft G, K \triangleleft G \text{ و } H \cap K \leq Z(G)$$

اثبات: به [۱۲] مراجعه شود.

تعریف ۱-۲-۱۳. فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $H < G$ ، در این صورت  $G$  یک گروه فروبنیوس

با مکمل  $H$  است اگر به ازای هر  $g \in G$  داشته باشیم  $H^g \cap H = \{1\}$  یا  $H^g = H$  و  $H = N_G^{(H)}$ .

گروه فروبنیوس را می توان به صورت زیر نیز تعریف کرد.

تعریف ۱-۲-۱۴. گروه جایگشتی  $G$  روی  $\Omega$  را یک گروه فروبنیوس نامیم هرگاه  $G$  روی  $\Omega$  به صورت

انتقالی عمل کند و داشته باشیم:

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega \quad G_\alpha \cap G_\beta = \{1\}$$

$H = G_\alpha$  را مکمل فروبنیوس می نامیم.

قضیه ۱-۲-۱۵. فرض کنید  $G$  یک گروه فروبنیوس با مکمل  $H$  است قرار می‌دهیم

$$K = \{x \in G \mid \Omega \text{ را ثابت نگه نمی‌دارد}\} \cup \{1\}$$

آنگاه  $K \triangleleft G$  و  $KH = G$  و  $H \cap K = \{1\}$ .

اثبات: به [۴] مراجعه شود.