بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

T.M.U

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکدهٔ علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

مربع سرشتهای با اجزاء محدود تحویل ناپذیر

نگارش:

عزیز علی نژاد

استاد راهنما:

دکتر علی ایرانمنش

تابستان ۱۳۷۸

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعـضـای هیـئـت داوران نـسخـهٔ نـهایی پایان نامه خـانم / آقای عزیز علی نژاد

تحت عنوان: **مربع سرشتهای با اجزاء محدود تحویل ناپذیر**

را از نظر فرم و محتوی بررسی نموده و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه کارشناسی ارشد پیشنهاد می‌کنند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علی ایرانمنش	استادیار	
۲- استاد ناظر	آقای دکتر علیرضا اشرفی	استادیار	
۳- استاد ناظر	آقای دکتر سید احمد موسوی	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر مجتبی منیری	استادیار	

بسمه تعالی

تاریخ: ....

شماره: ....

پیوست: ....

دانشگاه تربیت مدرس

آیین نامهٔ چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظربه اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله) های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله) ی خود، مراتب را قبلاً به طورکتبی به مرکز نشر دانشگاه اطلاع دهد.

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/~~رساله دکتری~~ نگارنده در رشتهٔ ریاضی محض است که در سال ۷۸ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/ جناب آقای دکتر علی ایرانمنش و مشاورهٔ سرکارخانم/جناب آقای دکتر ——— از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های نشریات دانشگاه تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به مرکز نشر دانشگاه اهدا کند دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴ در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس تأدیه کند.

مادهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶ اینجانب عزیز علی‌نژاد دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

هوالعلیم

ای حضرت صاحب زمان ای پادشاه انس و جان لطفی نمابر شیعیان تائید کن دین مبین
توفیق تحصیلم عطا فرما و زهد بی‌ریا تا گردم از لطف خدا از عالِمین عاملین

تقدیم به پیشگاه مقدس یگانه منجی عالم بشریت

تقدیم به روح پرفتوح شهیدان و امام شهدای انقلاب اسلامی

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که وجودشان را در جهت اعتلای فرزندانشان صرف کرده‌اند.

تقدیم به همسر گرامیم و محمدامین نازنینم که انجام این تحقیق بدون دلگرمی و یاری و صبوری ایشان امکان نداشت و تقدیم به تمام معلمان و اساتیدی که صادقانه شمع راه تعلیم و تربیت هستند.

عمری گذشت و راه نبردم بکوی دوست مجلس تمام گشت و ندیدم روی دوست
گوش من و تو وصف رخ یار نشنود ورنه جهان ندارد جز گفتگوی دوست

«چکیده»

فرض کنید G یک گروه متناهی و χ, ψ سرشتهای تحویل‌ناپذیر از G باشند. اگر χ باوفا باشند و در رابطهٔ $\chi^{2} = a\psi + b\overline{\psi}$، که در آن b, a اعداد صحیح نامنفی $\overline{\psi}$ مزدوج مختلط ψ می‌باشد، صدق کند آنگاه می‌توان اطلاعاتی در مورد ساختمان گروه G بدست آورد.

در این پایان‌نامه ساختارگروه G را از روی معادله فوق در سه حالت خاص مورد بررسی قرار داده‌ایم:

۱. اگر $\chi^{2} = a\psi$ آنگاه ساختمان G در قضیه ۲.۲.۳ مورد بررسی قرارگرفته است.

۲. اگر $\chi^{2} = a\chi + b\overline{\chi}$ آنگاه مرتبه G فرد خواهد بود و برای مرتبه G فرمولی در ارتباط با b, a ارائه می‌شود.

۳. اگر $\chi^{2} = a\psi + b\overline{\psi}$ آنگاه ساختمان G، در قضیه ۱.۵.۴ بیان شده است.

«مقدمه»

تاکنون صد سال از پیدایش نظریه نمایش گروهها می‌گذرد. اولین گامها در این نظریه توسط فروبنیوس[1]، برونساید[2] و شر[3] برداشته شد و بعدها مطالعه در این موضوع بوسیلهٔ براور[4] و دیگران ادامه یافت. فروبنیوس و برونساید به اهمیت نظریه نمایش در تجزیه و تحلیل ساختمان گروههای متناهی پی برده بودند و این نظریه را پایه‌گذاری کردند.

در این پایان‌نامه کار اصلی در راستای همین هدف بوده است. مطالب این نوشته مشتمل بر چهار فصل است از آنجایی که در مقاله با مفاهیم گوناگون در نظریه گروهها و هم‌چنین با بعضی گروههای خاص برخورد می‌کنیم لذا لازم دانستیم که فصل اول پایان‌نامه را که از دو بخش تشکیل شده به این امر اختصاص دهیم. در بخش اول از همین فصل به‌تعریف pـگروهها و بیان چند قضیه در ارتباط با آنها پرداخته‌ایم و در بخش دوم بعضی گروههای متناهی خاص را مورد توجه قرار داده‌ایم در این فصل از مراجع [۱]، [۱۱] و [۱۲] استفاده شده است.

فصل دوم اختصاص به مفاهیم اساسی در زمینه نظریه نمایش گروهها و سرشت گروههای متناهی دارد. بخش اول شامل تعریف نمایش گروهها، نمایش بدیهی، Rـمدول آزاد، نمایشهای جایگشتی و نمایش تحویل‌ناپذیر است. در بخش دوم تعریف سرشت یک گروه، مفهوم سرشت تحویل‌ناپذیر و چند قضیه در ارتباط با این موضوع بیان شده است. بخشهای سوم، چهارم، پنجم و ششم را به‌ترتیب به سرشتهای تحدید شده و القاء شده، سرشتهای جایگشتی، قضیه کلیفورد و در نهایت مفهوم اتومورفیسم بدون نقطه ثابت اختصاص داده‌ایم و در هر بخش بعضی قضایای مهم و مرتبط با آن بخش بیان شده است. در این فصل از مراجع [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، [۷] و [۹] استفاده شده است. فصل سوم و چهارم پایان‌نامهٔ باز شده مقاله مرجع [۸] است که در این دو فصل از مراجع ذکر شده برای فصل دوم و هم‌چنین از مرجع [۶] استفاده شده است.

---

1) Frobenius 2) Burnside 3) Schur 4) Brauer

فهرست مطالب

فصل اول

معرفی بعضی از گروههای متناهی مهم

فصل اول

تعاریف و قضایای مربوط به pـگروهها

در این فصل بعضی از گروههای متناهی و هم‌چنین قضایای مربوط به pـگروهها که در پایان‌نامه مورد نیاز است معرفی شده و در فصول سه و چهار در اثبات قضایا از اینها استفاده می‌شود.

۱ـ۱. تعاریف و قضایای مربوط به pـگروهها

در بحث آینده p همواره عددی اول خواهد بود.

تعریف ۱ـ۱ـ۱. گروه متناهی G را pـگروه نامیم هرگاه هر عضو G از مرتبه توانی از p باشد. زیرگروه H از G را pـزیرگروه G می‌نامیم هرگاه خودش یک pـگروه باشد. یک سیلو pـزیرگروه M از گروه

G عبارت است از pـزیرگروه ماکسیمال G، یعنی pـزیرگروهی که زیرمجموعه هیچ pـزیرگروه دیگری نباشد.

تعریف ۱ـ۱ـ۲. گروه متناهی G را pـگروه آبلی مقدماتی گوییم هرگاه با $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ ایزومورف باشد.

تعریف ۱ـ۱ـ۳. یک سری نرمال از گروه G دنباله‌ای است از زیر گروههای G مانند:

$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$ به‌طوری‌که برای هر i، $G_{i+1} \lhd G_i$. برای هر $i = 0, 1, \cdots, n-1$ گروههای G_i/G_{i+1} را گروههای عامل این سری نرمال می‌نامیم.

تعریف ۱ـ۱ـ۴. گروه متناهی G حلپذیر است هرگاه G دارای سری نرمال باشد به‌طوری‌که گروههای عامل آن دوری باشند.

قضیه ۱ـ۱ـ۵. هر pـگروه متناهی حلپذیر است.

اثبات: به [11] مراجعه شود.

تعریف ۱ـ۱ـ۶. عضو $g \in G$ را pـعنصر گوئیم هرگاه زیر گروه دوری تولید شده توسط g یک pـگروه باشد.

تعریف ۱ـ۱ـ۷. زیر گروه H از گروه G را زیرگروه نرمال می‌نیمال گویند اگر $H \neq 1$ و زیرگروه نرمالی مانند K موجود نباشد به‌طوری‌که $1 < K < H$. زیرگروههای نرمال می‌نیمال همیشه در گروههای متناهی غیر بدیهی وجود دارند.

قضیه ۱ـ۱ـ۸. اگر G گروه حلپذیر باشد آنگاه هر زیر گروه نرمال می‌نیمال آن آبلی مقدماتی است.

اثبات: به [11] مراجعه شود.

قضیه ۱ـ۱ـ۹. هر گروه از مرتبه فرد حلپذیر است.

اثبات: به [11] مراجعه شود.

۱ـ۲. معرفی بعضی گروههای خاص

تعریف ۱ـ۲ـ۱. گروهی را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود گروه کواترنیونهای تعمیم یافته می‌گوییم و آن را با $Q(2^n)$ نشان می‌دهیم.

$$Q(2^n) =< x, y | x^{2^{n-1}} = 1, x^2 = y^{2^{n-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} >$$

که در آن n یک عدد طبیعی بزرگتر از دو و مرتبه گروه 2^n است. هم‌چنین این گروه تنها یک عضو مانند z از مرتبه دو دارد و $Z(Q(2^n)) = \prec z \succ$.

قضیه ۱ـ۲ـ۲. یک ۲ـگروه متناهی G که تنها یک عضو از مرتبه دو دارد یا دوری است و یا کواترنیون تعمیم یافته است.

اثبات: به [4] مراجعه شود

تعریف ۱ـ۲ـ۳. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد، گروه فراتینی G که با $\phi(G)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از اشتراک تمام زیر گروههای ماکسیمال G. واضح است که $\phi(G) \lhd G$.

تعریف ۱ـ۲ـ۴. pـگروه متناهی G را ویژه نامیم هرگاه $Z(G)$ دوری باشد و $\phi(G) = Z(G) = G'$ که در آن G' گروه جابه‌جاگر G است.

قضیه ۱ـ۲ـ۵. اگر G یک گروه ویژه باشد در این‌صورت $G/Z(G)$ آبلی مقدماتی است.

اثبات: به [11] مراجعه شود.

تعریف ۱ـ۲ـ۶. زیر گروه H از گروه متناهی G را یک زیرگروه هال می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $(|H|, |G : H|) = 1$.

تعریف ۱ـ۲ـ۷. فرض کنید N یک زیرگروه G باشد، می‌گوئیم N pـمکمل نرمال G است هرگاه $N \lhd G$، $G = NP$ و $N \cap P = \{1\}$ که P سیلو pـزیر گروه G است.

قضیه ۱ـ۲ـ۸. اگر گروه G دارای سیلو ۲ـزیرگروه دوری باشد دراین‌صورت G دارای یک ۲ـمکمل نرمال است.

اثبات: به [4] مراجعه شود.

تعریف ۱ـ۲ـ۹. فرض کنید G یک گروه، H و K زیر گروههای آن باشند به‌طوری‌که $H \lhd G$، $H \cap K = \{1\}$ و $G = HK$ در این‌صورت G را حاصلضرب نیم مستقیم H توسط K می‌نامند.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۰. گروه G را *پوچتوان از رتبه ۲* گویند هرگاه $G' \leq Z(G)$.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۱. فرض کنید G یک گروه و K و H زیرگروههای آن می‌باشند. دراین‌صورت G را حاصلضرب مرکزی H و K می‌نامیم اگر داشته باشیم

الف) $G = HK$

ب) $hk = kh$ برای تمام $h \in H$ و $k \in K$.

قضیه ۱ـ۲ـ۱۲. فرض کنید G حاصلضرب مرکزی زیرگروههای H و K است. در این‌صورت $H \trianglelefteq G$، $K \trianglelefteq G$ و $H \cap K \leq Z(G)$.

اثبات: به [۱۲] مراجعه شود.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۳. فرض کنید G یک گروه متناهی و $H < G$، دراین‌صورت G یک گروه فروبنیوس با مکمل H است اگر به‌ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $H^g \cap H = \{1\}$ یا $H^g = H$ و $H = N_G^{(H)}$.

گروه فروبنیوس را می‌توان به‌صورت زیر نیز تعریف کرد.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۴. گروه جایگشتی G روی Ω را یک گروه فروبنیوس نامیم هرگاه G روی Ω به‌صورت انتقالی عمل کند و داشته باشیم:

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega \qquad G_\alpha \cap G_\beta = \{1\}$$

$H = G_\alpha$ را مکمل فروبنیوس می‌نامیم.

قضیه ۱ـ۲ـ۱۵. فرض کنید G یک گروه فروبنیوس با مکمل H است قرار می‌دهیم

$$K = \{x \in G \mid \text{هیچ عضوی از } \Omega \text{ را ثابت نگه نمی‌دارد } x\} \cup \{۱\}$$

آنگاه $K \lhd G$ و $KH = G$ و $H \cap K = \{۱\}$.

اثبات: به [۴] مراجعه شود.